

Oktatási és Kutatási Minisztérium

Matematika tantárgyverseny

Megyei szakasz

2008. március 1.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Az a és b komplex számok esetén igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$|1 + ab| + |a + b| \geq \sqrt{|a^2 - 1| \cdot |b^2 - 1|}.$$

2. feladat. Határozd meg azokat az x egész számokat, amelyekre

$$\log_3(1 + 2^x) = \log_2(1 + x).$$

3. feladat. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény teljesíti a következő tulajdonságot:

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

a) Bizonyítsd be, hogy a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(0)$ függvény additív függvény, azaz $g(x+y) = g(x) + g(y)$, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Bizonyítsd be, hogy az f függvény állandó!

4. feladat. Legyen $n \geq 3$ egész szám és $z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Határozd meg az $A \cap B$ halmazt, ha

$$A = \{1, z, z^2, \dots, z^{n-1}\}$$

és

$$B = \{1, 1+z, 1+z+z^2, \dots, 1+z+\dots+z^{n-1}\}.$$

Munkaidő: 3 óra.

Minden feladat kötelező!