

CONCURSUL Trepte în matematică „Memorialul Vasile Bușagă”
Ediția aVI-a, 24 ianuarie 2009
Clasa a X-a (M1)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Timp efectiv de lucru: 3h.

SUBIECTE:

(25p) I. Se consideră numerele complexe: $z_1 = x^2 + k + (k+1)i$, $z_2 = y^2 + k + 1 + (k+2)i$, $z_3 = z^2 + k + 2 + (k+3)i$ unde $x, y, z \in \mathbf{R}^*$, $xy + yz + zx = 3$ și $k \in \mathbf{N}^*$.

- a) Arătați că $|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq 3\sqrt{2}(k+2)$;
- b) Aflați x, y, z și k , dacă $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 9\sqrt{2}$.

Prof. Florian Pană

(20p) II. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care satisface relația:

$$2f(1-x+x^2) - f(2+x-x^2) = 6x^2 - 6x + 1, (\forall) x \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

- a) Arătați că dacă substituim " x " cu " $1-x$ " relația se conservă și că $1, f(1)$, și $f(2)$ sunt în progresie aritmetică;
- b) Calculați $f\left(\frac{3}{2}\right)$;
- c) Determinați funcția f care îndeplinește condiția dată în relația (1).

Prof. Florian Pană

(20p) III. a) Fie $a = 1,1^{10}$, $b = 1,1^{11}$. Să se compare numerele a^b și b^a .

b) Calculați partea întreagă a numărului: $\log_3 11 + \log_{11} 81$.

Prof. Dobre Dumitru
Prof. Diaconescu Carmen

(25p) IV. Se da funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $3f(x) + 7 = 5f([x]) + 5f(\{x\}) + 4x$ unde

$[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x , iar $\{x\}$ partea fracționară a lui x .

- a) Determinați funcția f .
- b) Arătați că funcția f este bijectivă și determinați inversa sa.

Prof. Smarandache Valentin și Cristina