

Matematika tantárgyverseny

Megyei szakasz

2008. március 1.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$. Bizonyítsd be, hogy létezik $c \in (0, 1)$ úgy, hogy $f(c) = \int_0^c f(x)dx$.

2. feladat. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és periodikus, periódusa T . Ha F a f egy primitív függvénye, igazold, hogy:

a) A $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G(x) = F(x) - \frac{x}{T} \int_0^T f(t)dt$$

függvény periodikus.

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{F(k)}{n^2 + k^2} = \frac{\ln \sqrt{2}}{T} \int_0^T f(x)dx.$$

3. feladat. Az A kommutatív gyűrű elemeinek száma páratlan. Az $x^2 = x$, $x \in A$ egyenletnek n megoldása van, és az A gyűrűben m invertálható elem van. Igazold, hogy n osztja az m -et!

4. feladat. Legyen K egy véges test. Azt mondjuk, hogy a $K[X]$ polinomgyűrű két, f és g polinomja *szomszédos*, ha azonos foksámúak, és csak egy együtthatójuk különbözik.

a) Igazold, hogy az $X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ polinom minden szomszédja reducibilis $\mathbb{Z}_3[X]$ -ben!

b) Ha K elemeinek száma $q \geq 4$, igazold, hogy a $K[X]$ polinomgyűrűben minden $q - 1$ -ed fokú polinomnak van olyan szomszédja is, amely reducibilis $K[X]$ -ben és olyan szomszédja is, amelynek nincs egy gyöke sem K -ban!

Munkaidő: 3 óra.

Minden feladat kötelező!