

CONCURSUL Trepte în matematică „Memorialul Vasile Bușagă”

Ediția aVI-a, 24 ianuarie 2009

Clasa a XII-a (M2)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Timp efectiv de lucru: 3h.

SUBIECTE:

(25p) I. Pe \mathbf{Z} se definește legea de compoziție “*” prin : $x*y = axy + b(x+y) + 12$, unde $a, b \in \mathbf{Z}^*$.

- a) Găsiți relația dintre a și b astfel încât legea să fie asociativă.
- b) Dacă $a=1$ și $b=4$ găsiți elementul neutru al legii.
- c) Dacă $a=1$ și $b=4$ găsiți toate elementele simetrizabile.
- d) Dacă $a=4$ și $b=1$, rezolvați ecuația $x*(x*0)=30x$.

Prof. Smarandache Valentin și Cristina

(25p) II. Fie $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ și $f(x) = f_{2009}(x) - f_{2008}(x)$.

- a) Arătați că $f'_n(x) = f_{n-1}(x)$ și $f_n(x) - f_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n!}$ (\forall) $x \in \mathbf{R}$.
- b) Calculați $\int_{-1}^0 \frac{x^{2009}}{2009!} dx$.
- c) Găsiți o primitivă a funcției $f(x)$ care se anulează în punctul $x = -1$.
- d) Calculați $\int \frac{x^n}{e^x + f_n(x)} dx$.

Prof. Smeureanu Florian

Prof. Buican Cristian

(20p) III. Pe \mathbf{R} se consideră legea de compoziție $x*y = 2009x + 2009y + xy$.

- a) Arătați că legea dată nu este asociativă.
- b) Rezolvați ecuația $x*x = (-2009)*0$.
- c) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ pentru care $a*b \in \mathbf{Z}$.
- d) Verificați că $x*y = (2009+x)(2009+y) - 4036081$.

Prof. Smarandache Valentin și Cristina

(20p) IV. Se dă funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x}(2x^2 - x + 1)$.

- a) Găsiți $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $F(x) = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$ să fie o primitivă a funcției f .
- b) Calculați $\int \frac{f(x) - e^{-x}}{x} dx$.
- c) Găsiți $\int_0^1 f(x) \cdot e^x dx$.
- d) Calculați $\int f^2(x) \cdot e^{2x} dx$.

Prof. Smarandache Valentin și Cristina