

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

ÚLOHA I (30b.)

- 5b.** 1. Určte reálnu časť komplexného čísla $(\sqrt{3} + i)^6$.
- 5b.** 2. Majme funkciu $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Vypočítajte $(f \circ f)(512)$.
- 5b.** 3. Na množine reálnych čísel vyriešte rovnicu $\cos 2x + \sin x = 0$.
- 5b.** 4. Majme množinu $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Určte počet trojíc (a, b, c) s vlastnosťou, že $a, b, c \in M$ i $a < b < c$.
- 5b.** 5. Vypočítajte vzdialenosť medzi rovnobežnými priamkami, ktorých rovnice sú $x + 2y = 6$ a $2x + 4y = 11$.
- 5b.** 6. Majme rovnobežník $ABCD$, v ktorom $AB = 1$, $BC = 2$ i $m(\sphericalangle BAD) = 60^\circ$. Vypočítajte skalárny súčin $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

ÚLOHA II (30b.)

1. Pre $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, považujeme sústavu
$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

5b. a) Dokážte, že determinant sústavy je $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

5b. b) Vyriešte sústavu v prípade keď je riešiteľná s práve jedným riešením.

5b. c) Vediac, že $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, dokážte, že sústava má nekonečne veľa riešení (x, y, z) , tak, aby $x^2 + y^2 = z - 1$.

2. Pvažujeme množinu $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.

5b. a) Určte počet prvkov množiny G .

5b. b) Dajte jeden príklad matice $A \in G$ s vlastnosťou, že $\det A \neq \hat{0}$ i $\det A^2 = \hat{0}$.

5b. c) Určte počet riešení rovnice $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, X \in G$.

ÚLOHA III (30b.)

1. Považujeme funkciu $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

5b. a) Určte rovnicu asymptoty grafu funkcie f k $+\infty$.

5b. b) Vypočítajte $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5b. c) Dokážte, že funkcia f je konkávna na intervale $(-\infty, -1)$.

2. Pre každé $n \in \mathbb{N}^*$ považujeme funkciu $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ i číslo $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

5b. a) Vypočítajte $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$.

5b. b) Ukážte, že $I_n \leq \ln 2$.

5b. c) Ukážte, že $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$.