EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**
- **Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra. Megjelenés 10 pont.**
- **Minden feladat teljes megoldását írd a vizsgalapra!**

I. FELADAT (30p)

5p **1.** Határozd meg a $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$ komplex szám valós részét!

5p **2.** Az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ függvény esetén számítsd ki az $(f\circ f)(512)$ értékét!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\cos 2x+\sin x=0$ egyenletet!

5p **4.** Adott az $M=\{0,1,2,3,4,5\}$ halmaz. Határozd meg azon (a,b,c) számhármasok számát, amelyekre $a,b,c\in M$ és $a<b<c$.

5p **5.** Számítsd ki az $x+2y=6$ és $2x+4y=11$ egyenletű párhuzamos egyenesek közötti távolságot!

5p **6.** Az $ABCD$ paralelogrammában $AB=1$, $BC=2$ és $m\left(\sphericalangle BAD\right)=60^\circ$. Számítsd ki az $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ skaláris szorzatot!

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Az $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ számok esetén adott az $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$ egyenletrendszer, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Igazold, hogy a rendszer determinánsának értéke $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Oldd meg a rendszert abban az esetben, ha az kompatibilis és határozott!

5p **c)** Ha $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, igazold, hogy a rendszernek végtelen sok olyan (x, y, z) megoldása van, amelyre $x^2+y^2=z-1$.

2. Adott a $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ halmaz.

5p **a)** Határozd meg a G halmaz elemeinek számát!

5p **b)** Határozz meg egy olyan $A \in G$ mátrixot, amelyre teljesül, hogy $\det(A) \neq \hat{0}$ és $\det(A^2) = \hat{0}$.

5p **c)** Határozd meg az $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$ egyenlet megoldásainak számát!

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Határozd meg a függvény grafikus képének aszimptotáját a $+\infty$ -ben!

5p **b)** Számítsd ki: $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(-\infty,-1)$ intervallumon!

2. Tetszőleges $n\in\mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=|\sin nx|$ függvényt és az $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$ számot.

5p **a)** Számítsd ki az $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$ értékét!

5p **b)** Igazold, hogy: $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Mutasd ki, hogy: $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$.