Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A-A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang} A\ge 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ și cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcție de p, q și r.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ și $abc<0$, atunci $a,b,c\in(-\infty,0)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

Examenul de bacalaureat 2009
Proba D_MT1
Probă scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

Subiecte 2009

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$z^6=2^6\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-2^6\Rightarrow \operatorname{Re}z^6=-64$	**3p**
2.	$f(512)=\frac{1}{8}$	**2p**
	$(f\circ f)(512)=f\left(\frac{1}{8}\right)=2$	**3p**
3.	Ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, cu soluțiile $\sin x=-\frac{1}{2}$ şi $\sin x=1$.	**3p**
	Obținem $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, sau $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.	**2p**
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M	**3p**
	Acesta este $C_6^3=20$.	**2p**
5.	Punctul $A(0,3)$ se află pe prima dreaptă.	**2p**
	Distanța este $d(A,d_2)=\frac{\lvert 2\cdot 0+4\cdot 3-11\rvert}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.	**3p**
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$	**3p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$	**1p**
	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1+2^2=5$	**1p**

SUBIECTUL II **30 de puncte**

1.a)	$\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c\\ a+b+c & a & b\\ a+b+c & c & a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c\\ 1 & a & b\\ 1 & c & a\end{vmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix} 1 & b & c\\ 1 & a & b\\ 1 & c & a\end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, de unde concluzia	**3p**
b)	Observăm că $x=0,\ y=1,\ z=0$ verifică sistemul.	**3p**
	Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	**2p**
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2=0\Leftrightarrow a=b=c$.	**2p**
	Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta,\ z=1-\alpha-\beta$.	**2p**

	Putem lua $\beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2+4\alpha-1\le 0$.	**1p**
2.a)	a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3=64$ matrice.	**3p** **2p**
b)	Luăm $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}$ $\det(A)=\hat{2},\ \det(A^2)=\hat{0}$	**3p** **2p**
c)	$X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}a^2 & b(a+c)\\ 0 & c^2\end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2=\hat{1}$, $b(a+c)=\hat{0}, c^2=\hat{0}$. Obținem $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}, c\in\{\hat{0},\hat{2}\}, b=\hat{0}$, deci există 4 soluții	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow m=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, deci avem asimptota oblică $y=x$.	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-1)$, deci f este concavă pe $(-\infty,-1)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^{\pi}\lvert\sin 2x\rvert dx=\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx$ $I=\frac{-\cos 2x}{2}\Big\vert_0^{\pi/2}+\frac{\cos 2x}{2}\Big\vert_{\pi/2}^{\pi}$ $I=2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx\le\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx$ $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln x\vert_{\pi}^{2\pi}=\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$ $I_n=\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt+\int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt+\ldots+\int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$ $I_n\ge\frac{1}{\pi(n+1)}\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\lvert\sin t\rvert dt+\frac{1}{\pi(n+2)}\int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi}\lvert\sin t\rvert dt+\ldots+\frac{1}{2n\pi}\int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi}\lvert\sin t\rvert dt$ Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\lvert\sin t\rvert dt=2, \forall k\in\mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	**1p** **2p** **1p** **1p**