

CONCURSUL Trepte în matematică „Memorialul Vasile Bușagă”

Ediția aVI-a, 24 ianuarie 2009

Clasa a IX-a (M1)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Timp efectiv de lucru: 3h.

SUBIECTE:

(25p) I. a) Să se arate că pentru $(\forall)x \in \mathbf{R}$, avem că $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{3}\right\} + \left\{x + \frac{2}{3}\right\} - \{3x\}$ este număr natural.

b) Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x + 2009}{2}\right] = |x| + 1000$.

Prof. Smarandache Valentin și Cristina

(20p) II. Fie mulțimea $M = \{p \in \mathbf{Z} \mid 9^{n+1} - 8 + p \text{ se divide cu } 4, (\forall) n \in \mathbf{N}^*\}$.

a) Arătați că mulțimea M este infinită.

b) Dovediți că există o mulțime P -infinită, $P \subset M \cap \mathbf{N}$, astfel încât $(\forall) p \in P$, p se divide cu 5.

Prof. Florian Pană

(20p) III. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_1 = 4$, $a_k = 2009$, $k > 6$ și rația $r \in \mathbf{N}^*$. Notăm $S_m = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{N}^*$, a - minim, astfel încât $aS_{3n} - bS_{2n} + cS_n = 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

b) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ conține o infinitate de termeni în progresie geometrică cu rația $q \in \mathbf{N}^*$.

Prof. Florian Pană

(25p) IV. Se dau triunghiurile ABC și $A'B'C'$ care au același centru de greutate G .

a) Să se arate că se poate forma un triunghi cu laturile de lungimi AA' , BB' , CC' .

b) Dacă punctele A'' , B'' , C'' împart segmentele $[AA']$, $[BB']$ respectiv $[CC']$ în același raport, să se arate că punctul G este centru de greutate și al triunghiului $A''B''C''$.

* * *