

**CONCURSUL NAȚIONAL “LA ȘCOALA CU CEAS”**  
**27 MARTIE 2009 ----- BAREM**  
**CLASA a III- a**

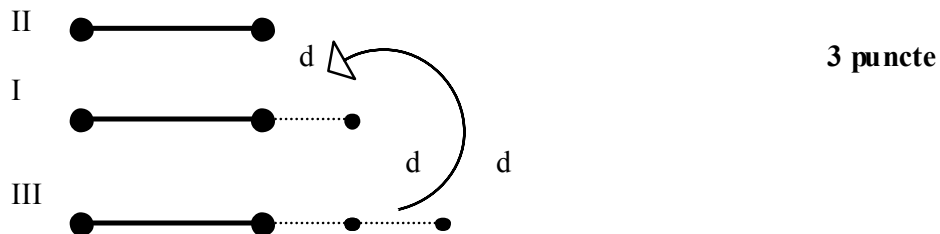
**Subiectul 1**

$11 + 13 + 15 + 17 = 56$	<b>1,75 puncte</b>
$13 + 15 + 17 + 19 = 64$	<b>1,75 puncte</b>
$15 + 17 + 19 + 21 = 72$	<b>1,75 puncte</b>
$17 + 19 + 21 + 23 = 80$	<b>1,75 puncte</b>

**Subiectul 2**

Notăm cu „d” diferența.

Reprezentăm grafic cele trei numere:



Se observă că, dacă adăugăm celui de-al doilea număr diferența dintre numărul al treilea și primul număr, se obțin trei numere egale cu primul număr, a căror sumă este :

**3 puncte**

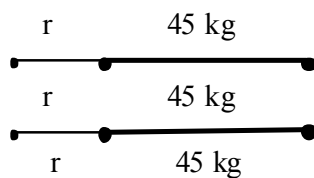
$$8 \times 3 = 24$$

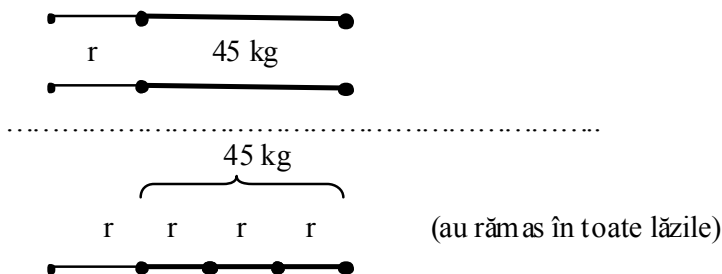
**1 punct**

**Subiectul 3**

Rezolvare aritmetică:

Reprezentăm grafic :





$$3r = 45 \text{ kg}$$

(1p)

$$r = 45 \text{ kg} : 3$$

(0,5p)

$$r = 15 \text{ kg}$$

(0,5p)

$$15 \text{ kg} + 45 \text{ kg} = 60 \text{ kg} \text{ (erau în fiecare ladă la început)}$$

(0,5p)

$$60 \text{ kg} \cdot 4 = 240 \text{ kg} \text{ (erau la început în total în cele 4 lăzi)}$$

(0,5p)

**Notă :** Se punctează cu 7 puncte și soluția algebrică.

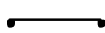
#### **Subiectul 4**

Ca produsul  $(a \times b)$  să rămână neschimbat când factorul „b” se mărește de 4 ori este necesar ca celălalt factor, „a”, să se micșoreze de același număr de ori. Deci, micșorându-se cu 9, „a” s-a micșorat de 4 ori.

(4p)

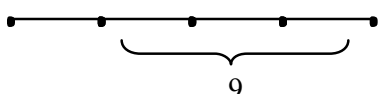
*Reprezentăm grafic:*

a („a” după ce a fost micșorat de 4 ori)



(2p)

a



(„a” – înainte de a fi micșorat)

La început :  $a = (9 : 3) \cdot 4$

$$a = 12$$

(0,5p)

$$12 \cdot b = 96$$

deci produsul este de 12 ori mai mare decât „b”

(0,5p)

### **CLASA a IV- a**

#### **Barem:**

**1.**

$$3 : 3 + 3 - 3 = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$(3+3+3) : 3 = 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$3 + 3 - 3 : 3 = 5 \dots\dots\dots 1p$$

$$3 \cdot 3 + 3 : 3 = 10 \dots\dots\dots 1p$$

$$(3+3) \cdot 3 - 3 = 15 \dots\dots\dots 1p$$

$$(3 + 3 + 3) \cdot 3 = 27 \dots\dots\dots 1p$$

$$(3 \cdot 3 + 3) \cdot 3 = 36 \dots\dots\dots 1p$$

Orice alta rezolvare corecta se puncteaza corespunzator.

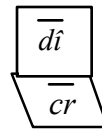
**2.**

a)  $\overline{MATE} = 1023$  .....2p

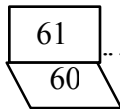
b)  $\overline{ISTET} = 76985$  .....2p

c) Pentru primele 3 cărți, observăm următoarea corespondență:

evident  $d = i \cdot c + r$  .....2p



deci .....1p



3.

a)  $2 \cdot 9 \cdot g = g \cdot 6 \cdot c \Rightarrow c = 3$  .....1p

b)  $9g + 2i = 144$

$2 \cdot 9 \cdot g = 2 \cdot 6 \cdot i \Rightarrow 3g = 2i$  .....1p

$12g = 144 \Rightarrow g = 12$  .....1p

$i = 18$  .....1p

$h = 1$  .....1p

$f = 4$  .....1p

$b = 36$  .....1p

4.

Fie A, B și C cele trei vase.

$p_1$  Turnăm jumătate din A, în mod egal în B și C.

$p_2$  Turnăm jumătate din B, în mod egal, în A și C.

$p_3$  Turnăm jumătate din C, în mod egal, în A și B.

$p_4$  În A, B și C se află 60 l, 36 l și respectiv 40 l de apă. ....1p

**Aplicăm metoda mersului invers:**

Din C s-au turnat în A și B 40 l de apă în mod egal.

Deci la  $p_3$  aveam 40 l, 16 l, respectiv 80 l. ....2p

Din B s-au turnat în A și C 16 l de apă în mod egal.

Atunci la  $p_2$  aveam 32 l, 32 l, respectiv 72 l. ....2p

Din A s-au turnat în B și C 32 l de apă în mod egal.

Atunci la  $p_1$  aveam 64 l, 16 l, respectiv 56 l. ....2p

Se pot da și alte rezolvări apelând la ajutorul algebrei.

**Pasul I:** Fie A, B și C cele trei vase.

Fie  $4a$ ,  $b$  și  $c$  cantitatea de apă ce se află în primul, al doilea și respectiv al treilea vas.

**Pasul al II-lea:**

$p_1$  Turnăm jumătate din A, în mod egal în B și C. În A rămân  $2a$  litri de apă, iar în B și C sunt acum  $b + a$  și respectiv  $c + a$  litri de apă.

$p_2$  Notăm  $b + a = 4x$ .

Turnăm jumătate din B, în mod egal, în A și C. În B rămân  $2x$  litri de apă, iar în A și C sunt acum  $2a + x$  și respectiv  $c + a + x$  litri de apă.

$p_3$  Notăm  $c + a + x = 4y$ .

Turnăm jumătate din C, în mod egal, în A și B. În C rămân  $2y$  litri de apă, iar în A și B sunt acum  $2a + x + y$  și respectiv  $2x + y$  litri de apă.

$p_4$  În A, B și C se află 60 l, 36 l și respectiv 40 l de apă

( $p_4$  e rezolvată din enunț.)

În acest caz, prezentarea celui de-al doilea pas, în tabel, e mai utilă.

	A	B	C
inițial	$4a$	$b$	$c$
$p_1$	$2a$	$b + a = 4x$	$c + a$
$p_2$	$2a + x$	$2x$	$c + a + x = 4y$
$p_3$	$2a + x + y$	$2x + y$	$2y$
$p_4$	60 litri	36 litri	40 litri

### Pasul al III-lea:

➤ Din  $p_3$  și  $p_4$  deducem egalitățile:

$$2y = 40; \quad 2x + y = 36 \quad \text{și} \quad 2a + x + y = 60.$$

Rezolvând succesiv, obținem:

$$y = 20; \quad 2x + 20 = 36 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8;$$

$$2a + 8 + 20 = 60 \Rightarrow 2a = 32 \Rightarrow a = 16 \Rightarrow 4a = 64.$$

➤ Înlocuind în  $c + a + x = 4y$ , relația dată de  $p_2$ , obținem  $c + 16 + 8 = 4 \cdot 20 \Rightarrow c + 24 = 80 \Rightarrow c = 56$ .

➤ Înlocuind în relația  $b + a = 4x$ , dată de  $p_1$  obținem  $b + 16 = 4 \cdot 8 \Rightarrow b + 16 = 32 \Rightarrow b = 16$ .

### Pasul al IV-lea:

Conform notațiilor făcute la pasul I, în A, B și C se aflau inițial 64 l, 16 l și respectiv 56 l de apă.

## CLASA a V-a

### Problema 1

#### Soluție

$$p = \overline{abcd}, q = \overline{xyz}, D = C \cdot \hat{I} + R, R < \hat{I}$$

1p

$$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot C + R; \quad R = C^5; \quad \overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot C + C^5 \Rightarrow C \neq 0 \text{ și } C^5 < \overline{xyz} \leq 999 < 1024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$$

1p

$$C^5 < 4^5 \text{ și } C \neq 0 \Rightarrow C \in \{1, 2, 3\}$$

0,5p

$$1) \quad C = 1$$

$$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot 1 + 1^5 = \overline{xyz} + 1 \Rightarrow \overline{xyz} + 1 \geq 1000 \mid -1 \Rightarrow \overline{xyz} \geq 999$$

Cum  $x \leq 999 \Rightarrow \overline{xyz} = 999 \Rightarrow q = 999$  și  $p = 1000 \Rightarrow (p, q) = (999, 1000)$  **1** pereche CEAS

**1p**

2)  $C = 2$

$$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot 2 + 2^5 = \overline{xyz} \cdot 2 + 32$$

$$1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Leftrightarrow 1000 \leq \overline{xyz} \cdot 2 + 32 \leq 9999 \mid -32 \Leftrightarrow 968 \leq 2 \cdot \overline{xyz} \leq 9967 \mid :2 \Rightarrow$$

$$\overline{xyz} \in \{484, 485, \dots, 999\} \Rightarrow (999 - 483) = 516 \Rightarrow 516 \text{ numere } q = \overline{xyz} \Rightarrow \mathbf{516} \text{ perechi } (p, q) \text{ CEAS } \mathbf{1,5p}$$

3)  $C = 3$

$$\overline{abcd} = \overline{xyz} \cdot 3 + 3^5 = \overline{xyz} \cdot 3 + 243$$

$$1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Leftrightarrow 1000 \leq \overline{xyz} \cdot 3 + 243 \leq 9999 \mid -243 \Leftrightarrow 757 \leq 3 \cdot \overline{xyz} \leq 9756 \mid :3 \Rightarrow$$

$$\overline{xyz} \in \{253, 254, \dots, 999\} \Rightarrow (999 - 252) = 747 \text{ numere } q = \overline{xyz} \Rightarrow \mathbf{747} \text{ perechi } (p, q) \text{ CEAS } \mathbf{1,5p}$$

Deci numărul perechilor  $(p, q)$  CEAS este:  $1 + 516 + 747 = 1264$  **0,5p**

## Problema 2

a)  $a = (1 + 2 + 3 + \dots + 213) - (2 + 4 + \dots + 212) = 213 \cdot 214 : 2 - 2 \cdot 106 \cdot 107 : 2 =$   
 $213 \cdot 107 - 106 \cdot 107 = 107^2 \dots \dots \dots 2p$

b)  $a^{2009} = 107^{4018} \dots \dots \dots 1p$

$$ZV(107) = 07$$

$$ZV(107^2) = 49$$

$$ZV(107^3) = 43$$

$$ZV(107^4) = 01 \dots \dots \dots 2p$$

Cum  $4018 = 4 \cdot 1003 + 2$  avem  $ZV(107^{4018}) = 49 \dots \dots \dots 1p$

Deci cifra zecilor a numărului  $a^{2009}$  este 4  $\dots \dots \dots 1p$

## Problema 3

Ceasul sună timp de **4 ore** de la 20:00 până la 24:00  $\dots \dots \dots 2p$

Ceasul sună **câte o oră** când afișează 02:xy; 12:xy .....2p

Ceasul sună **câte 15 minute** când afișează 00:xy, 01:xy, 03:xy, ..., 09:xy, 10:xy, 11:xy; 13:xy; 14:xy; 15:xy, 16:xy; 17:xy; 18:xy și respectiv 19:xy. ....2p

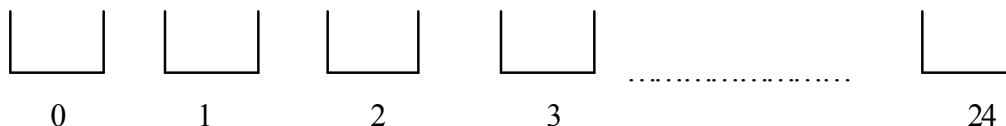
Concertul dura 10 ore și 30 de minute. ....1p

#### Problema 4

a) Sunt posibile 8 punctaje: 0, 1, 2, ..., 7 ..... 2p

Aplicand principiul cutiei exista cel puțin 4 elevi cu același punctaj ..... 2p

b) Ne imaginăm 25 cutii corespunzătoare numărului de prieteni pe care-i poate avea un elev.



Dacă există un elev care nu are niciun prieten, automat nu e nici un elev cu 24 de prieteni .....1p

Dacă există un elev care are 24 prieteni, atunci nu există elevi cu zero prieteni .....1p

Aplicand principiul cutiei pentru 25 de elevi și 24 de posibilități, deducem că există 2 elevi cu același număr de prieteni. .... 1p

#### CLASA a VI-a

##### Problem a 1

a) Notăm prețurile obiectelor cu  $a$ ,  $b$ , respectiv  $c$ .

Din  $\{a, b\}$  d.p.  $\{3; 5\} \Rightarrow a = 3k$   
 $b = 5k$  ..... 0,5 p

Din  $\{b, c\}$  i.p.  $\{3; 4\} \Rightarrow 3b = 4c$  ..... 0,5 p

$\Rightarrow c = 3,75k$  și  $a < c < b \Rightarrow A, C, B$  ..... 1 p

b)  $42/100 \cdot b + (100+x)/100 \cdot a = 2c$  ..... 1 p

$$42/100 \cdot 5k + (100+x)/100 \cdot 3k = 7,5k \Rightarrow x = 80$$

Obiectul trebuie scumpit cu 80% ..... 1 p

c) După modificări, prețurile sunt :

$$a' = 540k/100; b' = 210k/100; c = 375k/100 \Rightarrow b' < c < a' \dots\dots\dots 0,5 p$$

$b'$  este cel mai mic număr natural cu 4 divizori  $\Rightarrow b' = 6$  ..... 1 p

$$k = 20/7 \dots\dots\dots 0,5 p$$

Obținem  $a = 60/7$  lei,  $b = 100/7$  lei și  $c = 75/7$  lei ..... 1 p

##### Problem a 2

- a)  $\triangle ABD \cong \triangle CAE$  (C.C.)  $\Rightarrow AE = BD$  .....2p
- b)  $\angle B \cong \angle EAC$  și cum  $m(\angle B) + m(\angle D) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle D) + m(\angle EAC) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle I) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle DBE) + m(\angle AEB) = 90^\circ$  .....3p
- c) Demonstrăm prin reducere la absurd  
Presupunem ca  $m(\angle DBE) \cong m(\angle AEB) = 45^\circ \Rightarrow IB = IE$ , dar  $DB = AE \Rightarrow ID = IA \Rightarrow m(\angle D) \cong m(\angle IAD) \Rightarrow AC = CE = AD \Rightarrow D \equiv C$  (fals deoarece  $D \in (AC)$ ) .....2p

### Problem a 3

Pentru  $p$  – prim,  $p > 3 \Rightarrow p^2 - 1 = M_{24}$  (1) .....3p

Cum  $p$  – prim  $\Rightarrow p \in \{M_{24}+1, M_{24}+5, M_{24}+7, M_{24}+11, M_{24}+13, M_{24}+17, M_{24}+19, M_{24}+23\}$

Dacă  $p = M_{24}+1 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24} + 1)^2 - 1 = M_{24}$   
 $p = M_{24}+5 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24} + 5)^2 - 1 = M_{24} + 25 - 1 = M_{24}$   
 $p = M_{24}+7 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24} + 7)^2 - 1 = M_{24} + 49 - 1 = M_{24}$   
 $p = M_{24}+11 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24} + 11)^2 - 1 = M_{24} + 120 = M_{24}$   
.....  
 $p = M_{24}+23 \Rightarrow p^2 - 1 = (M_{24} + 23)^2 - 1 = M_{24} + 528 = M_{24}$

$$(1) \Rightarrow \frac{p^2-1}{24} = m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Dar } \frac{k+p^2}{24} = \frac{k+1+p^2-1}{24} = \frac{k+1}{24} + \frac{p^2-1}{24} = \frac{k+1}{24} + m \text{ ..... 1p}$$

$$\Rightarrow \frac{k+p^2}{24} = \frac{k+1}{24} + m \in \mathbb{N} \text{ dacă } (k+1) \equiv 0 \pmod{24} \text{ (2) ..... 1p}$$

Cum  $1 < k+1 < 2010$ ,  $2010 = 24 \cdot 83 + 18$  și din (2)  $\Rightarrow k+1 \in \{24t \mid t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq 83\}$  .....1p

Deci  $\text{Card } A_p \cap \mathbb{N} = 83$  .....1p

### Problema 4

- b) La o operație pierdem 2 numere  
Dar  $2009 = 2 \cdot 1003 + 3$ . Asadar sunt efectuate 1004 operații ..... 2p

- a) La o operație se poate întâmpla să ștergem:

$(p, p, p) \Rightarrow p+p+p = p \Rightarrow$  numărul de numere impare ramane același  
 $(p, p, i) \Rightarrow p+p+i = I \Rightarrow$  numărul de numere impare ramane același  
 $(p, i, i) \Rightarrow p+i+i = p \Rightarrow$  pierdem 2 numere impare  
 $(i, i, i) \Rightarrow i+i+i = i \Rightarrow$  pierdem 2 numere impare ..... 2p

Deci numărul de numere impare când scade, scade cu „2” adică nu-și schimbă paritatea .....1p

Dar în sirul 1, 2, 3, ..., 2009 avem 1005 numere impare .....1p

Astfel, după 1004 operații ultimul număr rămas este impar. (dacă ar fi par, am avea 0 numere impare (fals) pentru că numărul de impare este mereu impar) ..... 1p

### Clasa a VII-a

#### Problemă 1

Cum  $\frac{a_1+100}{n_1+2} = \frac{a_2+100}{n_2+2} \Leftrightarrow n_1 = n_2$ ,  $\text{card} M_a$  este egal cu numărul de numere naturale  $n$  pentru care  $n+2 \mid a_n+100$  ..... 2p

Avem  $n+2 \mid a_n+100 \Leftrightarrow n+2 \mid (a_n+2a)-(a_n+100) \Leftrightarrow n+2 \mid 2a-100 \Leftrightarrow n+2 \in D_{2a-100} \cap [2, \infty)$  ..... 1p

Atunci  $\text{Card} M_a$  este minim dacă  $|2a-100|$  este prim ..... 1p

Cum  $2a-100 = 2(a-50)$ ,  $\text{Card} M_a$  este minim pentru  $a \in \{49, 51\}$  ..... 1p

Atunci  $2a-100 = \pm 1$  și  $n+2 = 2 \Leftrightarrow n = 0$  ..... 1p

Deci  $M_a = \{50\}$ , mulțime cu un singur element ..... 1p

#### Problemă 2

Notând cu  $x, y$  lungimile catetelor și cu  $z$  lungimea ipotenuzei triunghiului avem că  $x^2 + y^2 = z^2$  (\*). ..... 1p

Cum  $x^2, y^2, z^2 \in \{M_4, M_4+1\}$ , conform (\*) avem  $x:2$  sau  $y:2$  ..... 1,5p

Cum  $x^2, y^2, z^2 \in \{M_3, M_3+1\}$ , conform (\*) avem  $x:3$  sau  $y:3$  ..... 1,5p

Concluzie:  $xy:6$  ..... 1p

Aria triunghiului dreptunghic este  $A = \frac{xy}{2} = 2008 \Rightarrow xy = 4016$  ..... 1p

Cum 6 nu e divizor al lui 4016 obținem că nu există niciun triunghi care să respecte cerințele problemei ..... 1p

#### Problemă 3

Dacă punctele  $O_1, O_2, O_3$  mijloacele segmentelor  $[BC], [AC], [AB] \Rightarrow$  punctele  $A', B', C'$  sunt simetricele lui  $P$  față de  $O_1, O_2$  respectiv  $O_3$ . ..... 1p

Cum  $O_2O_3$  linie mijlocie în  $\triangle PB'C' \Rightarrow B'C' = 2 O_1O_2$

Cum  $O_2O_3$  linie mijlocie în  $\triangle ABC \Rightarrow BC = 2 O_1O_2$  ..... 1p

Deci  $B'C' = BC$ ; analog  $AB = A'B'$  și  $AC = A'C'$  ..... 1p



Conform cazului L.L.L.  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$  ..... 1p

Cum  $AB' \parallel PC$  si  $AB' = PC$  si  $(PC \parallel BA' \text{ si } PC = BA' \Rightarrow AB' \parallel BA' \text{ si } AB' = BA' \Rightarrow AB'A'B$   
paralelogram  $\Rightarrow BB'$  trece prin mijlocul lui  $[AA']$  ..... 1p

Analog  $CC'$  trece prin mijlocul lui  $[AA']$ ..... 1p

Deci  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sunt concurente ..... 1p

#### Problem a 4

Dacă  $AB > AC$  și  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC \Rightarrow BD > DC \Rightarrow 3x > 3y \Rightarrow x > y$  (vezi fig.) ..... 1p

Fie  $P$  simetricul lui  $N$  față de  $A$  și  $Q$  mijlocul segmentului  $[MA]$

Fie  $PP_1 \perp BC, QQ_1 \perp BC \Rightarrow P_1D = y < x = Q_1D \Rightarrow P_1 \in (Q_1D)$

Alegem  $S \in (Q_1P_1)$  ..... 1p

In  $\triangle BQ_1Q$  dreptunghic  $MQ_1 = MB \Rightarrow MS > MQ_1 = MB$  ..... 1p

In  $\triangle CP_1P$  dreptunghic  $NP_1 = NC \Rightarrow NS > NP_1 = NC$  ..... 1p

Deci  $(MB - MS) < 0 \wedge (NC - NS) < 0 \Rightarrow (MB - MS)(NC - NS) > 0$  fals ..... 1p

Se raționează analog pentru  $AB < AC$  ..... 1p

Concluzie:  $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$  isoscel de vârf  $A$ ..... 1p

#### Clasa a VIII-a

##### Problem a 1

a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + z^2 - 2z(x + y) = 0$  ..... 1p

Deci  $(x - y)^2 + [z^2 - 2z(x + y) + (x + y)^2] - (x + y)^2 = 0$  ..... 1p

Astfel  $(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x + y - z)^2 \Leftrightarrow 4xy = (x + y - z)^2 \geq 0$  ..... 1p

Analog pentru  $yz \geq 0, zx \geq 0$  ..... 1p

b) Din simetria relației între  $x, y$  și  $z$  putem presupune  $x \geq y \geq z$  și din 1a) avem:

$(x + y)^2 = (x + y - z)^2 + (x - y)^2 = (x + y - z + x - y)^2 - 2(x + y - z)(x - y) \leq (2x - z)^2$  ..... 2p

Astfel  $x + y \leq 2x - z \Leftrightarrow y + z \leq x$  și deci  $x, y, z$  nu pot fi lungimile laturilor unui triunghi..... 1p

##### Problem a 2

$E = x - \frac{xy}{x+y} + y - \frac{yz}{y+z} + z - \frac{zx}{z+x} = x + y + z - \frac{xy}{x+y} - \frac{yz}{y+z} - \frac{zx}{z+x}$  ..... 1p

Folosim faptul ca  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  si analoagele ..... 1p

Atunci  $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{xy}{2\sqrt{xy}}$  si analoagele ..... 1p

Obținem  $E \geq x + y + z - \left( \frac{\sqrt{xy}}{2} + \frac{\sqrt{yz}}{2} + \frac{\sqrt{zx}}{2} \right) = x + y + z - \frac{1}{2}$  .....1p

Folosind inegalitatea  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$  pentru  $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$ ,

obținem  $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$  .....2p

Atunci  $E \geq \frac{1}{2}$ , minimul  $E = \frac{1}{2}$  obținându-se pentru  $x = y = z = \frac{1}{3}$  .....1p

### Problem a 3

- a)  $DE \perp A'F, DE \perp AA' \Rightarrow DE \perp (A'AF)$  ..... 0,5 p  
 $DE \perp (A'AF) \Rightarrow DE \perp AF$  ..... 0,5 p  
 $DE \perp AF \Rightarrow \angle DAF \equiv \angle CDE$   
 $\angle DAF \equiv \angle CDE \Rightarrow \text{tg } DAF = \text{tg } CDE$  ..... 0,5 p  
 $\text{tg } DAF = \text{tg } CDE \Rightarrow [AD] \equiv [DC]$   
 $ABCD$  dreptunghi si  $[AD] \equiv [DC] \Rightarrow ABCD$  patrat ..... 0,5 p
- b)  $BC \perp AB, BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'AB)$   
 $BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AP$  ..... 0,5 p  
 $AP \perp A'B, AP \perp BC \Rightarrow AP \perp (A'BC)$   
 $AP \perp (A'BC) \Rightarrow AP \perp A'C$  ..... 0,5 p
- c)  $A'C \perp AQ$  ..... 1 p  
 $A'C \perp AP, A'C \perp AQ \Rightarrow A'C \perp (APQ)$  .....0,5 p  
Fie  $\{R\} = A'C \cap (APQ) \Rightarrow A'R = d[A', (PAQ)]$  ..... 1 p  
 $R \in (PAQ), A \in (PAQ) \Rightarrow AR \subset (PAQ)$   
 $A'C \perp (PAQ) \Rightarrow A'C \perp AR$  .....0,5 p  
 $AC = 6 \text{ cm}, A'C = 10 \text{ cm}, AR = d = \frac{32}{5} \text{ cm} = 6,4 \text{ cm}$  .....1 p

### Problem a 4

Reprezentarea punctelor în reperul cartezian..... 1p

Cele 16 puncte determină  $16 \cdot 15 \cdot 14 = 560$  triplete formate din astfel de puncte  
..... 1p

$A_{14}$	$A_{24}$	$A_{34}$	$A_{44}$
$A_{13}$	$A_{23}$	$A_{33}$	$A_{43}$
$A_{12}$	$A_{22}$	$A_{32}$	$A_{42}$
$A_{11}$	$A_{21}$	$A_{31}$	$A_{41}$

Pentru a găsi numărul triunghiurilor eliminăm tripletele formate din puncte coliniare..... 1p

Pe **fiecare** linie sunt 4 astfel de triplete  
coliniare..... 1p

Analog pentru **fiecare** coloană și pentru cele două diagonale ale pătratului format ..... 1p

Mai sunt încă 4 triplete de puncte coliniare pe “diagonalele mici”-exemplu  $A_{12}, A_{23}, A_{34}$  ..... 1p

Concluzie: Se pot forma  $560 - (16 + 16 + 8 + 4) = 516$  triunghiuri .....1p