

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

	ЗАВДАННЯ І (306)
56	1. Визначити дійсну частину комплексного числа $(\sqrt{3} + i)^6$.
56	2. Задана функція $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Обчислити $(f \circ f)(512)$.
56	3. Розв'язати у множині дійсних чисел рівняння $\cos 2x + \sin x = 0$.
56	4. Задано множину $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Визначити кількість трійок (a, b, c) які задовільняють умови $a, b, c \in M$ і $a < b < c$.
56	5. Обчислити відстань між паралельними прямими, заданими рівняннями $x + 2y = 6$ і $2x + 4y = 11$.
56	6. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB = 1$, $BC = 2$ і $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Обчислити скалярний добуток $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

ЗАВДАННЯ II (306)

1. Для $a, b, c \in \mathbb{R}$ дано систему
$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}$$

56 а) Доказати, що визначником системи є $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

56 б) Розв'язати систему, якщо вона сумісно визначена.

56 в) Якщо $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$ доказати, що система має нескінчену кількість розв'язків (x, y, z) , так щоб $x^2 + y^2 = z - 1$.

2. Дано множину $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.

56 а) Визначити число елементів множини G .

56 б) Навести приклад матриці $A \in G$ з властивістю, що $\det A \neq \hat{0}$ і $\det A^2 = \hat{0}$.

56 в) Визначити скільки коренів має рівняння $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

ЗАВДАННЯ ІІІ (306)

1. Дано функцію $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

56 а) Визначити рівняння асимптоти, прямоючої до $+\infty$, графіка функції f .

56 б) Обчислити $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

56 в) Доказати, що функція f – увігнута на інтервалі $(-\infty, -1)$.

2. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}^*$ дано функцію $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ і число $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

56 а) Обчислити $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$

56 б) Доказати, що $I_n \leq \ln 2$.

56 в) Доказати, що $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$