

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală pentru clasele V-VI
Slatina – 30 mai 2009

CLASA a VI-a

Problema 1. Pe o tablă sunt desenate punctele coliniare A , O și C , în această ordine. Anghel și Costel trasează, pe rând, semidreptele $[OA_1]$ și $[OC_1]$, în sensul deplasării acelor de ceasornic, astfel încât $m(\angle AOA_1) = 3^\circ$ și $m(\angle COC_1) = 7^\circ$. La pasul următor, păstrând sensul, Anghel trasează semidreapta $[OA_2]$ astfel încât $m(\angle A_1OA_2) = 3^\circ$ și Costel trasează semidreapta $[OC_2]$ astfel încât $m(\angle C_1OC_2) = 7^\circ$. Construcția continuă după aceeași regulă (unghi de 3° , urmat de unghi de 7°) până la pasul final, fie acesta n , când semidreapta $[OC_n]$ coincide cu semidreapta $[OA_n]$.

a) Determinați n .

b) De câte ori, pe parcursul construcției, o semidreaptă trasată de Costel s-a suprapus peste o semidreaptă trasată anterior de Anghel?

Problema 2. Vom numi *superprim* un număr natural prim, mai mare decât 10, care îndeplinește simultan următoarele condiții:

i) este format din cifre distincte;

ii) oricum am schimba ordinea cifrelor sale, obținem tot un număr prim.
Determinați toate numerele superprime.

Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral. În semiplanul determinat de BC care nu-l conține pe A considerăm un punct D astfel încât $m(\angle BDC) = 90^\circ$. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, determinați $m(\angle BDM)$.

Problema 4. Vom numi un număr natural n *interesant* dacă $n \geq 2$ și orice număr $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$, se scrie ca o sumă de divizori distincți ai lui n .

Arătați că produsul a două numere interesante este un număr interesant.
(Se acceptă că o sumă poate avea un singur termen.)

Timp de lucru 2 1/2 ore, la care se adaugă 1/2 oră pentru întrebări
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte

CLASA a VI-a, SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

Problema 1. Pe o tablă sunt desenate punctele coliniare A, O și C , în această ordine. Anghel și Costel trasează, pe rând, semidreptele $[OA_1]$ și $[OC_1]$, în sensul deplasării acelor de ceasornic, astfel încât $m(\angle AOA_1) = 3^\circ$ și $m(\angle COC_1) = 7^\circ$. La pasul următor, păstrând sensul, Anghel trasează semidreapta $[OA_2]$ astfel încât $m(\angle A_1OA_2) = 3^\circ$ și Costel trasează semidreapta $[OC_2]$ astfel încât $m(\angle C_1OC_2) = 7^\circ$. Construcția continuă după aceeași regulă (unghi de 3° , urmat de unghi de 7°) până la pasul final, fie acesta n , când semidreapta $[OC_n]$ coincide cu semidreapta $[OA_n]$.

a) Determinați n .

b) De câte ori, pe parcursul construcției, o semidreaptă trasată de Costel s-a suprapus peste o semidreaptă trasată anterior de Anghel?

Soluție. a) Costel are de recuperat 180° **1 punct**

După fiecare pas el recuperează $7^\circ - 3^\circ = 4^\circ$ **1 punct**

Sunt necesari $180 : 4 = 45$ pași. **2 puncte**

b) Dacă două semidrepte trasate de Anghel și Costel coincid, atunci Anghel a trasat x semidrepte iar Costel y semidrepte și avem egalitatea $7y = 3x + 180$ **1 punct**

Deducem că y se divide cu 3 și $y \in \{26, 27, \dots, 45\}$. Obținem

$$(x, y) \in \{(3, 27); (10, 30); (17, 33); (24, 36); (31, 39); (38, 42); (45, 45)\},$$

adică 7 coincidențe **2 puncte**

Problema 2. Vom numi *superprim* un număr natural prim, mai mare decât 10, care îndeplinește simultan următoarele condiții:

i) este format din cifre distincte;

ii) oricum am schimba ordinea cifrelor sale, obținem tot un număr prim.

Determinați toate numerele superprime.

Soluție. Numerele superprime sunt formate doar din cifrele 1, 3, 7, 9, deoarece, în caz contrar, prin schimbarea ordinii cifrelor se poate obține un număr par sau un număr divizibil cu 5. Prin urmare, un număr superprim poate avea cel mult 4 cifre. **2 puncte**

Cum 1397 se divide cu 11, nu există numere superprime formate cu 4 cifre. **2 puncte**

Cum $7 \mid 371, 11 \mid 319, 7 \mid 791, 13 \mid 793$, nu există numere superprime cu 3 cifre. **2 puncte**

Numerele superprime de două cifre sunt 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97. **1 punct**

Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral. În semiplanul determinat de BC care nu-l conține pe A considerăm un punct D astfel încât $m(\angle BDC) = 90^\circ$. Dacă M este mijlocul segmentului AB , determinați $m(\angle BDM)$.

Soluție. Considerăm punctul N , mijlocul segmentului $[BC]$ **1 punct**

Cum DN este mediană în triunghiul BCD , rezultă că triunghiul DNC este isoscel. **1 punct**

Fie $m(\angle BCD) = \alpha$. Unghiul $\angle BND$ este exterior $\triangle DNC$, deci $m(\angle BND) = 2\alpha$ **1 punct**

Deoarece triunghiul BMN este echilateral rezultă că $MN = BN$. Cum $DN = BN$ rezultă că triunghiul MND este isoscel **2 puncte**

Reiese $m(\angle DMN) = 60^\circ - \alpha$ și $m(\angle BMD) = \alpha$ și, din $\triangle MBD$, $m(\angle BDM) = 30^\circ$ **2 puncte**

Problema 4. Vom numi un număr natural n *interesant* dacă $n \geq 2$ și orice număr $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$, se scrie ca o sumă de divizori distincți ai lui n .

Arătați că produsul a două numere interesante este un număr interesant.

(Se acceptă că o sumă poate avea un singur termen.)

Soluție. Dacă m, n sunt interesante și $an < x < an + n$, atunci $x = an + c_1 + c_2 + \dots + c_k$, unde c_1, c_2, \dots, c_k sunt divizori distincți ai lui n **2 puncte**

Pe de altă parte, dacă $1 \leq x < mn$, atunci, din teorema împărțirii cu rest, $x = an + b$, cu $0 \leq b < n, 0 \leq a < m$ **2 puncte**

Cum m este interesant, putem scrie, pentru $a \geq 1$, $a = d_1 + \dots + d_\ell$, cu d_1, \dots, d_ℓ divizori distincți ai lui m **2 puncte**

Prin urmare $x = nd_1 + nd_2 + \dots + nd_\ell + c_1 + c_2 + \dots + c_k$ (folosind doar divizori de tip c_i pentru $a = 0$, respectiv d_j pentru $b = 0$). Cum pentru fiecare d_j și c_i avem $c_i < n \leq nd_j$ rezultă că toți divizorii $nd_1, nd_2, \dots, nd_\ell, c_1, c_2, \dots, c_k$ ai numărului mn sunt distincți **1 punct**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
REZULTATE FINALE
CLASA A VI-A

Slatina, 29-31 mai 2009

Nr. Crt	Numele si prenumele elevului	SUB. 1	SUB. 2	SUB. 3	SUB. 4	TOTAL	Unitatea Scolara	Judetul	Premii MEđCI	Premii SSMR
1	Nicolaescu Vlad	7	7	7	7	28	I.C.H.B.	București	I	AUR
2	Spătaru Ștefan	7	7	7	7	28	Școala cu clasele I-VIII Mihai Viteazul	Teleorman	I	AUR
3	Șerban Ștefana	6	5	7	7	25	Gimn. "Augustin Maior"	Mureș	II	AUR
4	Indrei Lucia	7	6,5	7	1	21,5	Colegiul Național	Iași	III	AUR
5	Cora Radu	7	7	7	0	21	Școala cu clasele I-VIII "Dacia"	Bihor	MENTIUNE	AUR
6	Iorgulescu Tiberiu Ionuț	7	7	7	0	21	Colegiul Național "Mircea cel Bătrân"	Constanța	MENTIUNE	AUR
7	Popescu L.M. Cosmin Constantin	7	7	7	0	21	Colegiul Național "Ștefan cel Mare"	Suceava	MENTIUNE	AUR
8	Truță Mihai	6,5	5	7	0	18,5	Scoala cu clasele I - VIII "H. Oberth"	Sibiu	MENTIUNE	ARGINT
9	Ciociomán Oana	7	7	4	0	18	Liceul Pedagogic "Carmen Sylva"	Timiș	MENTIUNE	ARGINT
10	Ștefănescu Nicolae Andrei	6	7	5	0	18	Școala cu clasele I-VIII Nr.1	Caraș-Severin	MENTIUNE	ARGINT
11	Ungureanu Marta Ștefania	7	3	7	0	17	Școala cu clasele I-VIII Nr.2	Dolj	MENTIUNE	ARGINT
12	Iordan Vlad	7	7	2	0	16	Colegiul Național I.M.	Giurgiu	MENTIUNE	ARGINT
13	Puiu Andrei Bogdan	7	7	2	0	16	Colegiul Național "V. Alecsandri"	Galați	MENTIUNE	ARGINT
14	Tomescu Vlad	7	7	2	0	16	Colegiul Național "G. Goșbuc"	Cluj	MENTIUNE	ARGINT
15	Bicsi M.B. Lucian	6	4,5	0	5	15,5	Colegiul Național "Ștefan cel Mare"	Suceava	MENTIUNE	ARGINT
16	Grama Dragoș Ioan	6,5	7	2	0	15,5	Școala cu clasele I-VIII Nr.5 "Ștefan cel Mare"	Vaslui	MENTIUNE	ARGINT
17	Ignat Ioan	7	7	1,5	0	15,5	Colegiul Național "Mircea cel Bătrân"	Constanța	MENTIUNE	ARGINT
18	Lemnarú Andreea	7	7	1,5	0	15,5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 56	București	MENTIUNE	ARGINT
19	Ungureanu Alexandru Corneliu	7	6,5	2	0	15,5	Școala cu clasele I-VIII "Take Ionescu"	Vâlcea	MENTIUNE	ARGINT
20	Bucur Marian	5	4	5	0	14	Mark Twain International School	Ifov	MENTIUNE	ARGINT
21	Coman Alice	2	5	7	0	14	Școala cu clasele I-VIII Nr. 197	București	MENTIUNE	ARGINT
22	Gavrilescu Marius	6	7	1	0	14	Școala cu clasele I-VIII "Take Ionescu"	Vâlcea	MENTIUNE	ARGINT
23	Halip Casandra	6,5	3,5	4	0	14	Școala cu clasele I-VIII H.M.Berthelot	Prahova	MENTIUNE	ARGINT
24	Papp Tamas Peter	6,5	6	1,5	0	14	Colegiul Național "Moise Nicoară"	Arad	MENTIUNE	ARGINT
25	Petruș Andrei	7	5,5	1,5	0	14	Colegiul Național "V. Lucaciu"	Maramureș	MENTIUNE	ARGINT
26	Craioveanu Alma	4	7	2	0	13	Școala cu clasele I-VIII Nr.3	Argeș	MENTIUNE	BRONZ
27	Ilie Cătălin Andrei	4	7	2	0	13	Școala cu clasele I-VIII Andrei Mureșanu	Prahova	MENTIUNE	BRONZ

28	Manu Radu	7	3	3	0	13	Școala cu clasele I-VIII Nr. 172	București	MENTIUNE	BRONZ
29	Popa Vlad	7	6	0	0	13	Colegiul Național "Ferdinand I"	Bacău	MENTIUNE	BRONZ
30	Mușat C. Alin-Gabriel	6	4,5	2	0	12,5	Colegiul Național "N., Bălcescu"	Brăila		BRONZ
31	Petrescu Alexandru	7	3,5	2	0	12,5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 172	București		BRONZ
32	Popa A. Andreea-Maria	5	7	0,5	0	12,5	Colegiul Național "N., Bălcescu"	Brăila		BRONZ
33	Stana Robert Daniel	4	6,5	2	0	12,5	Colegiul Național "Moise Nicoară"	Arad		BRONZ
34	Bănaru Daniel	7	3	2	0	12	Școala cu clasele I-VIII Nr.4	Giurgiu		BRONZ
35	Bura Lucia Angela	4	6	2	0	12	Colegiul Național Mihai Eminescu	Satu Mare		BRONZ
36	Zavada Maria-Gabriela	7	3	2	0	12	Școala Cu clasele I-VIII Elena Cuza	Neamț		BRONZ
37	Ciulu Miruna	4	7	0,5	0	11,5	Școala cu clasele I-VIII Nr.6	Caraș-Severin		BRONZ
38	Fetoiu Cătălin	1	7	3,5	0	11,5	Școala cu clasele I-VIII "I. G. Duca"	Hunedoara		BRONZ
39	Mădularu Evelina	4,5	5	2	0	11,5	Școala cu clasele I-VIII "Eugen Ionescu"	Olt		BRONZ
40	Mortici Corina	4	6,5	1	0	11,5	Școala cu clasele I-VIII "Mihai Viteazul"	Dâmbovița		BRONZ
41	Christescu Matei	7	3	1	0	11	I.C.H.B.	București		BRONZ
42	Diaconu Simona	1	7	2	1	11	Liceul Teoretic "Spiru Haret"	Galați		BRONZ
43	Crăciun Andrian Petru	7	2,5	0	1	10,5	Colegiul Național "Petru Rareș"	Neamț		BRONZ
44	Poenar Bianca Liana	0,5	3	7	0	10,5	Colegiul Național "P. Rareș"	Bistrița-Năsăud		BRONZ
45	Surdea Vlad	5,5	3	2	0	10,5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 22	Timiș		BRONZ
46	Zăvoi Georgiana Nicoleta	4,5	4,5	1,5	0	10,5	Colegiul Național "Carol I"	Dolj		BRONZ
47	Cristuș Miruna	7	3	0	0	10	Colegiul Național "C. Negruzzi"	Iași		BRONZ
48	Munteanu G.M. Andrei Gabriel	7	1	2	0	10	Colegiul Național "Unirea"	Vrancea		BRONZ
49	Pleșa Bogdan	1	7	2	0	10	Școala cu clasele I - VIII "H. Oberth"	Sibiu		BRONZ
50	Popovici Mara	6,5	1	2,5	0	10	Școala cu clasele I-VIII Nr.2	Botoșani		BRONZ
51	Székely Attila	7	3	0	0	10	Școala cu clasele I-VIII Köllő Miklós	Harghita		BRONZ
52	Trif Paul	1	7	2	0	10	Școala cu clasele I-VIII Nr.3	Alba		BRONZ
53	Vladu Sorin	7	2,5	0,5	0	10	Liceul cu Program Sportiv	Olt		BRONZ
54	Ilea Flavia	0,5	7	2	0	9,5	Școala cu clasele I-VIII "C.Brâncuși"	Cluj		
55	Juhos Attila	6,5	1	2	0	9,5	Liceul Teoretic Székely Miko	Covasna		
56	Lucescu Patrik	5	2,5	0	2	9,5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 97	București		
57	Costăchescu Irina	2,5	2,5	4	0	9	Colegiul Economic	Călărași		
58	Ghimși Alexandru	0	7	2	0	9	Colegiul Național "Ioniță Asan"	Olt		
59	Glonțaru Alexandru	6,5	2,5	0	0	9	Școala cu clasele I-VIII Dridu	Ialomița		
60	Țuculeanu Georgiana	4,5	2,5	2	0	9	Colegiul Național "Mihai Eminescu"	Botoșani		
61	Băețica Irina	5	3,5	0	0	8,5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 3	Olt		
62	Neagu Adrian Ionuț	6	0,5	2	0	8,5	Școala cu clasele I-VIII "Mihai Viteazul"	Călărași		
63	Nițu Adrian Alin	3	3,5	2	0	8,5	Școala cu clasele I-VIII Nr.1	Teleorman		

64	Popa Tudor Marian	0,5	3	5	0	8,5	Colegiul Național de Informatică "Tudor Vianu"	București		
65	Comănesci Andrei	4	4	0	0	8	Colegiul Național "Tudor Vladimirescu"	Gorj		
66	Dănilă Irina	1	3	4	0	8	Colegiul Național "Ferdinand I"	Bacău		
67	Diugan Raluca Georgia	4	2	2	0	8	Școala cu clasele I-VIII "L. Blaga"	Bistrița-Năsăud		
68	Alexandrescu L. Beatrice-Maria	0,5	3	4	0	7,5	Colegiul Național "Unirea"	Vrancea		
69	Artamonov Andrada	0	5	2	0	7	Școala cu clasele I-VIII "Al Ciucurencu"	Tulcea		
70	Csutak Balázs	5	2	0	0	7	Liceul Teoretic Székely Miko	Covasna		
71	Koncz Botond	4	1	2	0	7	Școala cu clasele I-VIII Petőfi Sándor	Harghita		
72	Mihăilă Cosmin Eugen	3	3,5	0,5	0	7	Școala cu clasele I-VIII "Șerban Cioculescu"	Dâmbovița		
73	Turcu Sabina	1,5	3	2	0	6,5	Colegiul Național "Andrei Șaguna"	Brașov		
74	Neacsu Bogdan	4	2	0	0	6	Școala cu clasele I-VIII Nr. 97	București		
75	Poeana Alexandru Ronald	4	1,5	0,5	0	6	Școala cu clasele I-VIII Nr.1	Buzău		
76	Popescu Mihai	0,5	1,5	4	0	6	Colegiul Național "Tudor Vladimirescu"	Gorj		
77	Rădulescu Cristina	0	4	2	0	6	Școala cu clasele I-VIII Nr.3	Ialomița		
78	Ivan Maria	1	2,5	2	0	5,5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 2	Argeș		
79	Malcica Teodor	3	2,5	0	0	5,5	Colegiul Național de Informatică "Tudor Vianu"	București		
80	Pogăcean Victor Paul	0	5,5	0	0	5,5	Colegiul Național Traian	Mehedinți		
81	Slusarciuc Miruna	4	1	0,5	0	5,5	Colegiul Național Mihai Eminescu	Satu Mare		
82	Stoica Ștefania	0	3,5	2	0	5,5	Liceul cu Program Sportiv	Olt		
83	Varia Ionuț Virgil	1,5	3	1	0	5,5	Școala cu clasele I-VIII "Gh. Magheru"	Olt		
84	Brisco Oana	2	2	1	0	5	Școala cu clasele I-VIII Gimn. "Mihai Eminescu"	Sălaj		
85	Cerrahoglu Ali	0	3	2	0	5	Colegiul Național "V. Lucaciu"	Maramureș		
86	Cristali Irina	0	3	2	0	5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 97	București		
87	Crîșan Carina	2	2	1	0	5	Colegiul Național Decebal	Hunedoara		
88	Pascale Maria	1,5	3	0,5	0	5	Școala cu clasele I-VIII Nr. 5	Tulcea		
89	Trifu Antonia-Ioana	0,5	3	1	0	4,5	Colegiul Național de Informatică "Tudor Vianu"	București		
90	Enache Laura Mădălina	0	1	2	0	3	Liceul Teoretic "M. Kogălniceanu"	Vaslui		
91	Nicolicioiu Armand Mihai	0	2,5	0,5	0	3	Colegiul Național "Gheorghe Țițeica"	Mehedinți		
92	Oncescu Andreea	0	3	0	0	3	Colegiul Național "Dinicu Golescu"	Argeș		
93	Stoican Cosmina	0	2,5	0,5	0	3	Liceul Teoretic "H. Hulubei"	Ilfov		
94	Radu Adina	0,5	1	1	0	2,5	Colegiul Național "Unirea"	Mureș		
95	Cheregi Maria-Carina	0,5	1,5	0	0	2	Școala cu clasele I-VIII Popești	Bihor		
96	Tămaș Cristian	0	0,5	1,5	0	2	Colegiul Național "Andrei Șaguna"	Brașov		

97	Man Răzvan Emanuel	0	0,5	0	0	0,5	Școala cu clasele I-VIII Gimn. "Silvania"	Sălaj		
98	Icatoiu Vlad	abs	abs	abs	abs	abs	Școala cu clasele I-VIII Nr.1	Buzău		
99	Jugariu Mihai	0	0	0	0	0	Școala cu clasele I-VIII Nr.4	Alba		

PREȘEDINTELE COMISIEI DE EVALUARE,

PROF. CRISTIAN ALEXANDRESCU