

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30p)	
5p	1. Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.
5p	2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1} + 2^x = 12$.
5p	3. Să se determine numărul natural n , $n \geq 1$ știind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.
5p	4. Fie funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f .
5p	5. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O . Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.
5p	6. Să se calculeze $\sin 135^\circ$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine numerele a, b și c astfel încât $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p b) Să se arate că pentru $a = c = 0$ și $b = -1$ matricea A este inversa matricei F .

5p c) Să se rezolve ecuația $F \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.

5p a) Să se arate că $x * y = xy + (1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * (1-x) = 0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Știind că $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se calculeze I_0 .

5p b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5p c) Să se demonstreze că are loc relația $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.