MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
Inspectoratul Şcolar Judeţean Satu Mare
CONCURS NAŢIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTRE/REZERVATE DIN ÎNVĂŢĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
15 iulie 2009
Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de patru ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Se consideră mulţimile

$$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} ; a, b, c \in N \right\}, \text{ si } K = \{ n \in N \mid n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc ; a, b, c \in N \}.$$

3p a) Calculaţi detA, $A \in M$;
3p b) Arătaţi că există o funcţie f: $M \to K$ astfel încât $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$;
3p c) Dacă $m, n \in K$, atunci $m \cdot n \in K$;
3p d) Există o matrice $E \in M$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a \cdot I_3 + b \cdot E + c \cdot E^2, \forall a, b, c \in N$, unde I_3 este matricea unitate de ordinul 3;
3p e) Dacă $n \in N$ şi $a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$; $b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots$; $c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$, să se arate că $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = 2^n$.

2. Fie triunghiul oarecare ABC, A', B', C' mijloacele laturilor (BC), (AC) şi respectiv (AB), D, E, F picioarele înălţimilor duse din vârfurile A, B, C ale triunghiului, H ortocentrul triunghiului şi A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor (AH), (BH) şi respectiv (CH).
5p a) Arătaţi că punctele A', B', C' şi D sunt conciclice;
5p b) Arătaţi că patrulaterul $A'B'A_1D$ este inscriptibil;
5p c) Să se arate că punctele A', B', C', D, E, F, A_1, B_1, C_1 sunt situate pe un cerc; determinaţi centrul şi raza acestuia;

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Se consideră polinomul $f = x^4 - 10x^2 + 1$, numărul $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C$ rădăcinile polinomului f.
3p a) Determinaţi valorile f(a) şi f(-a);
3p b) Arătaţi că f este ireductibil în Q[X];
3p c) Dacă $g \in Q[X]$ şi $g(a) = 0$, arătaţi că restul împărţirii lui g la f este egal cu zero;
3p d) Se consideră polinomul $h = \dfrac{x^2 - 5}{2}$. Rezolvaţi în R ecuaţia $h(x) = \sqrt{6}$;
3p e) Arătaţi că nu există nici un polinom $w \in Z[X]$ cu proprietatea $w(a) = \sqrt{6}$.

2. Se consideră funcţia: $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$ $x \in \mathbb{R}$, unde λ este un parametru real ne nul.
3p a) Pentru $\lambda = 1$ determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x=1.

3p b) Pentru λ=1 calculaţi $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$.

3p c) Arătaţi că funcţia este strict crescătoare pentru λ>1.

3p d) Să se arate că pentru λ ≥ 1, are loc inegalitatea : $e^{\lambda x} > 1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2$ oricare ar fi x > 0.

3p e) Pentru ce valori ale parametrilor λ şi μ ecuaţia

$$\mu\left(x^3 + \frac{2+3\sqrt{3}}{4}x + 1\right)f(x) = e^{\lambda x},$$

are ca rădăcini sinusurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL III (30 puncte)

10p 1. Pentru tema: "Rapoarte şi proporţii. Procente. ", formulaţi:

a) un item cu întrebări structurate
b) un item pereche
c) un item cu alegere multiplă
d) un item de completare
e) un item cu răspuns deschis

10p 2. Formulaţi cinci obiective operaţionale la tema "Şiruri. Progresii aritmetice şi progresii geometrice".

10p 3. Trataţi din punct de vedere metodic tema "Ecuaţii trigonometrice liniare asinx + bcosx = c, cu a, b, c numere reale." (prezentarea metodelor de rezolvare, exemple).