

CONCURSUL Trepte în matematică „Memorialul Vasile Bușagă”

Ediția aVI-a, 24 ianuarie 2009

Clasa a XI-a (M1)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Timp efectiv de lucru: 3h.

SUBIECTE:

(25p) I. Găsiți șirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n \geq 1}$ ce satisface relația

$x_{n+1} = \sqrt{8 - x_n^2}, n \geq 1$ cu proprietatea că al 2009-lea termen al șirului reprezintă media

geometrică a primilor doi termeni ai șirului și apoi calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x_n} \right)^{\sqrt{n-n}}$.

Prof. Smarandache Valentin și Cristina

(20p) II. Determinați matricele $A \in M_2(\mathbf{Z})$, $A(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ știind că $a + d = b + c = 2k$,

$k \in \mathbf{Z}$ și $\det A$ este pătrat perfect nenul.

Prof. Pană Florian

(20p) III. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}$,

$b_n = 3b_{n-1} - 2^{n-1}, (\forall) n \in \mathbf{N}$, cu $a_1 = 1$ și $b_1 = 5, n \geq 2$.

a) Calculați termenii generali a_n și b_n .

b) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n + 4^n}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2}$.

Prof. Pană Florian

(25p) IV. Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $\det A(x)$.

b) Să se găsească $A^n(x), n \in \mathbf{N}^*$.

c) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^{2009}(x) = I_2$.

d) Să se arate că $A^{2008}(x) + A^{2008}(y)$ este inversabilă, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}^*$.

Prof. Birzescu Catalin