

Oktatási, Kutatási és Ifjúsági Minisztérium

**Matematika tantárgyverseny**

**Megyei szakasz**

**2008. március 1.**

**XI. OSZTÁLY**

**1. feladat.** Igazold, hogy az  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrix esetén

$$\det(A^2 + A + I_2) \geq \frac{3}{4}(1 - \det A)^2.$$

**2. feladat.** Az  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  mátrixok esetén bizonyítsd be, hogy  $\text{rang } A + \text{rang } B \leq n$  akkor és csak akkor, ha létezik egy  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  invertálható mátrix, amelyre  $AXB = O_n$ .

**3. feladat.** Az  $(x_n)_{n \geq 1}$  és  $(y_n)_{n \geq 1}$  szigorúan pozitív valós számsorozatok teljesítik az

$$x_{n+1} \geq \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} \geq \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}}.$$

egyenlőtlenségeket minden  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

a) Bizonyítsd be, hogy az  $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$  és  $(x_n y_n)_{n \geq 1}$  sorozatoknak van határértékük!

b) Bizonyítsd be, hogy az  $(x_n)_{n \geq 1}$  és  $(y_n)_{n \geq 1}$  sorozatoknak van határértékük, és határértékeik egyenlők!

**4. feladat.** Határozd meg azon  $a \in [0, \infty)$  számokat, amelyekre léteznek  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények úgy, hogy

$$f(f(x)) = (x - a)^2$$

minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén!

Munkaidő: 3 óra.

Minden feladat kötelező!