MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ŞI INOVĂRII
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Suceava

CONCURS NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE / CATEDRELOR DECLARATE VACANTE / REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
15 iulie 2009
Proba scrisă la Matematică

Varianta 1

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.

SUBIECTUL I (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine numărul real a, astfel încât $(I_2+A)(I_2+aA)=I_2$.

4p b) Să se arate că $\det(I_2+A^2)=1, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.

3p c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(I_2+A)^n=I_2+nA, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

3p d) Să se calculeze determinantul matricei $B=I_2+2A+3A^2+...+2005A^{2004}$.

2. Fie pătratul $ABCD$ de latură a şi un punct variabil M pe (BC). Notând cu E intersecția dintre dreptele DM şi AB iar cu F intersecția dintre dreptele AM şi CD

4p a) demonstrați că $\frac{BE}{EA}+\frac{CF}{FD}=1$.

3p b) demonstrați (folosind eventual punctul a)) că media geometrică a lungimilor bazelor trapezului $BEFC$ este egală cu lungimea laturii pătratului $ABCD$.

3p c) arătați că $S_{BEFC}\geq S_{ABCD}$, unde am notat cu S aria patrulaterului indicat.

3p d) determinați poziția punctului $M\in(BC)$ astfel încât aria trapezului $BEFC$ să fie minimă.

2p e) dacă M este mijlocul segmentului (BC) determinați raza cercului circumscris patrulaterului $AEFD$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție "$\circ$", definită prin $x\circ y=xy+ix+iy-1-i$.

4p a) Să se verifice identitatea $x\circ y=(x+i)(y+i)-i, \forall x,y\in\mathbb{C}$.

3p b) Să se arate că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z, \forall x,y,z\in\mathbb{C}$.

3p c) Să se calculeze $x\circ(-i)$.

3p d) Să se calculeze $(-100i)\circ(-99i)\circ...\circ(-i)\circ 0\circ i\circ(2i)\circ...(99i)\circ(100i)$.

2p e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $x_1\circ x_2\circ...\circ x_n=(x_1+i)(x_2+i)...(x_n+i)-i, \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x_1,...,x_n\in\mathbb{C}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$.

4p a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

3p b) Să se calculeze $f(e)$ şi $f'(e)$.

3p c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,e]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[e,\infty)$.

3p d) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

2p e) Să se arate că $n^{n+1} > (n+1)^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

SUBIECTUL III (30p)

Descrieți, la alegere, una dintre următoarele metode de învățământ: demonstrația, problematizarea, algoritmizarea, metoda lucrului cu manualul, prezentând:

5p a) definiția;
10p b) caracterizarea metodei;
15p c) un exemplu de utilizare a metodei la disciplina de concurs.