Probleme propuse * Setul 1

1. (sisteme de ecuaţii) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ şi $f : \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Fie A mulţimea valorilor funcţiei f şi $\mathbb{I}$ mulţimea numerelor iraţionale. Atunci
a) $A \cap \mathbb{I} = \emptyset$; b) $A \cap \mathbb{I} = A$; c) $A \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$; d) $A \cap \mathbb{I} = \{0\}$; e) $A \cap \mathbb{I} = (0, +\infty)$;
f) $A \cap \mathbb{I} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = a + b\sqrt{2} \;\; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

2. (polinoame) Câte polinoame $p(X)$ de grad 3 cu coeficienţi întregi satisfac condiţiile $p(7) = 5$ si $p(15) = 9$?
a) o infinitate; b) trei; c) unul; d) nici unul; e) patru; f) zece.

3. (determinanţi) Calculaţi determinantul $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.
a) 2; b) -2; c) 4; d) -4; e) 1; f) -1.

4. (limite de funcţii) Să se studieze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-3x(\cos x + 3\sin x)}}{\mathrm{e}^{-2x(\cos x + \sin x)}}$.

a) nu există; b) 0; c) ∞; d) $-\infty$; e) 1; f) -1.

5. (continuitate) Pentru ce valori ale lui $a, b \in \mathbb{R}$ funcţia $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{a}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$ este continuă ?
a) $a = b = 1$; b) $a = b$; c) $a \in \mathbb{R}$ şi $b = 0$; d) f este discontinuă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$; e) $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$; f) $a = 0, b = 1$.

6. (derivabilitate) Dacă notăm prin $[a]$ partea întreagă a numărului real a, atunci funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], \; x \neq 0 \\ 1, \; x = 0 \end{cases}$$

a) este derivabilă; b) este continuă; c) este derivabilă în $x = 1$; d) este continuă în $x = 1$; e) este continuă în $x = 0$; f) este derivabilă în $x = -1$.

7. (limite de şiruri) Folosind sumele Riemann, să se calculeze limita

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right).$$

a) $\ell = \frac{3}{2}$; b) $\ell = \frac{1}{\pi}$; c) $\ell = \frac{2}{3}$; d) $\ell = \frac{3}{2\pi}$; e) $\ell = \frac{2}{\pi}$; f) $\ell = 2$.

8. (geometrie analitică) Fie $A(3,0)$, $B(0,3)$ şi fie $C(a,b)$ pe dreapta $y + x = 8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel cu baza AB. Fie $H(x_0, y_0)$ ortocentrul triunghiului ABC şi $s = x_0 + y_0$. Atunci
a) $s = \frac{24}{5}$; b) $s = 6$; c) $s = 4$; d) $s = \frac{12}{5}$; e) $s = \frac{16}{7}$; f) $s = \frac{17}{3}$.

9. (ecuaţii trigonometrice) Să se determine constantele m, n, p astfel încât

$$\sin^4 x + \cos^4 x + m(\sin^6 x + \cos^6 x) + n(\sin^8 x + \cos^8 x) + p(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = 1,\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) $1, 1, 1$; b) $6, -10, 4$; c) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$; d) $3, -5, 2$; e) $1, -1, 1$; f) $2, -3, 4$.

10. (ecuaţii algebrice) Decideţi care dintre numerele complexe următoare nu este soluţie a ecuaţiei

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0 \;?$$

a) 2; b) $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; c) $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; d) $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

Probleme propuse * Setul 2

11. (sisteme) Aflaţi parametrul $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{xy}{x+y} < 0$, unde (x,y) este o soluţie oarecare a sistemului $\begin{cases} x^3+y^3-2(x+y)=25a \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

a) $a<0$; b) $a>0$; c) $a \in (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$; d) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{7}}{5}, \infty)$;
e) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (1, \infty)$; f) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$.

12. (mulţimi) Fie $A = \{x+y\sqrt{2} \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$ şi $\alpha = \sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}$. Atunci
a) $\alpha \notin A$; b) $\alpha \in A$; c) $\alpha^2=1$; d) $\alpha^3=1$; e) $\alpha<0$; f) $\alpha>1$.

13. (mulţimi) Numerele $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ au proprietatea că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1x_2=\alpha$ şi $|x_1-x_2|=\beta$. Atunci
a) $\alpha \geq \beta$; b) $4\alpha-\beta^2 \leq 0$; c) $\beta^2+4\alpha \geq 0$; d) $\beta^2-4\alpha \geq 0$; e) $\beta^2 \geq \alpha$; f) $\alpha=\beta$.

14. (şiruri) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n^{1/n}-1)}{\ln n}$.
a) 1; b) e; c) 1/e; d) e − 1; e) 2; f) 1/2.

15. (derivabilitate) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Punctele de derivabilitate ale lui f sunt
a) 0; b) $\mathbb{R}$; c) nu există; d) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; e) $\mathbb{R}\setminus\{0, \frac{2}{\pi}\}$; f) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

16. (derivabilitate) Fie $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ o funcţie derivabilă, inversabilă, $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, şi $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ inversa sa. Atunci $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta g(y)dy$ are valoarea
a) $b\beta+a\alpha$; b) $b\beta-a\alpha$; c) $a\beta+b\alpha$; d) $a\beta-b\alpha$; e) $ab+\alpha\beta$; f) $ab-\alpha\beta$.

17. (primitive) Să se determine $F'(x)$ dacă $F(x) = \int_c^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ unde $b:[\alpha,\beta]\to[c,d]$ derivabilă pe (α,β) şi $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[c,d]$.
a) $F'(x)=f(b(x))$; b) $F'(x)=f'(b(x))-f(c)$; c) $F'(x)=f'(b(x))$;
d) $F'(x)=f(b(x))b'(x)$; e) $F'(x)=f(b(x))b'(x)-f(c)$; f) $F'(x)=f'(b(x))b'(x)$.

18. (ecuaţii trigonometrice) Fie ecuaţiile $6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2$ şi $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2$. Câte soluţii comune au aceste ecuaţii ?
a) nici una; b) o infinitate; c) două; d) toate; e) trei; f) patru.

19. (aplicaţii ale trigonometriei) În ce triunghi are loc relaţia $\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$?
a) echilateral; b) dreptunghic; c) oarecare; d) în nici un triunghi; e) isoscel;
f) obtuzunghic.

20. (geometrie în spaţiu) Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Să se calculeze unghiul dintre dreptele AC şi AB'.
a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{7\pi}{12}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{\pi}{5}$; f) $\frac{3\pi}{8}$.

Probleme propuse * Setul 3

21. (structuri algebrice) Mulţimea matricelor de forma $M(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}$, $x \neq 0$, formează relativ la înmulţirea matricelor un grup izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbb{R}^*$. Atunci
a) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix}$; c) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$;
d) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}$; e) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. (structuri algebrice) Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziţie $x \oplus y = mx + ny - 1$, $x \odot y = 2xy - 2x - 2y + p$. Să se determine m, n şi p astfel încât $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ să fie corp.
a) $1,2,3$; b) $1,1,3$; c) $m = n = 1$, $p \in \mathbb{R}$, d) $1,1,1+i$; e) problema nu are soluţie; f) $1,1,0$.

23. (funcţia de gradul doi) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$, unde m este un parametru real. Care este mulţimea valorilor parametrului m pentru care $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1$?
a) $m \in (-3, -\frac{1}{3})$; b) $m \in (\frac{-5-\sqrt{10}}{3}, -\frac{7}{3})$; c) $m \in (-3, -\frac{7}{3}) \cup (-1, -\frac{1}{3})$;
d) $m \in (-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (-1, +\infty)$; e) $m \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$; f) $m \in \emptyset$.

24. (şiruri) Fie $a, r, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ fixate şi fie şirurile $x_n = (a + (n-1)r)q^{n-1}$ şi $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Care afirmaţie este adevărată ?
a) x_n este o progresie geometrică; b) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2}$;
c) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq(q^n - 1)\frac{nq-1}{(1-q)^2}$; d) x_n este şir nemărginit $\forall a, r, q \in \mathbb{R}$;
e) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq(q^{n-1} - 1)\frac{nq^2 - (n-1)q + 1}{(1-q)^2}$; f) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + nr\frac{(n-1)q^{n+1} - nq^n + 2}{(1-q)^2}$.

25. (şiruri) Se consideră şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{\sin n!}{1 + 4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci
a) (x_n) este monoton şi mărginit; b) (x_n) este monoton; c) $\sup x_n = 0$;
d) (x_n) este convergent; e) $\inf x_n = 0$; f) $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

26. (derivabilitate) Fie $f : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$. Pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, valoarea expresiei $E(x) = (x^2 - 1)f''(x) + xf'(x)$ este
a) $\alpha^2 f(x)$; b) $f(x)$; c) 0; d) $f'(x)$; e) $\alpha f'(x)$; f) $\alpha^2 f'(x)$.

27. (integrale definite) Să se calculeze $I = \lim\limits_{a \to \infty} \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{1 + |x - a|}$.
a) $I = \ln 3$; b) $I = 1$; c) $I = \mathrm{e}$; d) $I = \mathrm{e}^{-1}$; e) $I = \ln 2$; f) $I = 0$.

28. (geometrie analitică) Fie ecuaţiile $6\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2$ şi $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$. Câte soluţii comune au aceste ecuaţii ?
a) nici una; b) o infinitate; c) două; d) toate; e) trei; f) patru.

29. (funcţii trigonometrice) Fie $E = \sin\left(\arccos\dfrac{3}{5} + \arccos\dfrac{15}{17}\right)$. Atunci
a) $E = \frac{34}{35}$; b) $E = \frac{84}{85}$; c) $E = \frac{83}{85}$; d) $E = \frac{13}{85}$; e) $E = \frac{27}{85}$; f) $E = \frac{36}{85}$.

30. (ecuaţii trigonometrice) Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(3\arccos x) = \cos(2\arccos x) + 1\}$. Atunci
a) $A = \{0, 1, -1\}$; b) $A = \left\{0, \frac{1-\sqrt{13}}{4}; \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$; c) $A = \left\{0, \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$;
d) $A = \left\{0, \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right\}$; e) $A = [-1, 1]$; f) $A = \mathbb{R}$.

Probleme propuse * Setul 4

31. **(combinatorică)** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = C_{3x+7}^{6x+2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Fie $M = \max\limits_{x\in D} f(x)$. Atunci

a) $M = 21$; b) $M = 84$; c) $M = 45$; d) $M = 72$; e) $M = 210$; f) $M = 60$.

32. **(combinatorică)** Dacă $A_x^7 + 3A_x^5 = 45A_x^5$, atunci

a) $x = 8$; b) $x = 7$; c) $x = 12$; d) $x \in \{-1, 12\}$; e) $x = 13$; f) $x = 0$.

33. **(combinatorică)** Se consideră suma $S = \dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$. Avem

a) $S = 2^{n+1}$; b) $S = \frac{2^n-1}{n}$; c) $S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; d) $S = \frac{2^n-1}{n+1}$; e) $S = \frac{2^{n+1}-1}{n}$; f) $n \cdot 2^{n+1}$.

34. **(şiruri)** Limita x a şirului $x_n = \dfrac{1^2}{n^3+1^2} + \dfrac{2^2}{n^3+2^2} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^3+n^2}$ este

a) $x = 2$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = \frac{1}{3}$; d) $x = 0$; e) $x = \mathrm{e}$; f) $x = \infty$.

35. **(limite de funcţii)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x)$.

a) 1; b) 3; c) π; d) 2; e) $\frac{1}{\pi}$; f) $-\pi$.

36. **(limite de funcţii)** Să se determine numărul real c pentru care funcţia $f : (0, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2cx\ln(\mathrm{e}x) + c^2}, & x \in (0,1) \\ c + 3x, & x \in [1,2] \end{cases}$$

are limită în $x = 1$.

a) 3; b) -1; c) 1 şi 2; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) radicalul nu este definit pe (0,1).

37. **(continuitate)** Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 2 & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. Determinaţi mulţimea punctelor în care funcţia f este continuă.

a) $\{-\sqrt{2}, 0\}$; b) $\{-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$; c) $\{0, \sqrt{2}\}$; d) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$; e) $\{-\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}\}$; f) $\{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$.

38. **(funcţii trigonometrice)** Fie $E = \sin 15^o + \sin 75^o + \cos 105^o + \cos 165^o$. Atunci

a) $E = \frac{\sqrt{6}}{2}$; b) $E = \sqrt{6}$; c) $E = 2\sqrt{6}$; d) $E = 0$; e) $E = 4\sqrt{6}$; f) $E = 2$.

39. **(ecuaţii trigonometrice)** Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\dfrac{\sin^2 x - \mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x - \mathrm{ctg}^2 x} = \mathrm{tg}^6 x$ este

a) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$; c) $\emptyset$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$; f) $\left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

40. **(aplicaţiile trigonometriei în algebră)** Suma $S = \cos x + C_n^1 \cos 2x + C_n^2 \cos 3x + \cdots + C_n^n \cos(n+1)x$ este dată de

a) $S = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2}x$; b) $S = 2^n \sin^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2}x$; c) $S = 2^n \sin^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2}x$; d) $S = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}$; e) $S = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}$; f) afirmaţiile precedente sunt false.

Probleme propuse * Setul 5

41. **(determinanţi)** Fie ecuaţia $x^3 + px + q = 0$, având soluţiile x_1, x_2, x_3 şi determinantul

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Atunci valoarea lui Δ^2 este
a) $p^3 + q^3$; b) 0; c) $-p^2 + 2q^3$; d) $4p^3 + 27q^2$; e) $27q^2$; f) $-4p^3 - 27q^2$.

42. **(structuri algebrice)** Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Se consideră $x * y = x^{\ln y}$, $x, y \in G$.
Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) legea $*$ nu este asociativă; b) legea $*$ este asociativă dar nu este comutativă; c) G nu este parte stabilă în raport cu legea $*$; d) $(G, *)$ este grup abelian; e) legea $*$ nu admite element neutru; f) există un singur element simetrizabil.

43. **(polinoame)** Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{Z}_3$ polinomul $\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$?
a) $a = \hat{1}$; b) $a = \hat{2}$; c) $a = \hat{0}$; d) $a \neq \hat{1}$; e) $a \neq \hat{2}$; f) $a \neq \hat{0}$.

44. **(şiruri)** Fie $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{[nx]}{n}$, $x \in (0, 1)$, unde $[nx]$ este partea întreagă a lui nx. Atunci
a) $\ell = 0$; b) $\ell = x$; c) $\ell = 1 - x$; d) $\ell = 1$; e) $\ell = \dfrac{x}{2}$; f) $\ell = x^2$.

45. **(continuitate)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa întâi; c) f nu are proprietatea lui Darboux; d) f are proprietatea lui Darboux; e) f este discontinuă într-un număr infinit de puncte; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

46. **(derivabilitate)** Găsiţi toate funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

a) e^x; b) ax; c) $\ln x$; d) $ax + b$; e) $\sin x$; f) $\cos x$.

47. **(derivabilitate)** Se consideră o funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi o funcţie derivabilă $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $x'(t) = f(x(t)) - 1$, $\forall t \in [0, \infty)$ şi $\ell = \lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ există şi este finită, iar $\lim\limits_{t \to \infty} x'(t) = 0$.
Să se calculeze $f(\ell)$.
a) 1; b) 0; c) -1; d) ∞; e) e; f) 2.

48. **(funcţii trigonometrice)** Fie $E = \sin\left(\arccos \dfrac{3}{5} + \arccos \dfrac{15}{17}\right)$. Atunci

a) $E = \frac{34}{35}$; b) $E = \frac{84}{85}$; c) $E = \frac{83}{85}$; d) $E = \frac{13}{85}$; e) $E = \frac{27}{85}$; f) $E = \frac{36}{85}$.

49. **(funcţii trigonometrice)** Fie $E = \dfrac{\cos a + \cos b}{2} - \cos \frac{a+b}{2}$. Atunci, pentru orice $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$, avem
a) $E \geq 0$; b) $E > 0$; c) $E \leq 0$; d) $E < 0$; e) $E = 0$; f) $E \in [0, 1]$.

50. **(ecuaţii trigonometrice)** Să se determine x dacă $\sin\left(\dfrac{\arccos x}{3}\right) = 1$.

a) ecuaţia nu are soluţie; b) -1; c) 0; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\cos 3$.

Probleme propuse * Setul 6

51. (**polinoame**) Care din următoarele propoziţii este adevărată ?

a) polinomul X^3-2 este reductibil peste $\mathbb{Q}$; b) un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă f nu are rădăcini reale; c) polinomul X^4+X^2+1 este reductibil peste $\mathbb{R}$; d) polinomul X^4+1 este ireductibil peste $\mathbb{R}$; e) dacă un polinom $g \in \mathbb{R}[X]$ este reductibil peste $\mathbb{R}$ atunci el are cel puţin o rădăcină reală; f) suma a două polinoame ireductibile peste $\mathbb{R}$ este polinom ireductibil peste $\mathbb{R}$.

52. (**polinoame**) Fie S suma coeficienţilor polinomului $\left(\sqrt{2}X-\sqrt{3}\right)^{10}$. Atunci

a) $S=\sqrt{2}^{10}$; b) $S=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{10}$; c) $S=\sqrt{2}^{10}\cdot\sqrt{3}^{10}$; d) $S=1$; e) $S=0$;
f) $S=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{10}$.

53. (**numere complexe**) Fie $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\varepsilon^2&\varepsilon&1\\\varepsilon&\varepsilon^2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, unde ε este o rădăcină cubică complexă a unităţii şi S suma modulelor elementelor matricei X pentru care $AX=B$. Atunci

a) $S=16$; b) $S=3$; c) $S=4$; d) $S=2+\sqrt{3}$; e) $S=1+\sqrt{3}$; f) $S=9$.

54. (**şiruri**) Restrângeţi expresia $t=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$.

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; f) 1.

55. (**continuitate**) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua; c) ± 1 sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi; d) f este continuă în trei puncte; e) f este continuă în $x=0$; f) toate afirmaţiile precedente sunt false.

56. (**derivabilitate**) Fie $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ şi $g(x)=2\arctan x, x\in\mathbb{R}$. Care dintre afirmaţiile următoare este adevărată ?

a) $f'(x)=g'(x)$, $\forall |x|\le 1$; b) $f'(x)=g'(x)$, $\forall |x|<1$;
c) $f'(x)=g'(x)$, $\forall |x|>1$; d) $f'(x)=g'(x)$, $\forall |x|\ge 1$;
e) $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$; f) $f'(x)=g'(x)$, $\forall |x|>-1$.

57. (**integrale definite**) Utilizând suma Riemann să se calculeze

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{2^2}+\sqrt[n]{2^3}+\cdots+\sqrt[n]{2^n}}{n}.$$

a) $I=\frac{3}{\ln 2}$; b) $I=\frac{2}{\ln 3}$; c) $I=\frac{1}{\ln 2}$; d) $I=\frac{2}{\ln 2}$; e) $I=\ln 2$; f) $I=2\ln 2$.

58. (**funcţii trigonometrice**) Dacă $\operatorname{tg} a=\frac{m}{n}$, atunci expresia $E=m\sin 2a+n\cos 2a$ are valoarea

a) n; b) n^2; c) $\frac{n}{m}$; d) $\frac{n+1}{m}$; e) $\frac{m+1}{n}$; f) $\frac{m+1}{n+1}$.

59. (**ecuaţii trigonometrice**) Pentru câte valori ale lui $m\in\mathbb{Q}$, ecuaţia $1+\sin^2 mx=\cos x$ are o singură soluţie ?

a) două; b) una; c) nici una; d) patru; e) o infinitate; f) şase.

60. (**aplicaţiile trigonometriei în geometrie**) În triunghiul ABC, unghiul B este obtuz ¸ $0<C<\dfrac{\pi}{4}$ si $b=2c$. Care din următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) $\hat{A}<2\hat{C}$; b) $\hat{A}<\hat{C}$; c) $\hat{B}=2\hat{C}$; d) $\hat{B}=3\hat{C}$; e) $\hat{A}=\hat{C}$; f) $\hat{A}=\hat{B}$.

Probleme propuse * Setul 7

61. (**determinanţi**) Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu elementele $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+1}, & 1 \le j \le i \le 3 \\ 0, & 1 \le i < j \le 3. \end{cases}$
Determinantul lui A are valoarea
a) $\frac{1}{24}$; b) 1; c) 2; d) $\frac{1}{12}$; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{1}{3}$.

62. (**sisteme liniare**) Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = BAB^{-1}$.
Să se determine matricea C^{20}.
a) $\begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20}-3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 3^{20}-2^{20} & 3^{20} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 2^{20} \\ 3^{20} & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

63. (**sisteme liniare**) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=c \\ ax+by+(a+b)z=0 \\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=0. \end{cases}$
Care afirmaţie este adevărată ?
a) Dacă $a=b$, atunci sistemul este compatibil pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
b) Dacă $a=0$ şi $b \neq 0$, atunci sistemul este compatibil pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
c) Dacă $a \neq b$, atunci sistemul este compatibil determinat, pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
d) Dacă $c \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
e) Dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
f) Dacă $a+b \neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat $\forall c \in \mathbb{R}$.

64. (**şiruri**) Fie $x_n = (\sqrt{2}+1)^n$. Pentru orice $n \ge 1$ există numere naturale a_n, b_n astfel încât $x_n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.
a) $\ell = 0$; b) nu există; c) $\ell = \sqrt{2}$; d) $\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\ell = \infty$; f) $\ell = -\sqrt{2}$.

65. (**limite**) Fie $\ell = \lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)^2 f(x) - \lim\limits_{x\searrow 1} f(x)$, unde $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, iar $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f_n(x) = \begin{cases} 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}, & x \le 1 \\ e^{n(1-x)}, & x > 1 \end{cases}$. Atunci ℓ este
a) 0; b) -1; c) 1; d) ∞; e) nu există; f) $-\infty$.

66. (**derivabilitate**) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$
este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze $f^{(n)}(0)$ pentru $n \ge 1$.
a) 1; b) 0; c) e^{-1}; d)-1; e) $\ln 2$; f) $e + e^{-1}$.

67. (**primitive**) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi F o primitivă a sa. Dacă $F(x) \cdot f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, şi $F(0) = 1$, atunci $f(x)$ are expresia
a) $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$; c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$;
d) $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$; e) $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

68. (**funcţii trigonometrice**) Perioada principală T a funcţiei $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ este
a) $T = 2\pi$; b) $T = \pi$; c) $T = \frac{\pi}{2}$; d) $T = \frac{\pi}{3}$; e) $T = \frac{\pi}{4}$; f) $T = \frac{\pi}{6}$.

69. (**aplicţiile trigonometriei în algebră**) Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2+x+1=0$, să se determine pentru câte valori $n \in \mathbb{N}, n \le 10$, avem egalitatea $(x_1+1)^n + (x_2+1)^n = -1$.
a) 0; b) 2; c) 4; d) 10; e) 8; f) nu există astfel de valori.

70. (poliedre - volume) Un trunchi de piramidă regulată are bazele pătrate de laturi a şi b ($a > b$), iar înălţimea este h. Calculaţi înălţimea piramidei din care s-a format acest trunchi de piramidă.

a) $\dfrac{ah}{a-b}$; b) $\dfrac{b}{a}h$; c) $\dfrac{a}{b}h$; d) $\dfrac{ah}{a+b}$; e) $\dfrac{bh}{a+b}$; f) $\dfrac{bh}{a-b}$.