MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETĂRII SI INOVĂRII
Inspectoratul scolar al Judetului Maramures

CONCURS NATIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/ REZERVATE DIN ÎNVĂTĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

15 iulie 2009

Probă scrisă la matematică

Varianta 2

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu**
- **Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.**

Subiectul I (30 puncte)

a) Teoremele lui L'Hospital (enunturi, demonstrati una din teoreme).

b) Calculati: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$.

Subiectul II (30 puncte)

1.a) Pentru ce valori ale lui $n\in N$, numărul n^{n-2} se scrie ca un număr de $n-2$ cifre?

b) Să se determine numerele naturale n cu proprietatea că există numerele întregi a,b astfel încât $n^2=a+b$ si $n^3=a^2+b^2$.

c) Fie $a_0,a_1,\dots,a_{2010}$, coeficientii polinomului $(1+X+X^2)^{1005}$. Să se arate că $a_0+a_2+a_4+\dots+a_{2010}$ este număr natural par.

2. Fie $a\neq 0$ si $I:R-\{0\}\to R$, dată prin $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x+\sin^2 x}dx$.

a) Să se calculeze $I(1)$

$= a^2 + b^2$,

c) Fie $a_0, a_1, \ldots, a_{2010}$, coeficientii polinomului $(1+X+X^2)^{1005}$. Să se arate că $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2010}$ este număr natural par.

2. Fie $a \neq 0$ si $I : R - \{0\} \to R$, dată prin $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + \sin^2 x} dx$.

a) Să se calculeze $I(1)$.

b) Să se studieze continuitatea functiei I în punctele -1 si +1.

3. a) Să se demonstreze că intr-un triunghi ABC: $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geq 6$.

b) În triunghiul ABC, cevienele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în punctul M. Atunci: $\frac{AM}{MA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}$.

c) Două muchii opuse ale unui tetraedru sunt perpendiculare dacă si numai dacă înăltimile tetraedrului care pleacă din vârfurile uneia dintre muchiile respective sunt concurente.

Subiectul III (30 puncte)

1. Metode specifice de predare a matematicii – Metoda inductiei matematice.

2. Se consideră numărul real x astfel încât $x + \frac{1}{x} \in Z$. Să se demonstreze că $x^n + \frac{1}{x^n} \in Z, \forall n \in N$.

3. Fie poligonul convex $A_1A_2 \ldots A_n, n \geq 3$. Să se arate că numărul diagonalelor poligonului este egal cu: $\frac{n(n-3)}{2}$.