Miercuri, 15 iulie 2009

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi fie $a_1, \dots, a_k$ $(k \geq 2)$ numere naturale nenule distincte din mulţimea $\{1, \dots, n\}$ astfel încât n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$ pentru $i = 1, \dots, k-1$. Arătaţi că n nu divide $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi în care centrul cercului circumscris este O. Punctele P şi Q se află pe laturile CA, respectiv AB, în interiorul acestora. Fie K, L şi M mijloacele segmentelor BP, CQ, respectiv PQ, şi fie Γ cercul circumscris triunghiului KLM. Arătaţi că dacă dreapta PQ este tangentă cercului Γ, atunci $OP = OQ$.

Problema 3. Fie $s_1, s_2, s_3, \dots$ un şir strict crescător de numere naturale nenule, astfel încât subşirurile

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{şi} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

sunt ambele progresii aritmetice. Demonstraţi că şirul $s_1, s_2, s_3, \dots$ este el însuşi o progresie aritmetică.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Joi, 16 iulie 2009

Problema 4. Fie ABC un triunghi cu $AB = AC$. Bisectoarele unghiurilor $\angle CAB$ şi $\angle ABC$ taie laturile BC, respectiv CA în punctele D, respectiv E. Fie K centrul cercului înscris în triunghiul ADC. Se ştie că $\angle BEK = 45°$. Determinaţi toate valorile posibile pentru $\angle CAB$.

Problema 5. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, astfel încât, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$, numerele

$$a, \; f(b) \; \text{şi} \; f(b + f(a) - 1)$$

pot fi lungimile laturilor unui triunghi nedegenerat.

Problema 6. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere naturale nenule distincte şi fie M o mulţime formată din $n-1$ numere naturale nenule diferite de $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. O lăcustă sare către dreapta, în lungul axei reale, pornind din punctul 0, făcând n salturi cu lungimile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ într-o anumită ordine. Demonstraţi că lăcusta poate alege ordinea salturilor în aşa fel încât niciunul dintre punctele din M să nu fie atinse la capătul vreunui salt.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte