

Matematika tantárgyverseny

Megyei szakasz

2008. március 1.

IX. OSZTÁLY

1. feladat. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozatra $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. A $(b_n)_{n \geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Bizonyítsd be, hogy $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. feladat. Adott az $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ halmaz. Bizonyítsd be, hogy az A halmaz akkor és csak akkor írható fel három olyan, páronként diszjunkt, egyenlő számosságú halmaz egyesítéseként, amelyekben az elemek összege ugyanannyi, ha az n szám többszöröse 3-nak!

3. feladat. Az $n \geq 4$ természetes szám esetén a $\left\lfloor \frac{2^n}{n} \right\rfloor$ szám 2-nek hatványa. Igazold, hogy az n szám is 2-nek hatványa!

4. feladat. Az $ABCD$ körbeírható négyszögben jelölje P az AD és BC egyenesek metszéspontját, Q pedig az AB és CD egyenesek metszéspontját. Legyen E az $ABCE$ paralelogramma negyedik csúcsa, valamint F a CE és PQ egyenesek metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy a D, E, F és Q pontok egy körön helyezkednek el!

Munkaidő: 3 óra.

Minden feladat kötelező!