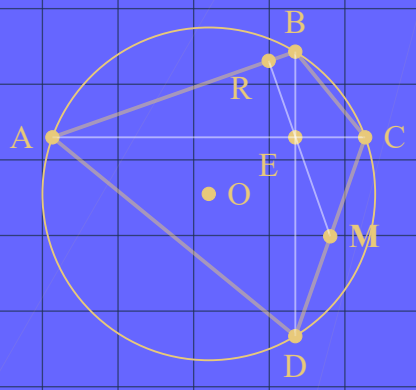
SORIN COCORADĂ

MATEMATICĂ ▪ LICEU

Culegere de exerciții și probleme

Algebră • Geometrie • Trigonometrie

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



IX

Culegerea de exerciții și probleme de matematică se adresează elevilor din învățământul liceal-clasa a IX-a, precum și cadrelor didactice care doresc să dispună de un material suplimentar pentru consolidarea, aprofundarea și evaluarea cunoștințelor matematice.

Lucrarea cuprinde o selecție variată de exerciții și probleme, organizate progresiv, de la aplicații de consolidare până la probleme care solicită un nivel sporit de raționament, ingeniozitate și creativitate. Prin diversitatea și gradarea exercițiilor, culegerea poate fi utilizată atât în activitatea didactică, cât și pentru studiul individual, pregătirea evaluărilor și examenelor sau pentru aprofundarea matematicii în vederea participării la concursuri și olimpiade școlare.

Un element distinctiv al lucrării îl constituie **caracterul interactiv al documentului PDF**. Cuprinsul este prevăzut cu legături active, permițând accesul rapid la capitolele și secțiunile lucrării. De asemenea, problemele și soluțiile sunt interconectate prin legături de tip hyperlink: un simplu click pe **numărul unei probleme cu eticheta verde** conduce direct la soluția corespunzătoare, având același număr, iar un click pe **numărul soluției** conduce înapoi la pagina în care este prezentată problema respectivă.

Această structură facilitează navigarea în document și permite trecerea rapidă între enunțuri și soluții, transformând culegerea într-un material digital ușor de utilizat și adaptat studiului pe calculator, tabletă sau alte dispozitive compatibile cu formatul PDF.

Prin concepția sa, lucrarea își propune să fie nu doar un repertoriu de exerciții și probleme, ci și un **instrument modern de formare a gândirii matematice**, care să încurajeze rigoarea, perseverența, autonomia în învățare și plăcerea de a descoperi soluții.

Cuprins

1 Mulţimea numerelor reale. 6
1.1 Mulțimea numerelor naturale. . . . 6
1.2 Mulțimea numerelor întregi 8

2 Mulţimea numerelor raţionale 9

3 Mulţimea numerelor iraţionale 11
3.1 Relații de ordonare 15
3.2 Demonstrarea unor egalități și inegalități 16
3.2.1 Egalități 16
3.2.2 Inegalități 17
3.2.3 Test de evaluare 20
3.2.4 Test de evaluare 21
3.3 Modulul unui număr real 21
3.4 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real 24
3.4.1 Test de evaluare 29
3.4.2 Test de evaluare 30
3.5 Mulțimi 30
3.5.1 Test de evaluare 36

4 Elemente de logică matematică și teoria mulţimilor 37
4.1 Propoziții. Operații logice elementare. . . . 37
4.1.1 Test de evaluare 42
4.2 Predicate. Cuantificatori 43
4.3 Test de evaluare 48
4.4 Test de evaluare 49
4.5 Test de evaluare 49
4.6 Corelarea operatorilor logici cu operațiile și relațiile dintre mulțimi 50
4.6.1 Test de evaluare 55

5 Tipuri de raţionamente logice 56
5.1 Metoda inducției matematice 56
5.1.1 Test de evaluare 63
5.2 Probleme de numărare 64
5.2.1 Test de evaluare 72

6 Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale. 73
6.1 Șiruri de numere reale 73
6.1.1 Șiruri mărginite. Șiruri monotone 75
6.2 Progresii aritmetice și progresii geometrice 77
6.2.1 Progresii aritmetice 77
6.2.2 Progresii geometrice 84
6.3 Probleme combinate 91
6.3.1 Test de evaluare 94

6.3.2 Test de evaluare . . . 94
6.3.3 Test de evaluare . . . 95

7 Funcţii, lecturi grafice 97
7.1 Reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulțimi numerice . . . 97
7.2 Noțiunea de funcție . . . 99
7.3 Proprietăți ale funcțiilor numerice introduse prin lecturi grafice . . . 105
7.4 Compunerea funcțiilor . . . 116
7.5 Test de evaluare 1 . . . 122
7.6 Test de evaluare 2 . . . 123
7.7 Test de evaluare 3 . . . 124
7.8 Test de evaluare 4 . . . 124

8 Funcţia polinomială de gradul I 126
8.1 Reprezentarea grafică a funcției de gradul I . . . 127
8.2 Monotonia și semnul funcției de gradul I . . . 129
8.2.1 Inecuații de gradul I cu o necunoscută . . . 130
8.2.2 Sisteme de inecuații . . . 130
8.3 Aplicații diverse . . . 131

9 Teste de evaluare 137
9.1 Test 1 . . . 137
9.2 Test 2 . . . 138
9.3 Test 3 . . . 138

10 Funcţia de gradul al II-lea 140
10.1 Ecuația de gradul II . . . 140
10.1.1 Ecuații reductibile la cele de gradul II. . . . 141
10.1.2 Ecuații cu rădăcini comune . . . 142
10.1.3 Relații între rădăcini și coeficienți . . . 143
10.1.4 Rezolvarea sistemelor de forma $x + y = S; xy = P$ . . . 144
10.2 Maximul sau minimul funcției polinomiale de gradul al doilea . . . 145
10.3 Monotonia funcției de gradul al doilea . . . 146
10.4 Semnul funcției de gradul II. . . . 146
10.4.1 Poziția rădăcinilor funcției de gradul al II-lea față de un număr dat „α” . . . 151
10.5 Graficul funcției de gradul II. . . . 153
10.5.1 Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă . . . 156
10.5.2 Poziția relativă a două parabole. . . . 156
10.6 Probleme diverse . . . 157
10.8 Test de evaluare . . . 163
10.9 Test de evaluare . . . 164
10.10 Test de evaluare . . . 164
10.11 Test de evaluare . . . 165

11 Vectori în plan **166**
11.1 Segmente, semidrepte, segmente orientate, echipotență, vectori . . . 166
11.1.1 Test de evaluare . . . 170
11.2 Adunarea vectorilor . . . 171
11.2.1 Test de evaluare . . . 176
11.3 Înmulțirea cu scalari a vectorilor . . . 176
11.3.1 Test de evaluare . . . 182
11.4 Descompunerea unui vector după doi vectori dați necoliniari și nenuli . . . 183
11.4.1 Test de evaluare . . . 189
11.5 Vectorul de poziție al unui punct în raport cu un pol (reper) . . . 190
11.5.1 Test de evaluare . . . 200
11.6 Exerciții și probleme cu vectori în plan . . . 200
11.6.1 Probleme de concurență și coliniaritate . . . 200
11.6.2 Exerciții și probleme tematice . . . 203
11.6.3 Test de autoevaluare . . . 205
11.6.4 Test de evaluare . . . 206

12 Elemente de trigonometrie **207**
12.1 Cercul trigonometric . . . 207
12.2 Funcțiile trigonometrice . . . 208
12.2.1 Principalele valori ale funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$ . . . 210
12.2.2 Reducerea la primul cadran . . . 215
12.2.3 Relații de bază . . . 217
12.2.4 Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele . . . 217
12.2.5 Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri . . . 223
12.2.6 Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi . . . 227
12.2.7 Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi . . . 228
12.2.8 Formulele universale . . . 231
12.2.9 Transformarea sumelor în produse . . . 233
12.2.10 Transformarea produselor în sume . . . 236
12.3 Transformarea expresiei $a \sin t + b \cos t$ în produs . . . 238
12.4 Aplicații diverse . . . 239
12.5 Test de autoevaluare . . . 243
12.5.1 Test de evaluare . . . 243
12.5.2 Test de evaluare . . . 245

13 Aplicaţii ale trigonometriei și ale produsului scalar **246**
13.1 Produsul scalar a doi vectori cu aplicații în geometrie . . . 246
13.2 Aplicaţii ale vectorilor și trigonometriei în geometrie . . . 252
13.2.1 Test de evaluare . . . 256
13.2.2 Test de evaluare . . . 257
13.2.3 Test de evaluare . . . 257

14 Îndrumări, indicaţii, răspunsuri, soluţii. **258**

1 Mulţimea numerelor reale.

1.1 Mulţimea numerelor naturale.

Mulţimea numerelor naturale este : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Notăm cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Întrucât suma și produsul a două numere naturale este tot un număr natural, rezultă că aplicând operațiile de adunare, înmulțire și ridicare la putere unor numere naturale, obținem tot un număr natural.

Împărțirea cu rest a două numere naturale: A împărți $a \in \mathbb{N}$ la $b \in \mathbb{N}^*$ $(a \geq b)$, înseamnă a găsi două numere $q \in \mathbb{N}$ și $r \in \mathbb{N}$, astfel $a = b \cdot q + r$, $r < b$.

Prin urmare resturile împărțirii la b pot fi: $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

Dacă $r = 0$, se spune că a se divide la b (sau a este multiplu al lui b) și se notează $a \vdots b$ sau că b este divizor al lu a și se notează $b \mid a$

1. Să se determine toate numerele de forma $\overline{abc}$ astfel încât $a^a = \overline{bc}$ unde a, b, c sunt cifre și $a \neq 0$.

2. Să se compare numerele $A = 1977^2 - 1877^2$ și $B = 2(1977 + 1976 + \ldots + 1887) - 100$.

3. Să se arate că, pentru orice număr natural nenul m, expresia E=$(m + 3^m)(m + 1)(m - 1)$ se divide prin 3.

4. Împărțind numărul natural n la 48 se obține restul 36. Ce rest se obține când îl împărțim pe n la 16 ?

5. Într-o operație de împărțire suma dintre deîmpărțit și împărțitor este 2289, câtul este 17 și restul este 111. Să se afle deîmpărțitul și împărțitorul.

6. Numerele 273437 și 272758, împărțite la N=$\overline{ab}$, $(a \neq 0)$, dau resturile 17 și respectiv 13. Să se determine numerele N.

7. Câte numere naturale de forma $\overline{abc}$, scrise în baza zece, îndeplinesc condiția $a \cdot b \cdot 3 = 30$? Justificați răspunsul.

8. Să se arate că numărul natural $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ se divide cu 111.

9. Se dă numărul $A = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x + 1}$. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel încât A să fie natural.

Soluție 1: Avem $A = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x + 1} = \dfrac{x^2 + x - 5x - 5 - 10}{x + 1} = \dfrac{x(x + 1) - 5(x + 1) - 10}{x + 1} = x - 5 - \dfrac{10}{x + 1} \in \mathbb{N}$. Pentru ca $A \in \mathbb{N}$ trebuie ca $\dfrac{10}{x + 1} \in \mathbb{N}$ adică $x + 1 \in \{1, 2, 5, 10\}$ și deci $x \in \{0, 1, 4, 9\}$.

Soluție 2: $\left.\begin{cases}(x + 1) \mid (x^2 - 4x + 5) \\ (x + 1) \mid (x + 1)\end{cases}\right| \Rightarrow (x + 1) \mid (x^2 - 4x + 5) - x(x + 1) = -5x + 5 \Rightarrow$

$\left.\begin{cases}(x + 1) \mid (-5x + 5) \\ (x + 1) \mid (x + 1)\end{cases}\right| \Rightarrow (x + 1) \mid (-5x + 5) + 5(x + 1) = 10$ adică $x + 1 \in \{1, 2, 5, 10\}$ etc.

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $xy-3x-y-3=0$.

Soluția 1 : Rezolvând ecuația în raport cu una dintre necunoscute, de exemplu x obținem: $x=\frac{y+3}{y-3}=\frac{y-3+6}{y-3}=1+\frac{6}{y-1}\in\mathbb{N}\Rightarrow y-3\in\{1,2,3,6\}\Rightarrow y\in\{4,5,6,9\}\Rightarrow x\in\{7,4,3,9\}$ și deci $(x,y)\in\{(7,4);(4,5);(3,6);(2,9)\}$.

Soluția 2: Ecuația se mai poate scrie $(x-1)(y-3)=6$. Cum $x-1, y-3\in\mathbb{N}$, putem avea următoarele posibilități:

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-3=6 \end{cases};\begin{cases} x-1=6 \\ y-3=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x-1=2 \\ y-3=3 \end{cases};\quad \begin{cases} x-1=3 \\ y-3=2 \end{cases}$$

Rezolvând sistemele de mai sus, obținem $(x,y)\in\{(7,4);(4,5);(3,6);(2,9)\}$.

11. Arătați că fracția $\frac{3n+2}{4n+3}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

12. Să se determine numerele prime a,b,c pentru care $2a+3b+4c=30$.

Soluție: Relația din enunț se mai poate scrie:
$2(a+2c)=3(10-b)$. (1)

Deoarece numerele 2 și 3 sunt prime între ele rezultă că $10-b$ este divizibil cu 2, adică $b\vdots 2$. Cum b trebuie să fie și număr prim, iar singurul număr prim par este 2, rezultă $b=2$. Cu aceasta (1) devine $2(a+2c)=24\Leftrightarrow a+2c=12\Leftrightarrow a=2(6-c)$ (2)

Cum a este număr prim , ținând cont de relația (2) avem $a=2$ și $6-c=1$ de unde $c=5$, care este număr prim.

Deci numerele căutate sunt: $a=2, b=2, c=5$.

13. Fie x,y,z numere naturale astfel încât numerele $2^x, 2^y, 2^z$ dau resturi distincte la împărțirea cu 7. Să se arate că $2^x+2^y+2^z$ se divide cu 7.

14. Aflați numerele naturale x,y știind că $5x+7y=xy$.

Indicație: $(x-7)(y-5)=35$

15. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{\frac{3(n-1)}{n-3}}\in\mathbb{N}$.

Indicație: $\frac{3(n-1)}{n-3}\geq 0$ și $\frac{3(n-1)}{n-3}=k^2,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow n=\frac{3k^2-3}{k^2-3}=3+\frac{6}{k^2-3}\in\mathbb{N}\Rightarrow k^2-3\in\{-6,-3,-1,1,3,6\}$ etc.

16. Arătați că produsul $P=2\cdot 6\cdot 10\ldots\cdot(4n-2)$ poate fi scris ca un produs de numere naturale consecutive, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție: Avem: $P=2\cdot 6\cdot 10\ldots\cdot(4n-2)=2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))=$
$=\frac{2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}=\frac{2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n)}{2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot n)}=$
$(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n$.

17. a) Arătați că există 7 numere naturale consecutive neprime.

b) Arătați că există n numere naturale consecutive neprime, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$

18. Arătați că produsul a două numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

19. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab} + \overline{ba}$ este un pătrat perfect.

20. Arătați că nici unul din numerele $5n+2, 5n+3, 5n+7, 5n+8$ nu poate fi pătrat perfect.

1.2 Mulțimea numerelor întregi

Mulțimea numerelor întregi este
$\mathbb{Z} = \{\ldots, n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

Notăm $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Deoarece suma, diferența și produsul a două numere întregi este tot un număr întreg, rezultă că, aplicând operațiile de adunare, scădere, înmulțire și ridicare la putere unor numere întregi, obținem tot un număr întreg.

Modulul unui număr întreg.

Definiția 1.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Împărțirea cu rest a două numere întregi: A împărți $a \in \mathbb{Z}$ la $b \in \mathbb{Z}^*$, înseamnă a găsi două numere $q \in \mathbb{Z}$ și $r \in \mathbb{N}$, astfel $a = b \cdot q + r$, $r < |b|$.

Prin urmare resturile împărțirii la b pot fi: $0, 1, 2, \ldots, |b| - 1$.

Dacă $r = 0$, se spune că a se divide la b (sau a este multiplu al lui b) și se notează $a \vdots b$ sau că b este divizor al lu a și se notează $b \mid a$.

Fie $a, b, d \in \mathbb{Z}$ și dacă $d \mid a$ și $d \mid b$ atunci $d \mid (ma + nb), \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

21. Precizați valoarea absolută a numerelor întregi $2, -3, 7, -21, 101, -305$.

22. Să se demonstreze că:

a) Produsul a două numere întregi consecutive este divizibil cu 2.

b) Produsul a trei numere întregi consecutive e divizibil cu 3.

c) Este produsul a trei numere întregi consecutive divizibil cu 6 ?

23. Să se determine numerele întregi x și y care verifică relația:
$x^2 + 6x - y^2 = 2$.

24. Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbb{Z}$ și $6x + 21y + 29z = 0$, atunci $(2x + 5z)(3y + 14z)$ se divide cu 21.

25. a) Să se arate că dacă la produsul a patru numere întregi consecutive adăugăm 1, se obține un pătrat perfect.

b) Rezolvați în $Z \times Z$ ecuația $x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2$.

26. Determinați toate numerele întregi x pentru care $\dfrac{x^3+1}{2x-1} \in \mathbb{Z}$.

Soluție: $\dfrac{x^3+1}{2x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-1)|(x^3+1)$. Cum $(2x-1)|(2x-1) \Rightarrow (2x-1)|\big(-x^2(2x-1)+$ $+2(x^3+1)\big) = x^2+2$

Din $\begin{cases} (2x-1)|(2x-1) \\ (2x-1)|(x^2+2) \end{cases} \Rightarrow (2x-1)|\left(2(x^2+2)-x(2x-1)\right) = 4-x.$

Cum $\begin{cases} (2x-1)|(2x-1) \\ (2x-1)|(4-x) \end{cases} \Rightarrow (2x-1)|\,(2(4-x)+2x+1) = 9 \Rightarrow 2x-1 \in \{-9,-3,-1,1,3,9\}$

$\Rightarrow x \in \{-4,-1,0,1,2,5\}$. Se verifică că pentru cele 6 valori ale lui x expresia $\dfrac{x^3+1}{2x-1} \in \mathbb{Z}$.

27. Determinați numerele $a,b,c \in \mathbb{Z}$ știind că $\dfrac{a+2c}{2b+c}$, $\dfrac{b+2c}{2c+a}$ și $\dfrac{c+2b}{2c+b}$ sunt simultan numere întregi.

28. Determinați numerele $a,b,c \in \mathbb{Z}$ știind că $\dfrac{2a+b}{c+a}$, $\dfrac{4c+2b}{2b+4a}$ și $\dfrac{2c+2a}{b+2c}$ sunt simultan numere întregi nenegative.

Indicație: Avem $\dfrac{2a+b}{c+a}\cdot\dfrac{4c+2b}{2b+4a}\cdot\dfrac{2c+2a}{b+2c} = 2$ și fiecare raport este număr întreg.

29. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația: $xy+6(x+y) = 1987$

30. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $\dfrac{1}{5x}+\dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{4}$.

Indicație: Ecuația se mai poate scrie $(5x-4)(y-2) = 8$.

31. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ următoarele ecuații:

a) $xy-3x-y-3 = 0$;
b) $x^2-y^2+2x-2y-1 = 0$;
c) $x^2-y^2+2x-2 = 0$;
d) $9y^2-x^2-2x = 4$;
e) $x^2-2xy+3y^2 = 8$.

2 Mulţimea numerelor raţionale

Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q} = \left\{x = \dfrac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$.

32. Să se scrie în ordine crescătoare, fracțiile

$\dfrac{m+k}{mk}$, $\dfrac{m+k+1}{m(k+1)}$, $\dfrac{m+k+2}{m(k+2)}$, $\ldots$, $\dfrac{m+k+n}{m(k+n)}$ unde $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*$.

Soluție: Șirul de fracții se mai poate scrie $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{k+2}, \ldots, \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{k+n}$. Cum $\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{k+1} > \dfrac{1}{k+2} > \ldots > \dfrac{1}{k+n} \Rightarrow \dfrac{m+k}{mk} > \dfrac{m+k+1}{m(k+1)} > \dfrac{m+k+2}{m(k+2)} > \ldots > \dfrac{m+k+n}{m(k+n)}$

33. Să se arate că fracția $\frac{2n+1}{5n+3}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

Soluție: Presupunem că fracția este reductibilă, adică există $d \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ astfel încât $d \mid (2n+1)$ și $d \mid (5n+3)$. Rezultă $d \mid (-5(2n+1)+2(5n+3)) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = \pm 1$, fals.

34. Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care fracția $\frac{2n+23}{3n+5}$ se poate simplifica.

35. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ fracția $\frac{2n^2+3}{3n^2+2}$ se poate simplifica ?

36. Să se găsească cifrele m, n $(m \neq n)$ astfel ca $0,m(n) = \frac{m}{n}$.

Soluție: Pentru ca fracția $\frac{m}{n}$ să aibă sens se impune condiția $n \neq 0$. Avem $0,m(n) = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{10m+n-m}{90} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 9mn + n^2 = 90m \Leftrightarrow n^2 = 9m(10-n) \Rightarrow 9 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n$. Cum n este o cifră diferită de 0, rezultă $n \in \{3, 6, 9\}$.

Pentru $n = 3$ rezultă $9 = 9m \cdot 7 \Leftrightarrow 7 \cdot m = 1$ imposibil în $\mathbb{N}$.

Pentru $n = 6$ rezultă $36 = 9m \cdot 4 \Rightarrow m = 1$

Pentru $n = 9$ rezultă $81 = 9m \Rightarrow m = 9$ nu convine deoarece $m \neq n$. Soluția problemei este deci $m = 1, n = 6$.

37. Se consideră numerele naturale nenule a și b și numerele raționale $x = \frac{2a+b}{3b+2}$, $y = \frac{3b+2}{8}$, $z = \frac{8}{2a+b}$. Arătați că:

a) x, y, z sunt simultan numere naturale dacă și numai dacă $a = 3$ și $b = 2$.

b) $\frac{x}{4}, \frac{y}{2}$ și $4z$ nu pot fi simultan numere naturale.

38. Se știe că $x, y \in \mathbb{Q}^*, x + y \neq 0, z = \frac{xy}{x+y}$. Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2$ este pătratul unui număr rațional.

39. Dacă $\frac{a}{b} = 1,1(6)$ și cel mai mare divizor comun al acestor numere este $(a, b) = 1$, să se calculeze $\frac{5a+7b}{a+13b}$.

40. Se dă numărul A=$\frac{a}{0,(a)} + \frac{2a^2}{0,0(a)} + \frac{a^3}{0,00(a)}$ unde a este orice cifră nenulă. Arătați că $\sqrt{A} \in \mathbb{N}$.

41. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_9$ toate cifrele (într-o anumită ordine) de la 1 la 9.

Dacă A=$a_1, a_2(a_3) + a_2, a_3(a_4) + \ldots + a_8, a_9(a_1) + a_9, a_1(a_2)$ și
B=$a_1, (a_2a_3) + a_2, (a_3a_4) + \ldots + a_8, (a_9a_1) + a_9, (a_1a_2)$, arătați că A=B.

42. Se dau $a = 1,1^{10}$ și $b = 1,1^{11}$. Să se compare numerele a^b și b^a.

43. Să se afle perimetrul unui dreptunghi cu laturile egale cu media aritmetică și media geometrică a numerelor:

$$a=\frac{100+9,8(3)}{0,075+\frac{82}{575}\left(5,(6)-\frac{15}{4}\right)+4\frac{1}{2}:6} \text{ și } b=\frac{7}{5}\left(\frac{715}{23}-\frac{2}{23}\right):6\frac{1}{5}-\frac{24}{25}-\sqrt{4,1616}.$$

44. Dacă $x=\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}$, determinați $(x+2\sqrt{3})^{2004}$.

Soluție: Cum $x<0$ și $x^2=12\Rightarrow x=-2\sqrt{3}$, deci $(x+2\sqrt{3})^{2004}=0$.

45. Arătați că $\left(\sqrt{17-2\sqrt{30}}-\sqrt{17+2\sqrt{30}}+2\sqrt{2}\right)^{2004}=0$

46. Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită numerele:

a) 4; b) $\frac{15}{8}$; c) $\frac{10}{3}$; d) $-\frac{1}{4}$; e) 0; f) $-\frac{1}{6}$; g) $-\frac{29}{11}$; h) $-\frac{125}{13}$.

47. Pentru fracțiile zecimale următoare, determinați numărul rațional care-l reprezintă. Verificați apoi prin algoritmul de împărțire că se obține fracția zecimală inițială:

a) $0,13$; b) $5,14$; c) $0,(6)$; d) -0,(14); e) $0,023(021)$; f) $-2,01(71)$;
g) $-13,1(17)$.

48. Fie $0,a_1a_2a_3\ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Să se determine a_{2004}.

(Bacalaureat, 2000)

49. Scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{37}$ este $0,a_1a_2a_3\ldots$

a) Să se determine cifrele a_1 și a_2.

b) Să se determine cifra a_{2001}.

c) Să se calculeze $S=a_1+a_2+\ldots+a_{2001}$.

(Bacalaureat, 2001)

50. Se consideră numerele raționale $(a_n)_{n\geq 1}$, definite prin $a_1=4$, $a_2=8$ și $a_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$

a) Să se determine numerele a_3,a_4,a_5,a_6,a_7 și a_8.

b) Să se determine numărul a_{2004}

c) Să se calculeze suma $S=a_1+a_2+\ldots+a_2004$.

d) Să se calculeze produsul $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2004}$.

3 Mulţimea numerelor iraţionale

Definiția 2. *Un număr irațional este o fracție zecimală infinită și neperiodică.*

Definiția 3. *Fie $a\geq 0$. Se numește radical de ordinul 2 din a (sau rădăcină pătrată din a), numărul notat $\sqrt{a}$ cu proprietățile: $\sqrt{a}\geq 0,(\sqrt{a})^2=a$.*

Definiția 4. *Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numește radical de ordinul 3 din a (sau rădăcină cubică din a), numărul notat $\sqrt[3]{a}$ cu proprietățile: $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}, (\sqrt[3]{a})^3 = a$.*

51. Să se arate că $\sqrt{7}$ este un număr irațional.

Soluție: Presupunem că $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$, deci există $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ astfel încât $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$ și $\frac{p}{q}$ este fracție ireductibilă. Avem $7 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 7q^2 = p^2$ (1) de unde rezultă că $p^2 \vdots 7$, și deci $p \vdots 7$ adică $p = 7m, m \in \mathbb{Z}$. (2)

Înlocuind în relația (1) obținem $7q^2 = 49m^2$ de unde $q^2 = 7m^2$, adică $q \vdots 7$ (3)

Din (2) și (3) rezultă că fracția $\frac{p}{q}$ nu este ireductibilă. Rezultă că presupunerea $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ este falsă și deci $\sqrt{7}$ este irațional.

52. Să se precizeze care din următoarele numere sunt raționale:

a) $-0,23$; b) $0,1(3)$; c) $\sqrt{5}$; d) $0,1011011101111...$ e) $\sqrt[3]{3}$.

53. Care din următoarele numere sunt iraționale și care raționale ?

a) $\sqrt{9} + \sqrt{25}$; b) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{12}$; c) $\frac{1}{6} + 0,2(3)$; d) $3,(74) - \sqrt{14}$; e) $\frac{5}{6} - 2,8(3)$.

54. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată încercuiește litera **A**. În caz contrar încercuiește litera **F**.

A **F** 1. Numărul 2,2012001200012... este număr rațional

A **F** 2. Numărul 0,123112311123…este număr irațional

A **F** 3. Orice număr irațional scris sub formă de număr zecimal are cel puțin 2 cifre care se repetă de o infinitate de ori.

55. Să se arate că următoarele numere nu sunt raționale:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{7}$; c) $2\sqrt{3}$; d) $1 + \sqrt{3}$; e) $3 + \sqrt{7}$; d) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$; e) $\sqrt[3]{7}$.

56. Să se arate că nu există numere raționale a astfel încât:

a) $a^3 = 2$; b) $a^3 = 5$; c) $a^3 = 4$; d) $a^3 = 6$.

57. Să se indice trei numere naturale n astfel încât:

a) $\sqrt{n}$ este număr rațional; b) $\sqrt[3]{n}$ este număr rațional;

c) $\sqrt{n}$ este număr irațional; d) $\sqrt[3]{n}$ este număr irațional.

58. Să se găsească primele două aproximări zecimale prin lipsă și prin adaus a numerelor:

a) $\sqrt{10}$; b) $-\sqrt{10}$; c) $\frac{178}{13}$; d) $-\frac{11}{23}$; e) $\sqrt{224}$; f) $-\frac{7}{6}$

59. Să se găsească aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 0,001, prin lipsă și prin adaus, pentru numerele:

a) $\frac{28}{3}$; b) $-\frac{28}{3}$; c) $\sqrt{7}$; d) $-\sqrt{7}$; e) $-\frac{13}{7}$; f) $\frac{13}{7}$

60. Să se construiască cu rigla și compasul segmentele de lungime $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$.

61. Determinați primele trei cifre după virgulă pentru $x+y$ și xy în cazurile:

a) $x=21,3125...$, $y=2,4357...$; b) $x=-2,4132$, $y=-5,1232...$; c) $x=\frac{11}{3}$, $y=\sqrt{3}$;
d) $x=1,(27)$, $y=-\sqrt{3}$; e) $x=-\sqrt{7}$, $y=-6,31(45)$.

62. Determinați un număr rațional cuprins între perechile de numere reale:

a) $(0,217;0,218)$; b) $(1;\sqrt{2})$; c) $(\sqrt{5},\sqrt{6})$; d) $(-3,3;-3,22)$; e) $(2,1(4);2,15)$;
f) $(-2,(37);-2,36)$.

63. Scrieți valoarea expresiei:

$$E=\left(\frac{1,4\cdot 0,15}{\frac{3}{4}-0,012:0,02}-\left(\left(0,0(6)+\frac{3}{8}+0,725\right):1,1(6)\right)\right):\left(\left(4\frac{1}{2}-3\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{4}{13}:0,(714285)\right)\right)$$

sub formă de fracție ordinară.

64. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{0,08(3)\cdot x}{0,08(3)\cdot x+0,08(3)}+\frac{0,08(3)\cdot x+0,25}{0,08(3)\cdot x+0,(3)}=\frac{0,1(6)\cdot x+0,1(6)}{0,08(3)\cdot x+0,1(6)}$$ unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-2,-1\}$.

65. Scrieți toate fracțiile ordinare cu numitorul 112, care sunt cuprinse între $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{5}$. Care dintre aceste fracții sunt ireductibile?

66. Găsiți toate numerele naturale d cu care poate fi simplificată fracția $\frac{5n+6}{8n+7}, n\in\mathbb{Z}$.

67. Să se arate că dacă $a\in\mathbb{N}$ și $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{N}$.

68. a) Să se arate că dacă $\alpha\in\mathbb{Q}$ și $\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ atunci $\alpha+\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

b) Să se arate că dacă $\alpha\in\mathbb{Q}^*$ și $\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ atunci $\alpha\cdot\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

c) Să se arate că dacă $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ este rădăcină comună pentru ecuațiile $x^2+ax+b=0$ și $x^2+cx+d=0$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ atunci $a=c$ și $b=d$.

69. a) Arătați că dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ și $a+b\sqrt{2}=0$, atunci $a=b=0$.

b) Determinați $a,b\in\mathbb{Q}$ cu proprietatea $2a+b-3+(a-2b+1)\sqrt{2}=0$.

c) Determinați numerele întregi a și b dacă $1+\sqrt{2}$ verifică ecuația $ax^2+bx-1=0$.

Soluție: a) Dacă $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a$. Dacă $b\neq 0\Rightarrow\sqrt{2}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, fals și deci $b=0$ de unde $a=0$.

b) Conform punctului a) $\Rightarrow\begin{cases}2a+b-3=0\\a-2b+1=0\end{cases}\Rightarrow a=b=1$.

c) Avem $a(1+\sqrt{2})^2+b(1+\sqrt{2})-1=0\Leftrightarrow(3a+b-1)+(2a+b)\sqrt{2}=0\Rightarrow\begin{cases}3a+b-1=0\\2a+b=0\end{cases}$
$\Rightarrow a=1, b=-2$.

70. Arătați că dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și $a + b\sqrt{2} \neq 0$ atunci și $a - b\sqrt{2} \neq 0$

Soluție: Presupunem că $a - b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a + (-b)\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$. Pentru $a = b = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0$

71. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{b} + \sqrt{c},\ \sqrt{c} + \sqrt{a}$ sunt numere raționale. Arătați că:

a) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$

b) $\sqrt{a} + \sqrt{2b} - \sqrt{c} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

72. Determinați numerele întregi x pentru care $\sqrt{x^2 + x + 1} \in \mathbb{Q}$.

73. Să se arate că $\sqrt{n^2 - 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n + 1}$ este un număr irațional pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

74. Să se arate că dacă numerele x, y, z raționale și strict pozitive, verifică relația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, atunci numărul $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este rațional.

75. Se consideră submulțimea $K \subset \mathbb{R}$ formată din numerele reale de forma $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că orice element $x \in K$ se poate scrie sub forma $x = a'(m + n\sqrt[3]{2} + p\sqrt[3]{4})$ unde $a' \in \mathbb{Q}$ și m, n, p sunt numere întregi care nu au nici un divizor prim comun.

b) Să se arate că dacă $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in K$ și $x = 0$ atunci $a = b = c = 0$.

Soluție: a) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și să notăm cu d $c.m.m.m.c.$ al numitorilor lui a, b, c. Atunci putem scrie $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = \frac{1}{d}(ad + bd\sqrt[3]{2} + cd\sqrt[3]{4})$ unde ad, bd, cd sunt numere întregi. Să notăm prin d' $c.m.m.m.c$ al acestor întregi. Dacă $d' = 0$ atunci $a = b = c = 0$. Dacă $d' \neq 0$ atunci $x = \frac{d'}{d}(m + n\sqrt[3]{2} + p\sqrt[3]{4})$ unde $a' = \frac{d'}{d} \in \mathbb{Q}$, iar m, n, p sunt întregi fără divizori comuni, adică c.m.m.m.c al lor $(m, n, p) = 1$.

b) Fie $x = 0$ deci $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$. Pe baza lui a) putem presupune că a, b, c sunt întregi fără divizor comun (exceptând cazul $a = b = c = 0$). Înmulțind cu $\sqrt[3]{2}$ obținem $2c + a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = 0$. Eliminând pe $\sqrt[3]{4}$ între cele două relații rezultă $\sqrt[3]{2}(b^2 - ac) = 2c^2 - ab$. Dacă $b^2 - ac \neq 0$ atunci $\sqrt[3]{2} = \frac{2c^2 - ab}{b^2 + ac} \in \mathbb{Q}$ absurd, deci $b^2 - ac = 0$ și $2c^2 - ab = 0$. Dacă $c \neq 0$ din $b^2 - ac = 0$ rezultă $a = \frac{b^2}{c}$ și cum $2c^2 - ab = 0$ avem $2c^2 - \frac{b^3}{c} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 2$ și $\sqrt[3]{2} = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ fals. Deci $c = 0$ și ținând cont de $b^2 - ac = 0$, $2c^2 - ab = 0$ rezultă $b = 0$ și $a = 0$.

Soluție 2: Avem $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 \Leftrightarrow c\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = -a$. Ridicând la cub obținem: $4c^3 + 2b^3 + 3\sqrt[3]{8}bc(\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2}) = -a^3$ adică $4c^3 + 2b^3 - 6abc = -a^3 \Leftrightarrow 2(2c^3 + b^3 - 3abc) = -a^3$. Cum membrul stâng este par rezultă că $2 \mid a^3$ și deci $2 \mid a$ adică $a = 2k, k \in \mathbb{Z}$.

Avem acum $2(2c^3 + b^3 - 6kbc) = -8k^3$ adică $b^3 = 2(-2k^3 + 3kbc - c^3)$ și deci $2 \mid b^3$ adică $2 \mid b \Rightarrow b = 2q, q \in \mathbb{Z}$.Înlocuind și b obținem $c^3 = 2(-2q^2 + 3kqc - k^3)$ și deci $2 \mid c$. Cum $2 \mid a,\ 2 \mid b,\ 2 \mid c$ este contrazis faptul că a, b, c nu au divizori comuni și deci $a = b = c = 0$.

Observație : Problema se poate generaliza astfel:

Dacă $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $\sqrt[3]{d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci $\alpha\sqrt[3]{d^2} + \beta\sqrt[3]{d} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

76. Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ este un număr irațional.

77. Să se verifice egalitatea $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ și să se arate că $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \in Q$.

Soluție: Fie $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \Rightarrow x^3 = 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)}_{x} \Leftrightarrow x^3 = 4-3x \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0 \Rightarrow x = 1 \in Q$.

Observație: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ și regăsim rezultatul de mai sus.

78. a) Să se calculeze $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)^3$

b) Să se arate că unul dintre numerele $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ este rațional iar celălalt irațional.

79. Arătați că următoarele numere sunt raționale:

a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{15}$; b) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; c) $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$;

d) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

80. Fie $a, b \in \mathbb{Q}$. Arătați că dacă $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}^*$, atunci $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$.

81. Să se arate că $\sqrt[3]{3}$ nu poate fi rădăcină a ecuației $ax^2+bx+c=0$ oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.

3.1 Relații de ordonare

Proprietăți de ordine ale lui $\mathbb{R}$.

1. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \le y$ sau $y \le x$ (relația de ordonare este totală)
2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \le y$, atunci $x+z \le y+z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.
3. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \le y$, atunci $xz \le yz$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$, $z \ge 0$.

82. Arătați că:

a) $x \le y, z \le u \Rightarrow x+z \le y+z$;

b) $xz > yz$ și $z < 0 \Rightarrow x < y$;

c) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$;

d) $-1 < x < 3 \Rightarrow (x+1)(x-3) < 0$;

e) $x^3 < y^3 \Rightarrow x < y$.

83. Să se dea câte un exemplu pentru care următoarele propoziții nu sunt adevărate:

a) $x \leq y, z \leq u \Rightarrow xz \leq yu$;

b) $x < y$ și $xy > 0 \Rightarrow x^2 < y^2$;

c) $(x+1)(x-3) > 0 \Rightarrow x > 3$;

d) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 3x$;

e) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.

84. Dacă apreciezi că propoziția din dreapta numărului de ordine este adevărată încercuiește litera **A.** În caz contrar încercuiește litera **F.**

1. $a = b$ unde $a = \sqrt{625} - 24$ și $b = |\sqrt{144} - 13|$ **A** **F**
2. $x < y$ unde $x = 2 - \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ **A** **F**
3. $m > n$ unde $m = \sqrt{3} - \sqrt{8}$ și $n = \sqrt{2} - \sqrt{7}$ **A** **F**

85. Ordonați următoarele perechi de numere:

a) $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{9}\right)$; b) $(3,43479...; 3,43459...)$; c) $\left(\frac{26}{3}; 8,667\right)$; d) $(-1,1; -1,1(02))$; e) $\left(1,1(6); \frac{7}{6}\right)$;

f) $\left(1,(41); \sqrt{2}\right)$.

86. Comparați numerele:

a) $2^3 + 7^3$ cu $3^3 + 6^3$.

b) $8^{\sqrt{6}}$ cu 2^7 și $2^{3\sqrt{6}}$ cu $5^{2\sqrt{2}}$.

c) $\frac{a+b}{a}$ cu $\frac{a}{a-b}$, dacă $a > b > 0$.

87. Să se ordoneze în mod crescător numerele x, y, z în cazurile:

a) $x = 2 + \sqrt{3},\ y = \sqrt{2} + \sqrt{5},\ z = 1 + \sqrt{6}$;

b) $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4},\ y = 1 + \sqrt[3]{6},\ z = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$;

c) $x = \frac{1}{1+a},\ y = \frac{2}{3+a^2},\ z = \frac{3}{2a^2 - a + 5}$, dacă $a > 0$.

3.2 Demonstrarea unor egalități și inegalități

3.2.1 Egalități

88. Demonstrați următoarele egalități:

a) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,\ (\forall) a, b \in \mathbb{R}$.

b) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),\ (\forall) a, b \in \mathbb{R}$.

d) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),\ (\forall) a, b \in \mathbb{R}$.

e) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,\ (\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$.

f) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

g) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}), (\forall) a, b \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

h) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$

i) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \ldots + b^{2n}),\ (\forall) a, b \in \mathbb{R}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

89. Să se descompună în factori expresia: $E(x,y,z)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

90. Se consideră expresia $E(x,y)=\dfrac{x^2+4xy+4y^2-9}{x^2+4y^2+4xy+6X+12y+9}$

a) Simplificați expresia;

b) Arătați că $E(x,y)\neq 1, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

91. Se dă expresia:

$E(x)=\dfrac{8x-12}{4x^2-12x+9}-\dfrac{5x}{2x^2+3x}-\dfrac{20x}{9-4x^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{3}{2}\right\}$

a) Să se arate că $E(x)=\dfrac{9}{2x-3}$

b) Să se găsească mulțimea valorilor naturale ale lui x pentru care expresia $E(x)$ este un număr natural.

92. Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă expresia

$E(x)=\left(\dfrac{x^2+8}{x^3-8}+\dfrac{x}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{2}{2-x}\right),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ este $E(x)=\dfrac{1}{x+2}$

.

93. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E_1(x)=\left(\dfrac{x^2+2x+9}{x^3+3x^2+3x-7}+\dfrac{x-1}{x^2+4x+7}-\dfrac{1}{x-1}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}-\dfrac{2}{1-x}\right)$,
$x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$

b) $E_2(x,y)=\left(\left(\frac{x+y}{x+y+1}-\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2+2xy+2x+2y+1}\right):\left(\frac{x+y}{x^2+y^2+2xy-1}-\frac{1}{x+y+1}\right)\right)\cdot\frac{x+y+1}{x+y},\ x,y>1.$

94. Demonstrați că, pentru orice număr natural $n\geq 2$, avem $\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1$.

3.2.2 Inegalități

95. Demonstrați următoarele inegalități:

a) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2,\ (\forall)a,b\in\mathbb{R}$

b) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2, (\forall)a,b>0.$

c) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}\geq 6,\ (\forall)a,b,c>0$

d) $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc,\ (\forall)a,b,c\in\mathbb{R}.$

e) $x^2+y^2+z^2+\dfrac{3}{4}\geq x+y+z,\ (\forall)x,y,z\in\mathbb{R}.$

f) $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}\geq\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x},\ (\forall)x,y,z\in\mathbb{R}_+^*.$

h) $\min\{a,b\}\leq\dfrac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\leq\max\{a,b\},\ (\forall)a,b>0$ (inegalitatea mediilor)

Indicații: a) și b) inegalitatea este echivalentă cu $(a-b)^2 \geq 0$; c) Se aplică b); d) Inegalitatea este echivalentă cu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$; e) Inegalitatea se poate scrie $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$; f) În d) punem $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$; h) Prin ridicare la pătrat și calcul direct.

Observație. Inegalitatea mediilor se poate generaliza pentru n numere reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Notăm: $m=\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $m_h=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ (media armonică),

$m_g=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot \ldots, \cdot a_n}$, (media geometrică), $m_a=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, (media aritmetică),

$m_p=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$, (media pătratică) și $M=\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

$$m \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq M$$

96. a) Arătați că dacă $x, y>0$ atunci $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2} \geq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

b) Arătați că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci:
$\dfrac{a+b}{c^2}+\dfrac{b+c}{a^2}+\dfrac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

(Etapa județeană, 2005)

97. a) Să se arate că $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}, \forall a, b>0$

b) Să se arate că $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq 2\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\right), \ \forall x, y, z>0.$

98. Folosind inegalitatea mediilor demonstrați următoarele inegalități:

a) $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz, (\forall) x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$.

b) $a^2+b^2+d^2+c^2+ab+dc \geq 6$ dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ și $abcd=1$.

c) $\sqrt{a(1-b)}+\sqrt{b(1-a)} \leq 1$ dacă $a, b \in [0, 1]$

d) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \leq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{abc}}, (\forall) a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

e) $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2, (\forall) a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Indicații: a) $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ și analoagele se înmulțesc membru cu membru. b) $a^2+b^2+d^2+c^2+ab+dc=\underbrace{(a^2+b^2)}_{\geq 2ab}+\underbrace{(d^2+c^2)}_{\geq 2dc}+\underbrace{(ab+dc)}_{\geq 2abcd=2}\geq 2\underbrace{(ab+dc)}_{\geq 2abdc=2}+2 \geq 2\cdot 2+2=6$.

c) $\sqrt{a(1-b)}+\sqrt{b(1-a)} \leq \dfrac{a+1-b}{2}+\dfrac{b+1-a}{2}=1$. d) $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{1}{a+b} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$

și analoagele însumate. e) $\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}=1\cdot\sqrt{\dfrac{b+c}{a}} \leq \dfrac{1+\frac{b+c}{a}}{2}=\dfrac{a+b+c}{2a} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b+c}} \geq \dfrac{2a}{a+b+c}$ și analoagele însumate.

99. Să se arate că $\frac{(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)\ldots(x_n^2+x_n+1)}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\geq 3^n$, oricare ar fi numerele pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Indicație: $\frac{(x_1^2+x_1+1)}{x_1}=x_1+1+\frac{1}{x_1}\geq 3$ și analoagele se înmulțesc membru cu membru.

100. Să se arate că:

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq\frac{3}{2},\ (\forall)a,b,c\in(0,\infty)$$

Indicație: Conform inegalității mediilor avem $\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}=\sqrt{\frac{a}{a+b}}\cdot\sqrt{\frac{a}{a+c}}\leq\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}}{2}$ și încă două inegalități analoage.

101. Arătați că dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ atunci

$$\frac{a}{a^3+b^3+abc}+\frac{b}{b^3+c^3+abc}+\frac{c}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Indicație: Din $a^2-ab+b^2\geq ab$ deducem $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b)$ și deci $a^3+b^3+abc\geq ab(a+b+c)$ adică $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{c}{abc(a+b+c)}$ etc.

102. Demonstrați că $2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-2\geq 0,\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}_+^*$.

Indicație: Notăm $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t\geq 2\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=t^2-2$ etc.

103. Fie $a,b,c\in(0,+\infty)$ cu proprietatea $a+b+c=1$. Să se arate că $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$.

104. Arătați că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2},(\forall)a,b,c\in(0,\infty)$.

Soluția 1: Notăm $b+c=2x, a+c=2y, b+a=2z\Rightarrow a+b+c=x+y+z$, $a=y+z-x$, $b=x+z-y$, $c=x+y-z$ și inegalitatea este echivalentă cu $\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{x}{z}+\frac{z}{x}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{y}{z}+\frac{z}{y}}_{\geq 2}\geq 6$.

Soluția 2: În $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ cu $x,y,z\in(0,\infty)$ (demonstrați!) punem $x=b+c$, $y=c+a$ și $z=a+b$.

Soluția 3: Inegalitatea fiind simetrică, fără afectarea generalității putem presupune $a\geq b\geq c$. Atunci $\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$. Rezultă $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$ și $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$ care adunate membru cu membru dau inegalitatea din enunț.

105. Demonstrați că $\frac{a^2+p^2}{b+c}+\frac{b^2+p^2}{c+a}+\frac{c^2+p^2}{a+b}\geq 3p,\ \forall a,b,c>0, p\in\mathbb{R}$.

106. Fie x și y două numere reale pozitive. Să se arate că $\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}\geq\frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y}$ oricare ar fi numerele reale α și β.

107. Fie x, y și z trei numere reale pozitive. Să se arate că $\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}+\frac{\gamma^2}{z}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{x+y+z}$, oricare ar fi numerele α, β, γ.

Observație. Inegalitatea se poate generaliza. Fiind date $n\geq 1$ numere reale pozitive $a_1, \alpha_2, \ldots, a_n$, are loc inegalitatea $\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, oricare ar fi n numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sub acestă formă este cunoscută ca inegalitatea lui Cauchy-Schwartz

108. Dacă $a, b, c\in(0,+\infty)$ și $a\cdot b\cdot c=1$, demonstrați că $\frac{a}{2+bc}+\frac{b}{2+ac}+\frac{c}{2+ab}\geq 1$.

109. Fie $x, y, z\in(0,+\infty)$. Să se demonstreze inegalitatea
$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

110. a) Arătați că dacă $a, b, c\in(0,+\infty)$ astfel încât $a+b+c=1$, atunci:
$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\geq\frac{9}{5}$$
b) Arătați că dacă $a, b, c\in(0,+\infty)$ astfel încât $a+b+c=p$, atunci:
$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\geq\frac{9}{3+2p}.$$

3.2.3 Test de evaluare

Un singur răspuns este corect. Bifați litera corespunzătoare răspunsului considerat corect.

1. Rezultatul calculului: $1,1(7)+1,2(3)$ este:

A 2,3 B 2,4(1) C 2,3(1) D 2,2(9) E 2,4.

2. Valoarea cu două zecimale exacte a numărului $\sqrt{27}$ este:

A 5,20; B 5,15; C 5,19; D 5,18; E 5,17.

3. Scrisă sub formă de fracție zecimală, fracția $\frac{17}{14}$ are perioada formată din x cifre. Valoarea lui x este:

A 3; B 4; C 6; D 1.25; E 5.

4. Scris sub formă de fracție ordinară numărul 0,314(18) este:

A $\frac{15709}{49950}$; B $\frac{288}{925}$; C $\frac{31418}{99999}$; D $\frac{5}{13}$; E $\frac{432}{1375}$.

5. Valoarea sumei $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{97\cdot 99}$ este:

A 0,(49); B 0,47; C 0,(48) ; D 0,50 ; E 0,(51).

3.2.4 Test de evaluare

1. Dați exemplu de două numere iraționale al căror sumă și produs este un număr rațional.

2. Există numere iraționale pentru care numai două cifre se repetă de o infinitate de ori. De exemplu: 3,101001000100001...

Dați un exemplu de număr irațional în care numai trei cifre se repetă de o infinitate de ori.

3. Să se arate că:

a) $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. Se dau numerele: $a = 2^{2^2}$, $b = 2^{22}, c = 222$, $d = 22^2$, $e = (2^2)^2$

Să se ordoneze crescător cele cinci numere.

5. Să se compare numerele $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ și $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$

6. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0$

7. Se dă expresia:

$$E(a) = \left(\frac{a+2}{a-2} - \frac{4a}{4-a^2} - \frac{2-a}{a+2}\right) \cdot \left(\frac{2-a^2}{a^2+2a+4} - \frac{3a^2-12}{a^3-8} + \frac{a}{a-2}\right) : \frac{2}{a-2}, a \neq \pm 2$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă;

b) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care expresia este un număr întreg.

c) Să se arate că $z(x^2+y^2)+x(y^2+z^2)+z(x^2+z^2) \geq 6xyz, (\forall)x, y, z > 0$

3.3 Modulul unui număr real

Definiția 5.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Proprietățile modulului

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}; |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.
3. $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
4. $||x| - |y|| \leq |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
5. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$.
6. Fie $c > 0$ şi $x \in \mathbb{R}$. Atunci:

$|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c \Leftrightarrow x \in (-c, c)$

$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c \Leftrightarrow x \in [-c, c]$

$|x| > c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

$|x| \geq c \Leftrightarrow x \in (-\infty, c] \cup [c, \infty)$

1. Determinați valoarea absolută a numerelor reale:

a) -7,3; b) $\sqrt{7}$; c) $\sqrt{5}-\sqrt{7}$; d) $-\frac{7}{3}$; f) $3-\sqrt{5}$.

2. Exprimați cu ajutorul modulului următoarele inegalități:

a) $y-7<x<y+7$; b) $-6<x<10$; c) $-3<x<7$; d) $x<-3$ sau $x>7$.

3. Arătați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $|x-2|<5, |y-3|<7$, atunci $-7<x+y<17$.

4. Rezolvați ecuațiile:

a) $|x|=4$; b) $|x-3|=5$; c) $|-x-3|=7$; d) $|3x-6|=5$; e) $|2x-4|=x+2$.

5. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care:

a) $|2x-4|+|3x-6|=0$; b) $|2x-3|+|2x+3|=0$; c) $|x-1|+|2-2x|+|3x-3|=0$.

Exemplu rezolvat: a) Cum $|2x-4|\geq 0$ și $|3x-6|\geq 0$ egalitatea are loc numai dacă $|2x-4|$ și $|3x-6|$ sunt simultan nule, adică dacă $\begin{cases} 2x-4=0 \\ 3x-6=0 \end{cases}$ de unde $x=2$.

6. Să se rezolve ecuația $|x-1|-2|x+2|=0$.

Soluție: Semnul expresiilor $x-1$ și $x+2$ este dat în tabelul următor:

x	$-\infty$		-2			1		∞
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

a) Pentru $x\in(-\infty,-2]$ ecuația devine: $-x+1-2(-x-2)=0$ de unde $x=-5$ care convine deoarece $-5\in(-\infty,-2]$.

b) Pentru $x\in(-2,1]$ ecuația devine: $-x+1-2(x+2)=0$ de unde $x=-1$ care convine deoarece $-1\in(-2,1]$.

c) Pentru $x\in(1,\infty)$ ecuația devine: $x-1-2(x+2)=0$ de unde $x=-5$ care nu convine deoarece $-5\in(1,\infty)$.

Deci mulțimea soluțiilor este $S=\{-5,-1\}$.

7. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $3+2|1+x|=|2x-1|$ pentru $|x|\leq 1$.

b) $3|x|+2|x+1|=|x-4|$ pentru $|x|>3$.

c) $3-3|x|-|2x-1|=|x-2|$ pentru $x\in[-2,1]$.

8. Să se determine rădăcinile ecuației:
$\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=a$ în funcție de valorile parametrului real a.

9. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x-1|+|x+2|=7$; b) $|x+1|+|x-3|=x+2$; c) $|2x+1|-|7x-2|+|x-3|=2$;
d) $|x+1|+|2x+1|+|3x+1|=3$; e) $|x+|x+1||+|x-|x+1||=4$.

10. Fie k un număr real. Să se determine valorile lui k astfel încât ecuația $|x+1|-|x-1| = kx+1$ să aibă soluție unică.

11. Să se determine valorile numărului real k astfel încât ecuația $|x-2|-|x+2|-2 = kx$ să aibă soluție unică.

12. Să se determine valorile numărului real k astfel încât ecuația $|x-2|+|x+2| = kx+2$ să aibă soluție unică.

13. Rezolvați inecuațiile:

a) $|x| < 3$; b) $|x| > 6$; c) $|x-2| \leq 5$; d) $|x-4| < 9$; e) $|2x+3| > 5$; f) $|x-1|+x < 2$.

14. Să se rezolve inecuațiile:

a) $|x-1|+|2x-1| < 2$;

b) $|x+2| > 2x+|2x-7|$;

c) $|2x+1| > |3x+1|+|4x+1|$;

d) $|3x-|x+1|| \leq 1$;

e) $|3x-|x+1||+|3x+|x+1|| \geq 3$.

15. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} |x|+y = 2 \\ 2|x-1|-y = 8 \end{cases}$

Indicație: Din prima ecuație $\Rightarrow y = 2-|x|$, care introdusă în a doua rezultă $2|x-1|+|x| = 10 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{8}{3}, 4\right\}$.

Soluție $S = \left\{\left(-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right), (4,-2)\right\}$.

16. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} 2|x|+9|y| = 20 \\ 3|x|+y = 5 \end{cases}$

17. Arătați că dacă $|x-2| < 1$, $|y-2| < 1$ atunci $|xy-2(x+y)+4| < 1$.

Soluție: Avem: $|xy-2(x+y)+4| = |(x-2)(y-2)| = |x-2| \cdot |y-2| < 1 \cdot 1 = 1$.

18. Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $|ax-b| \leq c$, $|bx-c| \leq a$ și $|cx-a| \leq b$. Demonstrați că $0 \leq x \leq 2$

19. Să se arate că dacă $|a| < 1$, $|b-1| < 10$, $|a-c| < 100$, atunci $|ab-c| < 110$.

20. Să se arate că dacă $a \in \mathbb{R}$ și $|a+1| \leq 1, |a^2+1| \leq 1$, atunci $|a| \leq 1$.

21. Fie $a, b \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $|a| \leq 5$, $|b| \leq 5$ și $|5b^2-3a^2| \geq 1$. Să se arate că: $|a\sqrt{3}+b\sqrt{5}| > \frac{1}{20}$.

22. Arătați că dacă $|a| < 1$, $|b| < 1$ atunci $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$.

23. Arătați că dacă $0 < x < 2$ și $0 < y < 2$, atunci $\left|\frac{x-y}{x+y-xy}\right| < 1$.

24. Fie $a, b, x \in \mathbb{R}$ care verifică inegalitățile:
$|a + x + b| \leq 1, \quad |4a + 3x + b| \leq 1, \quad |9a + 7x + 4b| \leq 1$. Să se arate că $|x| \leq 15$.

25. Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $|ax - b| \leq c$, $|bx - c| \leq a$ și $|cx - a| \leq b$. Să se arate că $0 \leq x \leq 2$.

3.4 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiția 6. *Partea întreagă a numărului real a, notată $[a]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a.*

Definiția 7. *Partea fracționară a numărului real a, este numărul notat $\{a\}$ și egal cu $\{a\} = a - [a]$*

Proprietăți

1. $\forall\, a \in \mathbb{R}$,avem $[a] \in \mathbb{Z}$ și $[a] \leq a < [a] + 1 \Leftrightarrow a - 1 < [a] \leq a$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}$, avem $0 \leq \{a\} < 1$.
3. Pentru $m \in \mathbb{Z}, [x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m + 1)$ (toate numerele reale cuprinse între două numere întregi consecutive au aceeași parte întreagă).
4. $x, y \in [m, m + 1) \Leftrightarrow [x] = [y]$.
5. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
6. $[m + x] = m + [x], \quad \{x + m\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$.
7. $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$. (Identitatea lui Hermite)

26. Precizați partea întreagă pentru fiecare din numerele:
$5{,}17; \quad -5; \; 6{,}0(8); \quad -\frac{316}{45}; \quad \sqrt{5}; \quad -\sqrt{7}$.

27. Precizați partea fracționară pentru fiecare din numerele:
$9{,}33; \; -11{,}45; \; 3{,}3(7); \; -3{,}(13); \; -2{,}1(23); \; \frac{26}{3}$.

28. Să sa arate că $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + [\sqrt{5 \cdot 6}] = 11$.

Soluție: Avem următoarele egalități: $[\sqrt{1 \cdot 2}] = 1$, $[\sqrt{2 \cdot 3}] = 2$, $[\sqrt{3 \cdot 4}] = 3$, $[\sqrt{5 \cdot 6}] = 5$, care adunate dau valoarea 11.

29. Să se calculeze expresia : $E(x) = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[\frac{x+2}{x+1}\right] + \ldots + \left[\frac{x+1000}{x+999}\right]$

a) pentru x= $\frac{4}{3}$; b) pentru x= $\frac{3}{4}$

Soluție: Avem E= $\left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[1 + \frac{1}{x+1}\right] + \ldots + \left[1 + \frac{1}{x+999}\right] = 1000 + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{x+1}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{x+999}\right]$. Deoarece $\left[\frac{1}{x+k}\right] = 0$ pentru $x > 0$ și $k \geq 1 \Rightarrow E\left(\frac{4}{3}\right) = 1000$ și $E\left(\frac{3}{4}\right) = 1001$.

30. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $[2x] = 5$.

Soluție: Avem $[2x] = 5 \Leftrightarrow 2x \in [5, 6) \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$.

31. Rezolvați ecuațiile: a) $[3x] = 7$; b) $[6x] = -3$; c) $[2x + 4] = 3$;d) $[3x - 5] = 7$.

32. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} [x] + [y] = 4 \\ [x] \cdot [y] = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} [x] + [y] = 2 \\ [x] \cdot [y] = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2 \cdot [x] + 3 \cdot [y] = 5 \\ [x] + 2 \cdot [y] = 4 \end{cases}$

33. Calculați $[x] + [y]$ și $[x + y]$ și comparați aceste numere în cazurile:

a) $x = 5,\ y = 9$; b) $x = -3, y = 8$; c) $x = -3,6,\ y = 9,7$; d) $x = 3,(4); y = \frac{7}{3}$;
e) $x = -3,4,\ y = -10,7$.

34. Calculați $\{x\} + \{y\}$ și $\{x + y\}$ și comparați aceste numere în cazurile:

a) $x = 5,1,\ y = 9$; b) $x = -3, y = 8,7$; c) $x = -3,6,\ y = 9,7$; d) $x = 3,(24)$;
$y = \frac{7}{3}$; e) $x = -3,7,\ y = -10,2$.

35. Arătați că dacă x, y sunt numere reale, atunci $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

36. Arătați că dacă x, y sunt numere reale, atunci $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$.

37. Calculați $[x] \cdot [y]$și $[xy]$ și comparați aceste numere în cazurile:

a) $x = 5,3,\ y = 9,7$; b) $x = -3,4, y = -8,5$; c) $x = -3,6, y = -9$; d) $x = 3,(4); y = \frac{7}{3}$; e) $x = -4,4,\ y = -10,7$.

38. Să se arate că dacă: a) $x, y \geq 0$, atunci $[xy] \geq [x][y]$
b) $x, y \leq 0$, atunci $[xy] \leq [x][y]$

39. Să se rezolve ecuația $\left[\frac{x+3}{4}\right] = \frac{x-2}{3}$.

Soluție: Se impun condițiile: $\frac{x+3}{4} - 1 \leq \left[\frac{x+3}{4}\right] < \frac{x+3}{4}; \frac{x-2}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-1}{4} \leq \frac{x-2}{3} < \frac{x+3}{4}; \frac{x-2}{3} \in \mathbb{Z}$. Din $\frac{x-2}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3k + 2,\ k \in \mathbb{Z}$, iar din sistem $x \in (5, 17]$. Deci $3k + 2 \in (5, 17] \Rightarrow k \in (1, 5] \cap \mathbb{Z} = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow x \in \{8, 11, 14, 17\}$.

40. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x+1}{3}\right] = x + 2$; c) $\left[\frac{3x+4}{5}\right] = \frac{4x+3}{5}$; e) $\left[\frac{12x-5}{3}\right] = \frac{19x+16}{10}$;

b) $\left[\frac{5x+1}{3}\right] = 2x - 1$; d) $\left[\frac{7x-6}{5}\right] = \frac{2x+1}{2}$; f) $\left[\frac{x-2}{3}\right] = \frac{x+2}{4}$.

41. Rezolvați ecuația $x + [x] = 13\{x\}$ unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a lui x.

42. Să se rezolve ecuația: $[x+1]+[x-2]-[x+3]=2$.

Soluție: Ecuația se mai poate scrie: $[x]+1+[x]-2-[x]-3=2 \Leftrightarrow 3[x]=6 \Leftrightarrow [x]=2 \Leftrightarrow x\in[2,3)$.

43. Să se rezolve ecuațiile: a) $[x+2]+[x-5]+[x+3]=1$; b) $[x+1]+[x+2]-[x+3]=3x$; c) $[2x+1]+[2x-2]-[2x+5]=10$.

44. Să se rezolve ecuația $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x+2}{3}\right]+\left[\frac{2x+5}{3}\right]=\frac{x+1}{3}$.

Soluție: Fie $\frac{2x-1}{3}=y$. Rezultă $x=\frac{3y+1}{2}, \frac{2x+2}{3}=y+1, \frac{2x+5}{3}=y+2, \frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}$. Ecuația devine $[y]+[y+1]+[y+2]=\frac{y+1}{2} \Leftrightarrow [y]+[y]+1+[y]+2=\frac{y+1}{2} \Leftrightarrow [y]=\frac{y-5}{6} \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=-1$.

45. Să se arate că $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

46. Arătați că $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$.

Indicație: b) Se disting cazurile $1^0.\ 0\le\{x\}<\frac{1}{3}$; $2^0.\ \frac{1}{3}\le\{x\}<\frac{2}{3}$; $3^0.\ \frac{2}{3}\le\{x\}<1$.

Observație: Identitățile din problema 45, respectiv 46 sunt cazuri particulare ale identității lui Hermite.

47. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]+\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{8x-7}{6}$.

Soluția 1: Notăm $\frac{2x-1}{3}=y$. Rezultă $x=\frac{3y+1}{2}, \frac{2x}{3}=y+\frac{1}{3}, \frac{2x+1}{3}=y+\frac{2}{3}, \frac{8x-7}{6}=\frac{4y-1}{2}$. Ecuația devine $[y]+\left[y+\frac{1}{3}\right]+\left[y+\frac{2}{3}\right]=\frac{4y-1}{2} \Leftrightarrow [3y]=\frac{4y-1}{2}$. Se impun condițiile: $3y-1<\frac{4y-1}{2}\le 3y$, $\frac{4y-1}{2}\in\mathbb{Z}$. Sistemul de inecuații conduce la $y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ și cum $\frac{4y-1}{2}=k\in\mathbb{Z} \Rightarrow y=\frac{2k+1}{4}\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2}\le k<\frac{1}{2}$. Deoarece $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\{-1,0\} \Rightarrow y\in\left\{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\} \Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right\}$.

Soluția 2: Avem $\frac{2x-1}{3}-1<\left[\frac{2x-1}{3}\right]\le\frac{2x-1}{3}; \frac{2x}{3}-1<\left[\frac{2x}{3}\right]\le\frac{2x}{3}; \frac{2x+1}{3}-1<\left[\frac{2x+1}{3}\right]\le\frac{2x+1}{3}$. Adunând membru cu membru cele trei inegalități obținem $2x-3<\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right]+\left[\frac{2x+1}{3}\right]\le 2x$, adică $2x-3<\frac{8x-7}{6}\le 2x$. Rezolvând sistemul de inecuații obținem $x\in\left[-\frac{7}{4},\frac{11}{4}\right)$. Cum $\frac{8x-7}{6}=k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{6k+7}{8}\in\left[-\frac{7}{4},\frac{11}{4}\right) \Rightarrow k\in\left[-\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$. Deoarece $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\{-3,-2,-1,0,1,2\} \Rightarrow x\in\left\{-\frac{11}{8},-\frac{5}{8},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\frac{13}{8},\frac{19}{8}\right\}$. Soluțiile posibile ale ecuației se află în mulțimea $\left\{-\frac{11}{8},-\frac{5}{8},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\frac{13}{8},\frac{19}{8}\right\}$. Prin verificare se constată că numai $\frac{1}{8}$ și $\frac{7}{8}$ convin.

48. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3}$; b) $\left[\frac{5x-2}{4}\right]+\left[\frac{15x-2}{12}\right]+\left[\frac{15x+2}{12}\right]=\frac{5x-3}{2}$.

49. Să se rezolve ecuația $\left[\frac{x-2}{2}\right]+\left[\frac{2x-1}{4}\right]=\frac{3}{2}x-2$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Etapa locală, Galați, 2009.

50. Să se determine prima zecimală după virgulă a numărului $N=\sqrt{9n^2+4n}, n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție 1: Prima zecimală după virgulă a lui N este dată de $[10\{N\}]$, unde [x], respectiv $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x.

Cum $3n<\sqrt{9n^2+4n}<3n+1, (\forall)n\in N^*$, rezultă că $[\sqrt{9n^2+4n}]=3n, (\forall)n\in N^*$, deci $\{N\}=N-[N]=\sqrt{9n^2+4n}-3n=\frac{4n}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}$ și $[10\{N\}]=\left[\frac{40n}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}\right]$.

Cum $3n<\sqrt{9n^2+4n}<3n+1\Rightarrow 6n<\sqrt{9n^2+4n}+3n<6n+1\Rightarrow\frac{1}{6n+1}<\frac{1}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}<\frac{1}{6n}\Rightarrow\frac{40n}{6n+1}<\frac{40n}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}<\frac{40n}{6n}\Rightarrow 6+\frac{4n-6}{6n+1}<\frac{40n}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}<\frac{20}{3}<7$ și deci $\left[\frac{40n}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}\right]=6$.

Soluție 2: Ca mai sus $[\sqrt{9n^2+4n}]=3n, (\forall)n\in N^*$. Pentru $n=1\Rightarrow\sqrt{9n^2+4n}=\sqrt{13}=3.6056$. Arătăm că $3n+\frac{6}{10}<\sqrt{9n^2+4n}<3n+\frac{7}{10}$. Prin ridicare la pătrat și rezolvarea sistemului de inecuații rezultat obținem $n>\frac{9}{10}$, adevărat $\forall n\in\mathbb{N}^*$, și deci prima zecimală după virgula a numărului N este 6.

51. Să se determine $\left[5\cdot\{\sqrt{n^2+2n}\}\right], n\in N^*$.

52. Se consideră numărul A=$\sqrt{n^2+n}, n\in\mathbb{N}$.

a) Arătați că A este irațional $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Aflați partea întreagă a numărului A.

c) Care este prima zecimală a numărului A ?

53. Câte soluții are ecuația: $\left\{\frac{x}{2}\right\}=\left\{\frac{x}{5}\right\}$ dacă $x\in(0,2004)$

54. Se dă ecuația: $\left[\frac{m^2x-1}{2}\right]=\frac{2x+1}{5}, m\in\mathbb{Z}^*$. Dacă q este numărul rădăcinilor ecuației și S este suma lor, să se afle q și S.

55. Se dă ecuația: $\left[\frac{m^2x+m^2-1}{2}\right]=\frac{2x+3}{5}, m\in\mathbb{Z}^*$. Dacă q este numărul rădăcinilor ecuației și S este suma lor, să se afle q și S.

56. Să se arate că: $\left[\frac{(n+1)}{2}x-\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n}\right]=0$.

57. Să se rezolve inecuația: $x-[x]\leq 1-\{x\}$

58. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Sever Pop

59. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+[y]=11,8 \\ 2\cdot[x]+y=13,3 \end{cases}$

Indicație: Prima ecuație este echivalentă cu $[x]+\{x\}+[y]=11,8 \implies \{x\}=0,8$ și $[x]+[y]=11$. Analog din ecuația a doua rezultă $\{y\}=0,3$ și $2\cdot[x]+[y]=13$. Soluții: x=2,8 și $y=9,3$.

60. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+[y]=12,8 \\ [x]+3y=18,2 \end{cases}$

(etapa locală, Alba Iulia,2001, prof. Valentin Ivașcu)

61. Rezolvați în $R\times R$ sistemul: $\begin{cases} [x]+2\cdot[y]=4 \\ x^2+y^2=8,5 \end{cases}$ știind că $x,y\in(0,\infty)$ și $x+y\in\mathbb{N}$.

Soluție 1: Folosim inegalitatea $(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$ cu egalitate pentru $x=y$. Pentru $x\neq y$ avem $8,5=x^2+y^2\leq(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)=2\cdot 8,5=17$. Din $\begin{cases} 8,5\leq(x+y)^2\leq 17 \\ x+y\in\mathbb{N} \end{cases}\Rightarrow$ $x+y=3$ sau $x+y=4$. Obținem sistemele: $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=8,5 \end{cases}$, respectiv $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=8,5 \end{cases}$ cu soluțiile $\left\{x=\frac{3-2\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$, $\left\{x=\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right\}$ respectiv $\left\{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{5}{2}\right\}, \left\{x=\frac{5}{2}, y=\frac{3}{2}\right\}$.

Ecuația $[x]+2\cdot[y]=4$ este verificată doar de $\left\{x=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}, y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$, respectiv $\left\{x=\frac{5}{2}, y=\frac{3}{2}\right\}$ care sunt soluțiile problemei.

Soluție 2: Cum $x,y\in(0,\infty)\Rightarrow[x],[y]\in\mathbb{N}$ și ținând cont de ecuația $[x]+2\cdot[y]=4$, rezultă că $[x]\in\{0,2,4\},[y]\in\{0,1,2\}$. Ecuația este verificată de perechile:

$a)\begin{cases}[x]=0\\[y]=2\end{cases}$ $b)\begin{cases}[x]=2\\[y]=1\end{cases}$ $c)\begin{cases}[x]=4\\[y]=0\end{cases}$ Situația $a)$ conduce la $x\in[0,1), y\in[2,3)\Rightarrow x+y\in[2,4)$. Cum $x+y\in N\Rightarrow x+y=2$ sau $x+y=3$ și avem de rezolvat sistemele $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=8,5 \end{cases}$ respectiv $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=8,5 \end{cases}$. Primul sistem nu are soluții reale, iar soluțiile celui de al doilea sistem sunt $\left\{x=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}, y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{x=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}, y=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right\}$. Sistemul inițial este verificat de $\left\{x=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}, y=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$. Analog se tratează cazurile $b)$ respectiv $c)$.

62. Rezolvați în $R \times R$ sistemul: $\begin{cases} 2 \cdot [x] + [y] = 3 \\ x^2 + y^2 = 12,5 \end{cases}$ știind că $x, y \in [0, \infty)$ și $x + y \in \mathbb{N}$.

63. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ y + [z] + \{x\} = 2.2 \\ z + [x] + \{y\} = 3.3 \end{cases}$ unde $[a], \{a\}$ sunt partea întreagă și respectiv partea fracționară a lui $a \in \mathbb{R}$.

64. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 2,5 \\ y + [z] + \{x\} = 8.2 \\ z + [x] + \{y\} = 1.3 \end{cases}$ unde $[a], \{a\}$ sunt partea întreagă și respectiv partea fracționară a lui $a \in \mathbb{R}$.

3.4.1 Test de evaluare

1. Rezultatul calculului $\left[\sqrt{1 \cdot 2}\right] + \left[\sqrt{2 \cdot 3}\right] + \left[\sqrt{3 \cdot 4}\right]$, unde $[\,x]$ reprezintă partea întreagă a lui x, este:

A 3; B 5; C 6; D 4; E 7.

2. Rezultatul calculului $\{1,1(7)\} + \{1,2(3)\}$ unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x este:

A 0; B 0,3; C 0,3(1); D 0,4(1); E 1.

3. $\sum_{k=1}^{10} \left[\sqrt{k^2 + k}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x, este:

A 10; B 25; C 50; D 100; E 55.

4. Dacă $|3x^2 - 2| \leq 1$ atunci $6x^2 + 5$ aparține intervalului:

A $[-1, 3]$; B $[7, 11]$; C $(-3, 1)$; D $[-1, 1]$; E $[2, 5]$.

5. Suma pătratelor rădăcinilor ecuației $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ este:

A 13; B 26; C 10; D 16; E 36 .

6. Mulțimea soluțiilor inecuație $\frac{1}{|x-4|} \leq 1$ este:

A $\mathbb{R} \setminus \{4\}$; B $[3, 5]$; C $(-\infty, -3] \cup [5, \infty)$; D $(-\infty, -3) \cup (5, \infty)$; E $\varnothing$; F $\mathbb{R}$.

7. Numărul de soluții ale ecuației $\{x\} = x + 5$ este:

A 0; B 1; C 10; D 4; E infinit.

8. Numărul de soluții ale sistemului $\begin{cases} x + [y] = 10,7 \\ 2 \cdot [x] + y = 12,3 \end{cases}$ este:

A 0; B 1; C 4; D 2; E $\varnothing$.

3.4.2 Test de evaluare

1. Să se rezolve ecuația:

$4 \cdot |x-2| - |x-1| - 2x = 1$

2. Să se rezolve inecuația:

$|x-1| - 4 \cdot |x-2| + 2x > 1$

3. Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ egalitatea $\left[\frac{x-2}{3}\right] = \frac{x+3}{4}$ este adevărată?

4. Să se rezolve ecuația:

Aflați $\left[\sqrt{n^2+3n}\right], n \in \mathbb{N}^*$.

5. Arătați că $\left\{\sqrt{n^2+3n}\right\} < \frac{1}{2}, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

6. Rezolvați ecuația $\left[\frac{x+9}{8}\right] + \left[\frac{x-7}{8}\right] = \frac{2x-1}{6}, x \in R$

3.5 Mulțimi

Incluziunea mulțimilor $A \subset B$ dacă $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$
Egalitatea mulțimilor $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$
Operații cu mulțimi:

Reuniunea $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$
Intersecția $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$
Diferența $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$
Complementara Fie $A \subset E$. Complementara mulțimii A în raport cu mulțimea E este mulțimea $C_E A = \{x \mid x \in E \text{ și } x \notin A\} = E \setminus A$.
Produsul cartezian $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$ unde (x, y) sunt perechi ordonate.
Mulțimea părților unei mulțimi A este mulțimea tuturor submulțimilor lui A. Se notează $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

1. Se consideră mulțimile $A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$, $E = \{1, 4, 5, 8\}$, $C = \{3, 5, 7\}$. Determinați mulțimile $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$.

2. Se dau mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$;
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$;
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0,5\}$;
g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{7}\}$;
h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\pi\}$.
i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi < x < \pi\}$.

Scrieți-le sub formă de interval.

3. Aceeași problemă pentru mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -1\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{2}\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -1,2 \leq x \leq \sqrt{2}\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-a < x < 1+a, a > 0\}$;

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{3}\}$;

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \pi\}$.

4. Calculați:

a) $[1,2] \cup (0,3]$;

b) $(-\infty, 2) \cup (-1,2]$;

c) $[0,2] \cup [2,5]$;

d) $[-1,1) \cup (0,1]$;

e) $(-\infty, 1] \cup [-2, \infty)$;

f) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$.

5. Calculați:

a) $[1,2] \cap (0,3]$;

b) $(-1,3) \cap [2,3]$;

c) $[-3,2] \cup [1,4]$;

d) $(-3,3) \cap (0,1]$;

e) $(-\infty, 2] \cup [-2,4)$;

f) $[0,1] \cap [0,1; 0,2] \cap [0,01; 0,02]$.

6. Calculați:

a) $[-3,3] \setminus (0,1)$; b) $[-2,1) \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; c) $[-2,2] \setminus (-2,2)$; d) $[-2,2] \setminus [-2,2)$.

7. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care sunt adevărate relațiile de mai jos

a) $[a+2b, 5] \cap [-1, b+a+2] = [2,4]$;

b) $[a+2b, 6] \cap [-1, b+a+2] = [4,5]$;

c) $[a,3] \setminus (b,c] = [0,2]$.

8. Reprezentați următoarele mulțimi ca reuniuni de intervale:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \geq 2\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{2} \text{ sau } x > 3\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ sau } x \geq 3\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ sau } 2 \leq x < 3\}$;

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ sau } x > \pi\}$;

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{\pi}{2} \text{ sau } x > \frac{3\pi}{2}\}$.

9. Se dau mulțimile $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$; $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}^*, y = x-2, x \in A\}$; $C = \{z \mid z \in \mathbb{N}, z = y^2, y \in B\}$

Calculați: $(A \cup B) \cap C$; $(A \setminus B) \cup C$, $A \setminus (B \cap C)$.

10. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-7| + |x+7| = 14\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| + |x-9| = 14\}$. Să se determine A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

11. Se dau $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2|1-x| - 6 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2|3-x| - 10 = 0\}$. Să se determine A și B.

12. Determinați mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{9-\sqrt{n}} \in \mathbb{N} \right\}$.

13. Să se determine numărul elementelor mulțimii $A = \{(x,y) | \, |x| + |y| < 10\}$

14. Se dau mulțimile: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \middle| \, \frac{2x+5}{x+1} \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Să se determine mulțimea B.

b) Să se afle $A \setminus B$, $B \setminus A$, și $A \cap B$.

Soluție: $\frac{2x+5}{x+1} = 2 + \frac{3}{x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow (x+1)|3 \Rightarrow x+1 \in \{-3,-1,1,3\} \Rightarrow x \in \{-4,-2,0,2\}$.

Cum pentru $x = -2$, $\frac{2x+5}{x+1} = -1 \notin \mathbb{N} \Rightarrow B = \{-4,0,2\}$, $A \setminus B = \{1,3,4\}$, $B \setminus A = \{-4,0\}$, $A \cap B = \{2\}$.

15. Se consideră mulțimea $E = \{a,b,c,d,e,f\}$ și submulțimile sale $A = \{a,b,d\}$ și $B = \{b,e,f\}$. Determinați $C_E(A \cup B)$ și $C_E(A \cap B)$.

16. Se consideră mulțimile $A = \{1,2,3,4,5\}$ și $B = \{4,5,6,7,8\}$. Să se determine mulțimea X știind că $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = B$

17. Să se determine mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \setminus B = \{5\}$.

18. Să se determine mulțimile A, B, C, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,7\}$ b) $A \cap B = \{3\}$ c) $A \setminus B = \varnothing$ d) $A \setminus C = B \setminus \{7\}$.

19. Să se determine E, A, B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $C_E A = \{2,5,9,13,18,20\}$, b) $C_E B = \{2,6,18,20\}$, c) $A \cup B = \{1,5,6,9,13,14\}$.

20. Să se determine E, A, B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $C_E A = \{1,4,6,7,8,9\}$, b) $C_E B = \{1,3,8,9\}$, c) $A \cup B = \{3,4,6,7\}$

21. Să se determine mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \times B \subset \{(1,2),(2,4),(2,2),(1,3),(1,4),(2,3)\}$,

b) $B \times A \supset \{(2,1),(4,1),(4,2),(2,2)\}$,

c) $(3,1) \notin B \times A$.

Soluție: a) $\Leftrightarrow A \times B \subset \{1,2\} \times \{2,3,4\} \Rightarrow A \subset \{1,2\}$ și $B \subset \{2,3,4\}$.

b) $\Leftrightarrow B \times A \supset \{2,4\} \times \{1,2\} \Rightarrow \{1,2\} \subset A$ și $\{2,4\} \subset B$

ținând cont și de condiția c) avem $A = \{1,2\}$; $B = \{2,4\}$.

22. Să se determine mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \times B \subset \{(1,2),(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$,

b) $B \times A \supset \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$,

c) $(1,4) \notin A \times B$.

23. Fie mulțimile $A = \{1, 3, 4, x, y\}$ și $B = \{x, z, 6, 7\}$. Să se determine x, y și z știind că $\{5, 6\} \times \{3, 5\} \subset A \times B$.

24. Mulțimea A are 7 elemente și $\{1, 2, 3, 4\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Să se determine numărul mulțimilor A cu proprietatea de mai sus.

25. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \leq 4x - 6 \text{ și } 4x - 11 \leq 2x + 1\}$ și $B = A \cap \mathbb{N}$ să se determine:

a) Numărul de submulțimi X, astfel încât $B \cup X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) Toate mulțimile Y, cu proprietatea $Y = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \in B \cup X\}$ și $B \cap Y = \{3\}$.

26. Să se determine mulțimea: $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{4x^2 + 6x + 8}{2x + 3} \in \mathbb{N}\right\}$

Soluție 1: Avem $y = \frac{4x^2 + 6x + 8}{2x + 3} = 2x + \frac{8}{2x + 3} \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x + 3 \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ $\Rightarrow x \in \left\{-\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$. Cum $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2, -1\}$. Pentru $x = -2$, $y = -12$, iar pentru $x = -1$, $y = 6$ și deci $A = \{-1\}$.

Soluție 2: $\frac{4x^2 + 6x + 8}{2x + 3} \in \mathbb{N} \Rightarrow (2x + 3) | (4x^2 + 6x + 8)$ și cum $(2x + 3) | (2x + 3) \Rightarrow (2x + 3) | (1 \cdot (4x^2 + 6x + 8) - 2x(2x + 3)) = 8$ etc.

27. Dacă $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{3x + 2}\right\}$ să se afle $\sum_{x \in A} x^2$.

28. Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x^2 - 7x + 12}{x - 2}$. Înscrie în spațiul din stânga numărului de ordine din prima coloană, litera din a doua coloană care corespunde mulțimii corecte.

	I	**II**	
___	1. $\{x \in \mathbb{Z} \mid E(x) \in \mathbb{Z}\}$	A	$\{-12, -7, -6, 8, 9, 14\}$
___	2. $\{y \in \mathbb{Z} \mid y = E(x), x \in \mathbb{Z}\}$	B	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
___	3. $\{x \in \mathbb{N} \mid E(x) \in \mathbb{N}\}$	C	$\{8, 9, 14\}$
___	4. $\{x \in \mathbb{N} \mid E(x) \in \mathbb{Z}_-\}$	D	$\{1\}$
___	5. $\{x \in \mathbb{N} \mid E(x) \neq 0\}$	E	$\{0, 1, 3, 4, 5, 8\}$
		F	$\{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}$
		G	$\{3, 4, 5, 8\}$

29. Să se determine mulțimile:

a) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{2x + 3}{x + 1} \in \mathbb{N}\right\}$;

b) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{6x^2 - 12x + 6}{2x^2 - 7x + 5} \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3x^2 - 3x - 36}{x^2 + x - 6} \in \mathbb{Z}\right\}$;

d) $E = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^3 - x^2 + 5x + 7}{x^2 - 2x - 3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

30. Să se determine mulțimea A=$\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2n + 3}{5n + 1} \in \mathbb{Z}\right\}$

Soluția 1: O condiție necesară ca $\frac{2n + 3}{5n + 1} \in \mathbb{Z}$ este ca $|2n + 3| \geq |5n + 1| \Rightarrow n \in \left[-\frac{4}{7}, \frac{2}{3}\right]$. Cum $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 0$ și se verifică că pentru $n = 0$ numărul dat este 3. Deci $A = \{0\}$.

Soluția 2: Cum $\frac{2n+3}{5n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (5n+1) \mid (2n+3)$ și $(5n+1) \mid (5n+1) \Rightarrow (5n+1) \mid (5 \cdot (2n+3) - 2(5n+1)) = 13$ etc.

31. Să se determine mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

32. Să se determine mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x = \frac{6n^2+7}{3n+1}, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

33. Să se calculeze $A \setminus B$ unde $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x = \frac{n^2+n+16}{2n+1}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x = \frac{n+6}{n+3}, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

34. Să se determine mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N},\ x = \frac{3n^2+6n+1}{n^2+1}\right\}$

Soluție: Avem $x = \frac{3n^2+6n+1}{n^2+1} \Leftrightarrow n^2(x-3) - 6n + x - 1 = 0$. Deoarece $x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \Delta = 36 - 4(x-3)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \in [2-\sqrt{10}, 2+\sqrt{10}] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Se verifică apoi pentru ce valori ale lui $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ există $n \in \mathbb{N}$. Deducem $A = \{1, 5\}$.

35. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Să se studieze dacă există două mulțimi B și C care verifică simultan următoarele trei proprietăți:

a) $B \cup C = A$; b) $B \cap C = \varnothing$; c) Produsul elementelor lui B este egal cu produsul elementelor lui C.

36. Să se arate că $A = \left\{x \in Q \,\middle|\, x = \frac{3n^2+1}{n^2+n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ și $B = \{x \in A \mid 2 \leq x < 3\}$ sunt două mulțimi egale.

37. Fie mulțimile : $A = \{(x, y) \in Z \times Z \mid 13 \text{ divide } 5x + 7y\}$, $B = \{(x, y) \in Z \times Z \mid 13 \text{ divide } 4x + 3y\}$. Să se arate că $A = B$.

38. Fie A=$\{x \in Q \mid x = \frac{2n+1}{n+4}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$, $B = \{x \in A \mid x < 2\}$. Să se arate că $A = B$.

39. Fie $A = \{x \mid x = 5k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 5n - 2, n \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $A = B$.

40. Se dau mulțimile:

$A = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N};\ x^2 - xy - 3x + 3y = 1\}$,

$B = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}; xy - 2x - 3y = -5\}$. Să se arate că $A = B$.

Indicație: $x^2 - xy - 3x + 3y = 1 \Leftrightarrow (x-3)(x-y) = 1, x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \{(2, 1)(4, 3)\}$. Analog $xy - 2x - 3y = -5 \Leftrightarrow (x-3)(y-2) = 1$

41. Aflați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z}^* \,\middle|\, \frac{x^4+3}{2x^2} \in \mathbb{Z}\right\}$

42. Fiind date mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\frac{2x^{2004}+5}{7x^5}\in\mathbb{Z}\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\frac{3x^{2004}+7}{10x^7}\in\mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că $A=B$.

Soluție: Fie $\frac{2x^{2004}+5}{7x^5}=d\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x^5(2x^{1997}-7d)=-5\Rightarrow x^5|5\Rightarrow A=\{-1,1\}$. Analog $B=\{-1,1\}$.

43. Se consideră mulțimile: $A=\{x\mid x=7m-15,m\in\mathbb{N}\}$, $B=\{x\mid x=300-42n,n\in\mathbb{N}\}$, $C=\{x\mid x=36p+60,p\in\mathbb{N}\}$. Să se determine mulțimea $A\cap B\cap C$.

44. Se dau mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x=p^2+p+1,p\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x=q^2+q+7,p\in\mathbb{N}\}$. Să se determine mulțimea $A\cap B$.

45. Fie mulțimile $A=\left\{x\in Q\;\middle|\;x=\frac{3n+1}{2n-1},n\in N\right\}$ și $B=\left\{y\in Q\;\middle|\;y=\frac{k-1}{k+4},k\in N\right\}$. Să se arate că $A\cap B=\varnothing$ și să se determine $A\cap Z$ și $B\cap N$.

Indicație: Fie $x\in A\cap B\Rightarrow\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{k-1}{k+4},n,k\in N\Rightarrow k=-14+\frac{23}{n+2}\notin N$ pentru $n\in N$.

$A\cap Z=\{x\in Z\mid x=\frac{3n+1}{2n-1},n\in\mathbb{N}\}=\{-1,0,2,4\}$; $B\cap N=\{y\in N\mid y=\frac{k-1}{k+4},k\in N\}=\{2,6\}$

46. Se consideră mulțimile:

$A=\left\{x\in Q\;\middle|\;x=\frac{2k+3}{2k-1},k\in\mathbb{Z}\right\}$ și $B=\left\{y\in Q\;\middle|\;y=\frac{3k-2}{3k-5},k\in\mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că $A\cap B=\varnothing$.

Indicație: Fie $x\in A\cap B\Rightarrow\exists k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{2k_1+3}{2k_1-1}=\frac{3k_2-2}{3k_2-5}$. Se arată că această ecuație nu are rădăcini în $\mathbb{Z}$..

47. Se dau mulțimile $A=\{x\mid x=3n-2,n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{x\mid x=1003-2m,m\in\mathbb{N}\}$, $C=\{x\mid x=6p+1,p\in\mathbb{Z},\ p\in[0,167]\}$. Să se arate că $A\cap B=C$.

48. Fie $A=\{x\mid x=5m-2,m\in\mathbb{N}^*\}$, $B=\{x\mid x=503-3n,n\in\mathbb{N}^*\}$, $C=\{x\mid x=503-15p,p\in\mathbb{N}^*,\ p\le 33\}$. Să se arate că $A\cap B=C$.

49. Fie mulțimile $A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{x\mid x=501-3m,m\in\mathbb{N}\}$, $C=\{x\mid x=501-6p,p\in\mathbb{N},p\le 83\}$. Să se arate că $A\cap B=C$.

50. Câte elemente are mulțimea:

A=$\left\{x_n\;\middle|\;x_n=\frac{n^2+1}{2n^2+n+1},n=1,2,3,\ldots,100\right\}$.

Soluție: Cautăm elementele x_q și x_k cu proprietatea $x_q=x_k,q,k\in\{1,2,\ldots,100\},q\neq k\Leftrightarrow\frac{q^2+1}{2q^2+q+1}=\frac{k^2+1}{2k^2+k+1}\Leftrightarrow(k-q)(kq-k-q-1)=0\Rightarrow(q,k)\in\{(2,3),(3,2)\}\Rightarrow$ mulțimea A are 99 de elemente.

51. Să se determine cardinalul mulțimii $\left\{\frac{n^2+2}{n^2+2n}\;\middle|\;n=\overline{1,100}\right\}$.

52. Să se determine numărul de elemente ale mulțimii
$A = \left\{ x_n \,\middle|\, x_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{n^2 + 1}, n = \overline{1, 100} \right\}$.

53. Să se demonstreze că $\left\{ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \,\middle|\, a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.5.1 Test de evaluare

1. Reprezentați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 < sau\ 2 \leq x < 5\}$ ca reuniune de intervale.

2. Fie mulțimile $A = \{1, x, 4, 5, y\}$, $B = \{x, 5, 6, z\}$ unde $x, y, z \notin \{1, 4, 5, 6\}$. Să se determine x, y și z știind că $\{3, 6\} \times \{6, 7\} \subset A \times B$

3. Să se demonstreze că mulțimile:

$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2xy - 3x + 5y = 7\}$

$N = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3xy - 5x + 7y = 11\}$ sunt egale

(Gh. Bostan)

4. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{2x^4 - x^3 + 4x - 8}{2x - 1}$.

a) Arată că $E(x) = x^3 + 2 - \dfrac{6}{2x - 1}$

b) Înscrie în spațiul din stânga numărului de ordine din prima coloană, litera din a doua coloană care corespunde mulțimii corecte.

	I	II	
___	1. $\{x \in \mathbb{Z} \mid E(x) \in \mathbb{Z}\}$	A	$\{0, 2\}$
___	2. $\{y \in \mathbb{Z} \mid y = E(x), x \in \mathbb{Z}\}$	B	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
___	3. $\{x \in \mathbb{N} \mid E(x) \in \mathbb{N}\}$	C	$\{8, 9, 14\}$
___	4. $\{x \in \mathbb{N} \mid E(x) = 0\}$	E	$\{-3, 3, 8\}$
		F	$\{-1, 0, 1, 2\}$
		G	$\emptyset$

5. Se consideră mulțimile: $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \dfrac{6n^2 + 7}{3n + 1}, n = \overline{1, 100} \right\}$ și
$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x = \dfrac{6n^2 + 7}{3n + 1}, n = \overline{1, 100} \right\}$
Să se determine numărul de elemente al celor două mulțimi.

4 Elemente de logică matematică și teoria mulţimilor

4.1 Propoziții. Operații logice elementare.

Definiția 8. *Un* **enunț** *este un ansamblu de semne cărora li s-a dat un sens.*

Definiția 9. **Propoziția** *logică este un enunț care este fie adevărat, fie fals, dar nu și una și alta în același timp.*

Oricărei propoziții p i se asociază valoarea de adevăr notată $v(p)$ dată de

$$v(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă propoziția } p \text{ este adevărată} \\ 0, & \text{dacă } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

1. Care din următoarele enunțuri sunt propoziții logice.

a) Brazii sunt verzi.
b) Pătratul are toate laturile congruente.
c) Du-te la plimbare.
d) Pătratul are un singur unghi drept.
e) De ce patrulaterul ABCD este romb?
f) Radu are părul negru.

2. Dați trei exemple de propoziții logice și trei enunțuri care nu sunt propoziții logice.

Observație

În logica matematică, despre o propoziție p nu interesează nici

- conținutul științific al acesteia
- mesajul pe care îl transmite
- structura gramaticală a ei
- informația pe care o deține, ci doar valoarea ei de adevăr, care în logica bivalentă poate fi 0 (zero) dacă este falsă sau 1 (unu) dacă este adevărată.

În tabelul alăturat sunt sintetizate definițiile operațiilor logice elementare: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

3. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor implicații

a) Dacă $4 + 6 = 9$ atunci $6 + 9 = 20$;
b) Dacă $4 + 6 = 10$ atunci $6 + 10 = 16$;
c) Dacă $4 + 6 = 11$ atunci $6 + 11 = 17$;
d) Dacă $6 + 4 = 10$ atunci $6 + 10 = 18$.

4. a) Calculați valoarea de adevăr a expresiei propoziționale:
$E = (A \vee \overline{B}) \wedge (C \to (\overline{A} \leftrightarrow B))$ dacă:
$A = B = 1$ și $C = 0$; $A = 1$ și $B = C = 0$; $A = B = C = 0$.

b) Aceeași cerință pentru expresiile propoziționale:
$E_1 = (A \to \overline{B}) \leftrightarrow (C \vee D)$ dacă: $A = B = 0$ și $C = D = 0$; $A = C = 1$ și $B = D = 1$
$E_2 = ((A \wedge B) \to C) \wedge (D \vee E)$ dacă: $A = B = D = 1$ și $C = E = 0$; $A = B = C = D = E = 0$.

c) Înlocuiți A, B, C, D, E în expresiile E_1, E_2 cu enunțuri concrete.
ex: A: calul este mamifer; B: $5 \cdot 2 = 10$; C: Orice triunghi este isoscel.
Calculați valorile expresiilor obținute și revedeți observația de sus.

Indicație: a)

A	B	C	$\overline{B}$	$A \vee \overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{A} \leftrightarrow B$	$C \to (\overline{A} \leftrightarrow B)$	E
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

5. Precizați două triplete de valori pentru propozițiile P, Q, R așa încât propoziția compusă

a) $(\overline{P} \vee Q) \wedge R$ să fie de fiecare dată adevărată;

b) $\overline{P} \vee (Q \wedge R)$ să fie de fiecare dată falsă;

c) $(P \to \overline{Q}) \wedge \overline{R}$ să fie o dată adevărată și o dată falsă.

6. Demonstrați că:

a) $v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p) \cdot v(q)$;

b) $v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q)$;

c) $v(\overline{p}) = 1 - v(p)$;

d) $v(p \to q) = 1 - v(p) + v(p) \cdot v(q)$.

e) $v^2(p) = v(p)$ și $v^k(p) = v(p), \forall k \in \mathbb{N}^*$

7. În ce cazuri este adevărată $P \vee \overline{Q}$? dar $\overline{P} \to Q$? dar $\overline{P} \wedge Q$?

Arătați că expresia $(P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$ este o contradicție.

8. O expresie propozițională care este adevărată pentru orice valori de adevăr atribuite propozițiilor componente, se numește **tautologie**.

Arătați că următoarele expresii propoziționale sunt tautologii:

Tautologii care exprimă **legi generale ale gândirii**:

a) $p \vee \overline{p}$ (principiul terțiului exclus)

b) $\overline{p \wedge \overline{p}}$ (legea noncontradicției)

c) $p \leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ (legea dublei negații).

Tautologii care exprimă **proprietăți ale operatorilor logici**:

d) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ (comutativitatea $\vee$)

e) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ (comutativitatea $\wedge$)

f) $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (asociativitatea conjuncției)

g) $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (asociativitatea disjuncției)

h) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitatea $\wedge$ față de $\vee$)

i) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributivitatea $\vee$ față de $\wedge$)

Tautologii care exprimă **relații între operatorii logici**:

j) $(p \to q) \leftrightarrow \overline{p} \vee q$ (exprimarea implicației prin disjuncție și negație)

k) $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \leftrightarrow \overline{p})$ (principiul contrapoziției)

l) $\left.\begin{array}{l} \overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q} \\ \overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q} \end{array}\right\}$ (legile lui De Morgan)

Tautologii care exprimă **reguli de deducție naturală**:

m) $((p \to q) \wedge p) \to q$ (modus ponendo ponens sau PP)

n) $((p \to q) \to \overline{q}) \to \overline{p}$ (modus tollendo tolens sau TT)

o) $((p \to q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \to p \to r$ (regula substituției – SB)

p) $((p \vee q) \wedge \overline{p}) \to q$ (modus tollendo ponens –TP)

q) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ (regula silogismului ipotetic– SI)

Indicație: Pentru fiecare tautologie se poate întocmi câte un tabel cu atâtea coloane, câte propoziții și operatori logici conține tautologia la un loc; exemplu: pentru tautologia (j) avem două propoziții p, q și trei operatori–(la $\overline{p}$)$\vee$(la $\overline{p} \vee q$) și $\to$ (la $p \to q$), deci cinci coloane; dacă $p = 1$ și $q = 0$ atunci T=$(1 \to 0) \leftrightarrow (0 \vee 0) = 0 \leftrightarrow 0 = 1$. etc.

Reguli de negare a implicației și echivalenței

$\overline{A \to B} \leftrightarrow A \wedge \overline{B}$; $\quad \overline{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$.

Rezolvare: pentru prima, utilizând tautologiile j) și l) avem $\overline{A \to B} \leftrightarrow \overline{\overline{A} \vee B} \leftrightarrow \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} \leftrightarrow A \wedge \overline{B}$; A doua rezultă din prima scriind $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$ etc.

9. Negați următoarele expresii scriind rezultatele sub forma unor expresii care conțin doar operatorii $\vee$, $\wedge$, și $^-$, acesta din urmă figurând numai deasupra propozițiilor simple .

a) $(A \wedge B) \to C$ b) $(A \to B) \wedge C$ c) $P \to (Q \wedge R)$

d) $(A \vee B) \to C$ e) $(P \to Q) \wedge (Q \to R)$

f) $(P \to Q) \vee (R \wedge S)$ g) $A \vee (B \to C)$

10. Negați în cuvinte și simbolic următoarele expresii matematice:

P1: $b \geq 2$ sau $b < 4$; P2: $c > 5 \to c > 3$

P3: $a \vdots 8 \to a \vdots 2$; P4: Dacă $a||b$ și $b||c$ atunci $a||c$;

P5: $x^2 = 1 \leftrightarrow x^2 \in \{-1, 1\}$

P6: ABCD paralelogram $\leftrightarrow (AB||CD) \wedge (AB = CD)$

Exemplu rezolvat: P1: $b \geq 2$ sau $b < 4$.

În cuvinte: Negația este: b este mai mic decât 2 **și** b este mai mare sau egal cu 4.

Simbolic: $\overline{(b \geq 2 \vee b < 4)} \equiv (b < 2 \wedge b \geq 4)$

Observații:

a) Verificați că dacă notăm cu A o propoziție adevărată și cu F una falsă, iar P este o propoziție oarecare atunci au loc echivalențele: $P \wedge F \leftrightarrow F$; $P \wedge A \leftrightarrow A$; $P \vee F \leftrightarrow P$; $P \vee A \leftrightarrow P$

b) Verificați că au loc proprietățile de idempotență ale conjuncției și disjuncției: $P \wedge P \leftrightarrow P$, $P \vee P \leftrightarrow P$.

11. Să se afle valorile de adevăr ale propozițiilor P, Q, R știind că sunt adevărate simultan propozițiile (1) și (2), unde

(1) $P \to \overline{Q}$; (2) $\overline{R} \to P \wedge Q$.

Rezolvare și observații:

O cale de rezolvare constă într-o analiză logică a celor două propoziții (1) și (2), pornind de la valorile posibile ale uneia dintre propozițiile componente P, Q, R. Să presupunem că P=1:

$$P = 1 \underset{(1)}{\to} \overline{Q} = 1 \to Q = 0 \to P \wedge Q = 0 \underset{(2)}{\to} \overline{R} = 0 \to R = 1.$$

Am notat cu (1) și (2) cele două propoziții simultan adevărate. Așadar o soluție este: $P = 1, Q = 0$ și $R = 1$. Dar P poate fi și 0.

$$P = 0 \underset{(1)}{\to} \left\langle \begin{array}{l} \overline{Q} = 1 \to Q = 0 \\ \overline{Q} = 0 \to Q = 1 \end{array} \right\rangle P \wedge Q = 0 \underset{(2)}{\to} \overline{R} = 0 \to R = 1.$$

Așadar încă două soluții: $P = Q = 0, R = 1$; și $P = 0, Q = R = 1$.

Alte posibilități nu mai sunt, dar analiza logică poate porni de la valorile posibile ale lui R, Q etc. De exemplu fie $R = 1$.

$$R = 1 \to \overline{R} = 0 \underset{(2)}{\to} \left\langle \begin{array}{l} P \wedge Q = 0 \left\langle \begin{array}{l} P = 1, Q = 0 \\ P = Q = 0 \\ P = 0, Q = 1 \end{array} \right. \\ P \wedge Q = 1 \end{array} \right.$$

Pe ramura $P \wedge Q = 0$, toate trei posibilitățile corespund cu (1) adevărată, dar pe ramura $P \wedge Q = 1$ conduce la (1) falsă. De unde aceleași soluții ca mai sus. Lăsăm ca exercițiu efectuarea analizei logice plecând de la valorile posibile ale propoziției Q.

Metoda a II-a. Se face tabelul de adevăr pentru (1) și (2) și din analiza lor se obține soluția.

Metoda a III-a. Ne folosim de exercițiul 6. Conform enunțului avem $\begin{cases} v(P \to \overline{Q}) = 1 \\ v(\overline{R} \to P \wedge Q) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 - v(P) + v(P)v(\overline{Q}) = 1 \\ 1 - v(\overline{R}) + v(\overline{R})v(P \wedge Q) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v(P) + v(P)(1 - v(Q)) = 0 \\ -(1 - v(R)) + (1 - v(R))v(P)v(Q) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v(P)v(Q) = 0 \\ -1 + v(R) + (1 - v(R))\underbrace{v(P)v(Q)}_{0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(P)v(Q) = 0 \\ v(R) = 1 \end{cases}$$ și deci

$(P, Q, R) \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

12. Să se afle valorile de adevăr posibile ale propozițiilor P, Q, R așa încât să fie simultan adevărate propozițiile (1)–(3).

(1) $P \wedge \overline{Q}$; (2) $Q \to R$; (3) $R \vee \overline{P}$.

13. Fie enunțul în limbaj natural (LN):

(1) Când Andrei nu citește, Cornelia dansează.

(2) Dacă Radu nu cântă la vioară, atunci Andrei nu citește iar Roxana nu pictează

(3) Când Cornelia nu dansează, atunci Roxana nu pictează și Radu nu cântă la vioară;

a) Dacă notăm P: Radu cântă la vioară Q: Andrei citește R: Cornelia nu dansează și T: Roxana nu pictează, transcrieți în limbajul simbolic (LS) condițiile (1)–(3).

b) Aflați, eventual printr-o analiză logică a textului în LS, ce activități desfășoară cei patru copii în ipoteza că propozițiile (1)–(3) sunt simultan adevărate.

14. Fie propozițiile:

P : „$x \neq 1 \vee y = 2$”; Q : „$z = 2 \vee y \neq 3$”; R : „$\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$”

Să se afle x, y, z astfel ca $P \wedge Q \wedge R$ să fie adevărată.

15. Trei copii A,B,C practică un sport dintre înot, schi, tenis. Știind că afirmațiile:

(1) A nu joacă tenis sau B înoată și

(2) C înoată sau B nu schiază

sunt simultan adevărate, să se afle ce sport practică fiecare copil !?

Observație:

Problema 15 se obține din 14 dacă notăm:

a fi egal cu 1: a juca tenis; a fi egal cu 2: a înota; și a fi egal cu 3: a schia.

16. Fie propozițiile:

P : $x = 3$ sau $y = 2$ sau $z = 1$; Q : $x = 2$ sau $y = 1$ sau $z = 3$;

R : $x \neq 1$ și $z = 2$.

Să se afle $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$ așa încât $P \wedge Q \wedge R$ adevărată.

17. Să se afle ce activități desfășoară fiecare dintre elevii A,B,C știind că sunt adevărate simultan propozițiile:

P: A cântă sau B citește sau C scrie;

Q: A scrie sau B cântă sau C citește;

R: A nu citește și C cântă.

Observație:

- O transcriere în LS a condițiilor P,Q,R ar fi greoaie, de aceea e mai indicată o soluție directă.
- Problema 17 se obține ușor din 16 dacă găsim asemănări de condiții, de genul celor din problemele 14 și 135

18. Fie propozițiile compuse:

(1) Dacă nu plouă, merg la meci.

(2) Merg la meci numai dacă tu insiști.

(3) Plouă și eu merg la meci.

Dacă notăm p : „plouă”; q : „merg la meci” și r : „tu insiști”, transcrieți propozițiile compuse în limbaj simbolic.

19. Să se simplifice expresiile, eliminând semnul implicației sau echivalenței și aducându-le la forma cerută în exercițiul 9

a) $A \to (B \vee C)$ c) $((A \vee B) \to C) \to D$ e) $(A \to B) \leftrightarrow C$

b) $(A \wedge B) \leftrightarrow (C \vee D)$ d) $(A \to B) \to C$

Exemplu rezolvat :

b) $(A \wedge B) \leftrightarrow (C \vee D) \equiv ((A \wedge B) \to (C \vee D)) \wedge ((C \vee D) \to (A \wedge B)) \equiv$

$\left(\overline{A \wedge B} \vee C \vee D\right) \wedge \left(\overline{C \vee D} \vee (A \wedge B)\right) \equiv \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D\right) \wedge \left((\overline{C} \wedge \overline{D}) \vee (A \wedge B)\right)$

20. Stabiliți echivalențele ($\iff$) și implicațiile ($\implies$) următoare:

a) $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{C} \to \overline{B}) \implies A \to C$

b) $\left(\overline{C} \wedge D\right) \to (A \to \overline{D}) \iff C \vee \overline{A} \vee \overline{D}$

c) $\left(\overline{P} \vee Q\right) \wedge (\overline{Q} \vee R) \implies P \to R$

d) $P \vee (\overline{Q} \wedge \overline{R}) \iff (Q \vee R) \to P$

e) $(P \wedge Q) \wedge (\overline{Q} \vee R) \iff P \wedge R \wedge Q$.

Exemple rezolvate :

Ne vom ajuta de tautologiile j–l dar și de m–q.

a) $\left.\begin{array}{l}(\overline{A} \vee B) \leftrightarrow (A \to B) \quad (j) \\ (\overline{C} \to \overline{B}) \leftrightarrow (B \to C) \quad (k)\end{array}\right] \to \left(\overline{A} \vee B\right) \wedge (\overline{C} \to \overline{B}) \iff (A \to B) \wedge (B \to C)\ (o)$

Dar după (q), $(A \to B) \wedge (B \to C) \implies A \to C$

d) Pornim din dreapta: $(Q \vee R) \to P \iff \overline{Q \vee R} \vee P \iff P \vee \overline{Q \vee R} \iff P \vee (\overline{Q} \wedge \overline{R})$.

4.1.1 Test de evaluare

1. Fie propozițiile p: „Aria pătratului cu latura de 4 cm este egală cu 16 cm pătrați. ” q: „Diagonala pătratului cu latura de 4 cm este egală cu 8 cm.” Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $p \wedge q$; b) $p \vee q$; c) $p \to q$.

2. Se dau expresiile:

$E_1 = \left((A \vee \overline{B}) \to C\right) \wedge (\overline{D} \vee \overline{C})$

$E_2 = \{(A \wedge \overline{B}) \wedge [\overline{C} \vee (B \to D)]\} \to (A \vee C)$

$E_3 = (A \vee B) \wedge (\overline{C} \to D)$

Să se calculeze valorile de adevăr ale acestor expresii pentru valorile atribuite propozițiilor A, B, C, D, E în tabelele:

A	B	C	D	E_1
1	0	0	1	
0	1	0	1	

A	B	C	D	E_2
1	0	0	1	
0	1	1	0	

A	B	C	D	E_3
0	0	1	1	
1	1	0	0	

3. Pentru ce valori ale propozițiilor P, Q, R, sunt adevărate simultan propozițiile compuse (1)–(3), unde:

(1) $P \to Q$ (2) $Q \vee \overline{R}$ (3) $P \vee \overline{Q}$.

4. Pentru ce valori ale propozițiilor P, Q, R, T sunt adevărate simultan propozițiile compuse (1)–(3), unde:

(1) $P \to \overline{Q}$ (2) $Q \vee R$ (3) $\overline{R} \leftrightarrow T$.

5. Negați propoziția $(\overline{A} \wedge B) \to C$

6. Eliminați semnul de implicație din propoziția $(\overline{A} \to B) \wedge C$. Scrieți rezultatele de la 4.1 și 4.2 sub forma unor expresii ca conțin doar $\vee, \wedge, ^-$, aceasta figurând deasupra propozițiilor simple.

7. Stabiliți implicația: $\big((A \vee \overline{B}) \wedge (A \to C)\big) \to (B \to C)$.

8. Stabiliți echivalența: $\big((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \to (\overline{R} \to Q)\big) \leftrightarrow (P \vee Q \vee R)$

4.2 Predicate. Cuantificatori

(1) Prin predicat înțelegem un enunț de una sau mai multe variabile?

1. Dați exemple de predicate unare, predicate binare, ternare,n-are, n fixat, simple sau compuse, precizându-se pentru fiecare variabilă mulțimea în care aceasta ia valori.

(2) Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x), x \in U$ este o submulțime $A \subset U$, $A = \{x \in U \mid p(x)$ propoziție adevărată$\}$

Analog dacă $p(x, y)$, $x \in U_1, y \in U_1$, Mulțimea de adevăr a acestui predicat este $A_1 \times A_2$ cu $A_1 \subset U_1$ și $A_2 \subset U_2$, și $A_1 \times A_2 = \{(x, y) \in U_1 \times U_2 |\ p(x, y)$ propoziție adevărată$\}$.

2. Aflați mulțimile de adevăr ale predicatelor:

$p_1(x) :\ |x + 3| \le 5,\ x \in \mathbb{Z}$;
$p_2(x) :\ x^2 - 3x + 4 = 0,\ x \in \mathbb{R}$;
$p_3(x) :\ |x + 2| + |2x - 1| = 3,\ x \in \mathbb{Z}$;
$p_4(x) :\ |x| \le 1,\ x \in \mathbb{R}$;
$p_5(x) :\ x^2 + |x| = 0,\ x \in \mathbb{Q}$;
$p_6(x) :\ [x] = -2,\ x \in \mathbb{R}$;

Exemplu rezolvat: a) Conform cu (2.1) aflăm soluțiile în $\mathbb{R}$. ale inecuației $|x + 3| \le 5$ și găsim $A = \{-8, -7, \ldots, 1, 2\}$

3. Aflați mulțimea de adevăr a predicatelor:

$p_1(x, y) :\ |x - 2| + |y + x + 1| = 0,\ x, y \in \mathbb{R}$;
$p_2(x, y) :\ x^2 + y^2 \le 0,\ x, y \in \mathbb{R}$;
$p_3(x, y) : x^2 + y^2 \ge 2xy,\ x, y \in \mathbb{R}$;

$p_4(x,y):\ x^2+y^2-2x+4y+5=0,\ x\in\mathbb{R}$;

$p_5(x,y,z):\ |x+y|+|z-2|+|x-z+1|=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}$.

Exemplu rezolvat: p_5, A=$\{(x,y,z)|\ p_5(x,y,z)$ adevărată$\}$

$|x+y|+|z-2|+|x-z+1|=0 \iff x=-y,\ z=2,\ x-z=-1$ de unde $A=\{(1,-1,2)\}$

4. Prin operația de substituire a variabilelor predicatelor de la exercițiile 3 și 4, obțineți 10 propoziții false și tot atâtea adevărate.

5. Fie predicatele simple:

$p_1(x): x\le 1,\ x\in\mathbb{R}$ și $p_2(x): |x|>2, x\in\mathbb{R}$

Determinați mulțimile de adevăr pentru predicatele compuse:
$p_1(x)\wedge p_2(x)$; $p_1(x)\to p_2(x)$; $p_1(x)\vee p_2(x)$; $p_1(x)\leftrightarrow p_2(x)$; $\overline{p_2(x)}$; $\overline{p_1(x)}\wedge\overline{p_2(x)}$.

6. Fie predicatele binare $p(x,y): x\le 1$ și $y\le 2,\ x,y\in\mathbb{R}$, $q(x,y): |x|\ge 2$ și $|y|\le 2,\ x,y\in\mathbb{R}$. Determinați mulțimile de adevăr ale predicatelor compuse: $p(x,y)\vee q(x,y)$; $\overline{p(x,y)}$; $p(x,y)\leftrightarrow q(x,y)$; $\overline{p(x,y)}\vee q(x,y)$; $p(x,y)\wedge q(x,y)$;

Exemplu rezolvat: Fie predicatul $p(x,y)\wedge q(x,y)$. Mulțimea de adevăr A este $A=A_1\times A_2$ unde $A_1=(-\infty,1]\cap\{(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\}=(-\infty,-1]$ și $A_2=(-\infty,2]\cap\{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}=(-\infty,-1]\cup[1,2]$.

(3.1) O altă cale de a obține propoziții din predicate este metoda **cuantificării variabilelor**.

Prin cuantificare universală obținem propoziția $\forall x\ p(x), x\in U$.

Prin cuantificare existențială obținem propoziția $\exists x\ p(x), x\in U$.

(3.2) Pentru a arăta că $\forall x\ p(x)$ adevărată este necesară o demonstrație, iar pentru a arăta că este falsă, este suficient un contra exemplu.

Exemplu. Fie $p(x):\ 3x+1>0, x\in\mathbb{R}$ și $q(y): y^2+(y+1)^2>0, y\in\mathbb{R}$

$\forall x\ p(x), x\in\mathbb{R}$ este falsă: $p(-1)\le 0$.

$\forall x\ q(x), x\in\mathbb{R}$ este adevărată: în adevăr $y^2>0, \forall y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $(y+1)^2>0, \forall y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, deci $y^2+(y+1)^2>0, \forall y\in\mathbb{R}$.

(3.3) Pentru a arăta că $\exists x\ p(x)$ adevărată este suficient un exemplu iar pentru a dovedi că este falsă este necesară o demonstrație.

Exemplu. Fie $r(x): x^2-x+1=0, x\in\mathbb{R}$. Cum $\Delta<0$, propoziția $\exists x\ r(x), x\in\mathbb{R}$ este falsă; Cum $p(0)=1, \exists x\ p(x)=1$.

7. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\forall a\ (|a^2-1|+|a-1|\ne 0), a\in\mathbb{R}$;
b) $\exists x\ (|x-1|+|x^2-x|=0), x\in\mathbb{R}$;
c) $\exists y\ (|y-1|+|y-2|=0), y\in\mathbb{R}$;
d) $\exists x\ (|x-1|<|x-2|), x\in\mathbb{R}$;
e) $\forall x\ (3x-1\ne x), x\in\mathbb{N}$;
f) $\forall x\ (3x-2>1), x\in(1,\infty)$;
g) $\exists x\ (5x+2>x), x\in(-\infty,-1)$;
h) $\exists x\ (x^2+x+4$ prim$), x\in\mathbb{N}$;
i) $\exists x\ (x^2-1$ se divide la $5), x\in\mathbb{Z}$;
j) $\exists x\ (x\mid 16$ și $x\mid 15), x\in\mathbb{N}$;

k) $\exists x\ (3x^2-1\neq x^2), x\in\mathbb{Q}$;

l) $\forall x\ \left(\dfrac{1}{x-1}\in\mathbb{R}\right), x\in\mathbb{R}$;

m) $\exists x\ \left(\dfrac{2x+1}{6}\in\mathbb{Z}\right), x\in\mathbb{Z}$;

n) $\exists x\ ([x]+x=0), x\in\mathbb{R}$;

o) $\forall x\ \left(\dfrac{x}{[x]}>1\right), x\in\mathbb{N}^*$;

p) $\forall x\ (|x-3|<5), x\in(-2,8)$;

q) $\forall x\ \Big(x(x+1)(x+2)(x+3)\vdots 24\Big), x\in\mathbb{Z}$.

(4.1) *Consecința logică*: $q(x)$ este o consecință logică a lui $p(x)$ pe M, dacă $\forall x(p(x)\to(q(x)))$, $x\in M$ este adevărată.

(4.2) *Echivalența logică*: $p(x)\iff q(x)$ pe M dacă $\forall x\ (p(x)\leftrightarrow q(x))x\in M$ este o propoziție adevărată.

8. a) Stabiliți dacă au loc implicațiile logice:

(1) $x>0\Rightarrow x^2>0,\ x\in\mathbb{R}$.

(2) $x^2>0\Rightarrow x>0,\ x\in\mathbb{R}$.

(3) $|x|>1\Rightarrow|x-2|-1>0,\ x\in\mathbb{R}$.

(4) $x<2\Rightarrow\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

Exemplu rezolvat: (4) Dacă $x<0$, afirmația $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2}$ este falsă, așadar $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2}$ nu rezultă logic din $x<2$, nu este o consecință logică a acesteia pentru $x<0$.

b) Stabiliți dacă au loc echivalențele logice:

(1) $x>2\iff x^2>4, x\in\mathbb{R}$.

(2) $a<-3\iff a^2<9,\ a\in\mathbb{R}$.

(3) $|x|\neq 1\iff x^2>1, x\in\mathbb{R}$.

(4) $n\vdots 3\iff n\vdots 9,\ n\in\mathbb{N}$.

9. Obțineți prin cuantificare câte două propoziții din fiecare predicat compus de la exercițiul 5. Stabiliți pentru fiecare dintre ele valorile de adevăr.

Exemplu rezolvat: $\forall x\ (x\leq 1\wedge\ |x|>2), x\in R$ falsă, $\exists x\ (x\leq 1\wedge\ |x|>2), x\in\mathbb{R}$ adevărată; $x_0=-3$.

10. Fie predicatele $p(x):x^2>1, x\in\mathbb{R}$, și $q(x):x<0, x\in\mathbb{R}$. Obțineți prin cuantificare universală și apoi existențială, propoziții din predicatele compuse:

$p(x)\vee q(x)$; $p(x)\wedge q(x)$; $p(x)\to q(x)$; $\overline{p(x)}$; $\overline{q(x)}$; $p(x)\leftrightarrow q(x)$. Stabiliți și valorile de adevăr ale propozițiilor obținute.

(5) *Reguli de negație*

Dacă $p(x), x\in U$ este un predicat, atunci au loc regulile de negație:

$\overline{\forall x\ p(x)}\equiv\exists x\ \overline{p(x)},\ x\in U$ și $\overline{\exists x\ p(x)}\equiv\forall x\ \overline{p(x)},\ x\in U$

Dacă $p(x)$ este un predicat compus, atunci negația sa se exprimă folosind regulile de la §1.

Exemplu: Fie $p(x):(x>-1)\to(x^2>1), x\in\mathbb{R}$ și propoziția $p_1:\forall x\ p(x), x\in\mathbb{R}$.

$\overline{p_1}:\overline{\forall x\ p(x)}\equiv\exists x\left(\overline{(x>-1)\to(x^2>1)}\right)\equiv\exists x\ \Big((x>-1)\wedge\overline{(x^2>1)}\Big)\equiv\exists x\,(x\in(-1,1]),$ $x\in\mathbb{R}$.

11. Scrieți negațiile propozițiilor:

$p_1 : \forall x \left((x < 0) \vee (x > 1)\right), x \in \mathbb{R}$ $\quad p_2 : \exists x \left(x^2 + x + 1 = 0\right), x \in \mathbb{R}$

$p_3 : \forall x \left((x \neq 1) \wedge (x > 0)\right), x \in \mathbb{R}$ $\quad p_4 : \exists x \left(|x - 1| \leq 1\right), x \in \mathbb{R}.$

12. Negați următoarele propoziții:

a) „$\forall x \in E, (p(x) \vee q(x))$”
b) „$\forall x \in E, (p(x) \wedge q(x))$”
c) „$\exists x \in E, (p(x) \vee q(x))$”
d) „$\exists x \in E, (p(x) \wedge q(x))$”
e) „$\forall x \in E, (p(x) \to q(x))$”
f) „$\exists x \in E, (p(x) \to q(x))$”
g) „$\forall x \in E, (p(x) \leftrightarrow q(x))$”
h) „$\exists x \in E, (p(x) \leftrightarrow q(x))$”

13. a) Obțineți prin cuantificare propoziții din predicatele de la exercițiul 3: 3 propoziții adevărate și 3 propoziții false.

b) Scrieți apoi negațiile celor 6 propoziții obținute.

14. Scrieți negațiile propozițiilor de la exercițiul 10 încât să obțineți patru propoziții universale și patru existențiale.

(6) Atât în aplicațiile matematice cât și în limbajul cotidian ne întâlnim foarte des cu cele patru propoziții categorice A, E, I, O:

(A): Toți S sunt P: $\forall x \ (S(x) \to P(x))$

(E): Nici un S nu este P: $\forall x(\overline{S(x)} \to \overline{P(x)})$

(I): Unii S sunt P: $\exists x \ (S(x) \wedge P(x))$

(O): Unii S nu sunt P: $\exists \ (S(x) \wedge \overline{P(x)})$

15. Fie predicatele: $M(x)$ „x are note mari la obiectul M”, $x \in E$ și $R(x)$ „x are note mari la obiectul R”,x$\in E$, E fiind o clasă de elevi. Să se scrie în limbaj simbolic (LS) propozițiile:

a) Toți elevii au note mari la M, iar unii la R;
b) Fiecare elev are note mari la M și la R;
c) Nici un elev nu are note mici și la M și la R
d) Dacă toți elevii au note mici la R, atunci câțiva au note mari la M.
e) Nu toți elevii au note mici la R
f) Există elevi care au note mici la M și note mari la R
g) Unii elevi au note mici la R.

Exemple rezolvate: (a) $\forall x \in E, \ M(x) \ \wedge \exists x \in E, \ R(x)$; b) $(\forall) x \in E, (M(x) \wedge R(x))$.
d) $(\forall x \overline{R(x)}) \to (\exists x M(x))$.

16. Fie propozițiile:

a) $\exists x \ \overline{R(x)}$;
b) $\exists x \ M(x)$;
c) $\exists x \ M(x) \to \exists x \ R(x)$;
d) $M(a) \wedge \overline{R(b)}, a, b$ fixați;

e) $\exists x \ (M(x) \wedge \overline{R(x)})$, $M(x)$ și $R(x)$ predicatele de la exercițiul 15.

Exprimați în limbaj natural (LN) propozițiile (a)–(e)

17. a) Scrieți logico-simbolic negațiile propozițiilor de la exercițiul 15

b) Exprimați în limbaj natural negațiile obținute la a).

(7) Fie $p(x,y), x \in U_1, y \in U_2$ un predicat de două variabile.

Dacă vom cuantifica o variabilă, enunțul obținut va fi tot un predicat

ex: $\forall x\ p(x,y), \exists y\ p(x,y)$–variabilele cuantificate se mai numesc variabile legate, celelalte se mai zic variabile libere.

Dacă substituim o variabilă, iar cealaltă o cuantificăm vom obține o propoziție

ex: $\forall x\ p(x,y_0),\ \exists y\ p(x_0,y),\ \forall y\ p(x_0,y),\ \exists x\ p(x,y_0)$.

18. Fie predicatul $p(x,y): x^2+y^2-2x+6y+9>0,\ x,y\in\mathbb{R}$

Stabiliți valorile de adevăr ale propozițiilor:

$p_1: \forall y\ p(0,y), y\in\mathbb{R}$; $\quad p_2: \forall x\ p(x,-x), x\in\mathbb{R}$;

$p_3: \exists x\ \ p(x,-2), x\in\mathbb{R}$; $\quad p_4: \exists y\ p(1,y), y\in\mathbb{R}$;

$p_5: \forall x\ p(x,-3),\ x\in\mathbb{R}$.

(7.2) *Prin cuantificarea ambelor variabile* (prin legarea variabilelor), predicatului $p(x,y)$ i se asociază 8 propoziții:

(1) $\forall x\forall y\ p(x,y)$; (2) $\forall y\forall x\ p(x,y)$; (3) $\exists x\exists y\ p(x,y)$; (4) $\exists y\exists x\ p(x,y)$;

(5) $\forall x\exists y\ p(x,y)$; (6) $\exists x\forall y\ p(x,y)$; (7) $\forall y\exists y\ p(x,y)$; (8) $\exists y\forall x\ p(x,y)$.

Au loc relațiile (1) $\leftrightarrow$ (2); (3) $\leftrightarrow$ (4); (6) $\rightarrow$ (7); (8) $\rightarrow$ (5).

Să demonstrăm că $\exists x\forall y\ p(x,y) \rightarrow \forall y\exists x\ p(x,y)$

$\exists x\forall y\ p(x,y)$ adevărată $\Rightarrow$ există un x_0, acela și pentru orice y astfel încât $p(x_0,y)$ adevărată pentru orice y; Așadar $\forall y\ p(x_0,y)$ adevărată, dar $\forall y\ p(x_0,y) \iff \forall y\exists x\ p(x,y)$. Reciproca este falsă în general, deoarece s-ar putea ca să nu mai existe un același x pentru toți y, astfel ca $p(x,y)$.

Exemplu: $p(x,y)$: „$x+y=0$”, $x,y\in\mathbb{R}$.

Propoziția $\forall y\exists x\ p(x,y)$ este adevărată, că la fiecare y, alegem $x=-y$ pentru a avea loc $x+y=0$. Dar propoziția $\exists x\forall y\ p(x,y)$ este falsă, (de ce ?). Analog se demonstrează și implicația (8) $\rightarrow$ (5)

19. Fie predicatul $p(x,y): 3x+2y=1,\ x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Scrieți câteva propoziții adevărate și propoziții false obținute din $p(x,y)$ prin substituirea variabilelor.

b) Determinați valorile de adevăr ale celor opt propoziții de la 7.2 (1)–(8) obținute prin cuantificare.

c) Repetați cerințele a) și b) pentru predicatele peste $\mathbb{R}$,
$q(x,y): xy\geq 0$; $\quad r(x,y): x+y<0$; $\quad s(x,y): x\geq y+1$.

20. Stabiliți valoarea de adevăr pentru propozițiile în $\mathbb{R}$:

a) $\forall x \forall y\ (x^2+y^2 \geq 2xy)$

b) $\forall x \forall y \left(\frac{x+a}{y+a} = \frac{x}{y}\right)\ y \neq -a$ și $y \neq 0$.

c) $\exists x \exists y\ (x+y=1$ și $2x-y=0)$

d) $\exists x \exists y\ (xy \geq y)\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+$

e) $\forall x \forall y\ (x^2-2y+y^2+4x+5 \geq 0)$

f) $\forall x \forall \exists y\ (x<y)$

g) $\forall x \forall y (x>y \rightarrow -x<-y)$

h) $\forall x \forall y\ (x^2>y^2 \rightarrow x>y)$

21. Fie predicatele peste $\mathbb{R}$:

$p_1(x,y): xy \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$p_2(x,y): xy \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

$p_3(x,y): xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$p_4(x,y): x+y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$p_5(x,y): x+y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$p_6(x,y): x+y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Cuantificați corespunzător variabilele pentru a obține propoziții adevărate.

4.3 Test de evaluare

Nr.1

1. Stabiliți mulțimea de adevăr pentru fiecare dintre predicatele :

$$p_1(x): "|2x-3|=5, x \in \mathbb{R}";\ p_2(x): "(x+2)^2+(5-x)(5+x)=9, x \in \mathbb{R}"$$

$$p_3(x): "6x^2-5x+1=0, x \in \mathbb{Z}";\ p_4(x): "x^2-4x+4=0, x \in \mathbb{Z}"$$

2. Fie predicatele $p(x)$: $"|2x-3| \leq 7, x \in \mathbb{R}"$ și $q(x)$: $"|3x+1| \geq 11, x \in \mathbb{R}"$. Stabiliți valorile lui x pentru care :

a) $p(x)$ este adevărata ;

b) $q(x)$ este adevărata;

c) $p(x) \wedge q(x)$ este adevărata ;

d) $p(x) \vee q(x)$ este adevărata ;

e) $\overline{p}(x)$ este adevărata.

3. Fie p : $"(\exists)\, x \in \mathbb{R}, x^2=9"$ si q : $"(\forall)\, x \in \mathbb{R}, \left|x^2+4\right|>5"$. Scrieți negațiile lor și stabiliți valoarea de adevăr pentru $p, q, \bar{p}, \bar{q}, p \rightarrow q$

Nr.2

1. Stabiliți mulțimea de adevăr pentru fiecare dintre predicatele :

$$p_1(x): "|3x+1|=10, x \in \mathbb{R}";\ p_2(x): "(x+1)^2+(2-x)(2+x)=16, x \in \mathbb{R}"$$

$$p_3(x): "4x^2-5x+1=0,\ x \in \mathbb{Z}";\ p_4(x): "x^2+6x+9=0, x \in \mathbb{Z}"$$

2. Fie predicatele $p\,(x)$: "$|2x-3| \leq 11, x \in \mathbb{R}$" și $q\,(x)$: "$|2x+1| \geq 11, x \in \mathbb{R}$". Stabiliți valorile lui x pentru care :

a) $p\,(x)$este adevărata ;

b) $q\,(x)$ este adevărata;

c) $p\,(x) \wedge q(x)$ este adevărata ;

d) $p\,(x) \vee q(x)$ este adevărata ;

e) $\overline{p}\,(x)$ este adevărata.

3. Fie p : "$(\exists)\, x \in \mathbb{N},\ x^2-3x=0$" si q : "$(\forall)\, x \in \mathbb{R}, \left|x^2+1\right| > 2$". Scrieți negațiile lor și stabiliți valoarea de adevăr pentru $p, q, \bar{p}, \bar{q}, p \to q$

4.4 Test de evaluare

1. Arătați că formula: $((p \vee q) \wedge \bar{q}) \to p$ este tautologie

2. Verificați echivalența: $p \wedge \bar{q} \equiv \overline{p \to q}$

3. Stabiliți mulțimea de adevăr pentru predicatul $p(x)$: $6x^2+x-1=0,\ x \in \mathbb{Q}$.

4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții și scrieți negațiile lor:

a) $(\exists)x \in \mathbb{Z},\ x^2-5=0$.

b) $(\forall)x \in \mathbb{R},\ x^2-2x+3 \neq 0$

5. Se consideră predicatul $p(x,y)$: $2x^2+y=14,\ x,y \in \mathbb{R}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(\forall y)(\exists x),\ p(x,y)$

b) $(\exists y)\, p(-3,y)$.

Justificați răspunsul.

4.5 Test de evaluare

1. Fie predicatele $p(x) : x < -1,\ x \in \mathbb{R}$ și $q(x) : x^2 > 1, x \in \mathbb{R}$.

Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziției:

a) $\exists x\ (p(x) \to q(x))$

b) $\forall x\ (p(x) \wedge q(x))$

c) $\exists x\ (p(x) \vee q(x))$

d) $\forall x\ (p(x) \leftrightarrow q(x))$

2. Fie predicatul $p(x,y) : x < y+3,\ x,y \in \mathbb{R}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia din propozițiile următoare și scrieți negațiile corespunzătoare:

a) $\forall x \exists y\ p(x,y)$ *b)* $\forall y \exists x\ p(x,y)$ *c)* $\exists x \forall y\ p(x,y)$ *d)* $\exists y \forall x\ p(x,y)$

3. a) Căutați un predicat $p(x,y), x, y \in U$ astfel încât propoziția $\forall x \exists y\ p(x,y)$ să fie adevărată iar propoziția $\exists y \forall x\ p(x,y)$ să fie falsă.

(Mulțimea U reprezintă o mulțime de oameni)

b) Alegeți predicatele $p(x)$ și $q(x)$ peste o mulțime U astfel încât propoziția $\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$ – adevărată și propoziția $\forall x\ (p(x) \to q(x))$ – falsă.

(Mulțimea U nu este neapărat o mulțime numerică)

4. Exprimați în limbaj natural cele patru enunțuri de la exercițiul 3 și negați propozițiile false.

4.6 Corelarea operatorilor logici cu operațiile și relațiile dintre mulțimi

(3.1) În tabelul alăturat este indicată legătura dintre operatorii logici și relațiile/operațiile dintre mulțimi

Relații. Simbol	Operații între mulțimi. Definiții	Operatori logici
$A \subset B$	$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$	$\to$
$A = B$	$\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$	$\leftrightarrow$
$A \cap B$	$\forall x\ (x \in A$ și $x \in B)$	$\wedge$
$A \cup B$	$\forall x\ (x \in A$ sau $x \in B)$	$\vee$
$A \setminus B$	$\forall x\ (x \in A \wedge x \notin B)$	$\wedge, -$
$C_E A$	$\forall x\ (x \notin A)$	$-$

1. Fie $A, B, C \subset E$ și $x_0 \in E$. Notăm $p : x_0 \in A$, $q : x_0 \in B$ și $r : x_0 \in C$. Transcrieți în limbajul operatorilor logici următoarele enunțuri:

a) $x_0 \in (A \cup B) \cup C$
b) $x_0 \in (A \cap B) \cup C$
c) $x_0 \in (A \cup B) \cap C$
d) $x_0 \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$
e) $x_0 \in A \setminus (B \cup C)$
f) $x_0 \in A \setminus (B \cap C)$
g) $x_0 \in (A \cup B) \setminus C$
h) $x_0 \in C(A \cup B)$
i) $x_0 \in C(A \cap B)$
j) $x_0 \in (A \setminus B) \setminus C$
k) $x_0 \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
l) $x_0 \in A \triangle B$
m) $x_0 \in (A \cap B) \setminus C$
n) $x_0 \in C(A \triangle B)$
o) $x_0 \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
p) $x_0 \notin A \cap B$
q) $x_0 \notin A \setminus B$
r) $x_0 \notin A \cup B$

Exemple rezolvate: d) $x_0 \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \iff x_0 \in (A \cup B) \wedge x_0 \in (B \cup C) \iff (x_0 \in A \vee x_0 \in B) \wedge (x_0 \in B \vee x_0 \in C) \iff (p \vee q) \wedge (q \vee r)$.

j) $x_0 \in (A \setminus B) \setminus C \iff (x_0 \in A \setminus B) \wedge (x_0 \notin C) \iff (x_0 \in A \wedge x_0 \notin B) \wedge x_0 \notin C \iff (p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{r}$.

2. Fie $A, B \subset E$, $A, B \neq E$, $A, B \neq \varnothing$. Ce relație există între A și B în fiecare din cazurile următoare, unde x arbitrar din E.

a) $x \in A \Rightarrow x \in B$;
b) $x \in A \Rightarrow x \notin B$;
c) $x \notin A \Rightarrow x \notin B$;
d) $x \in A \Leftrightarrow x \in B$;
e) $x \in A \Leftrightarrow x \notin B$;
f) $x \notin A \Leftrightarrow x \notin B$;
g) $x \in A \not\Rightarrow x \notin B$;
h) $x \notin A \not\Rightarrow x \in B$;
i) $x \notin A \not\Rightarrow x \notin B$;
j) $x \in A \not\Leftrightarrow x \notin B$.

Exemplu rezolvat: e) $x \in A \Leftrightarrow x \notin B \iff (x \in A \Rightarrow x \notin B) \wedge (x \notin B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow (A \subset \mathbf{C}B) \wedge (\mathbf{C}B \subset A) \Leftrightarrow A = \mathbf{C}B$.

3. Să se determine în limbajul operatorilor logici, dualele proprietăților operațiilor și ale relațiilor dintre mulțimi indicate în continuare:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
e) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$
g) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
h) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B = A \setminus (B \cup C)$
i) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
j) $A \setminus B = A \cap \mathbf{C}B$
k) $A \subset B$ și $B \subset A$ atunci $A = B$
l) $\mathbf{C}(\mathbf{C}A) = A$
m) $\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B$

Exemple rezolvate: 1) dacă $A \subset B$ și $B \subset C$ atunci $A \subset C$: $(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in C) \Rightarrow (x \in A \to x \in C)$.
Deci $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$.

2) $A \cup B = B \cup A$: $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$;

3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$: $p \wedge (\overline{q \vee r}) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{r})$

4. Să se demonstreze proprietățile de la exercițiul 3 pe baza proprietăților operatorilor logici (vezi §1,8) presupuse a fi cunoscute.

Exemplu rezolvat: fie proprietatea din exemplul rezolvat 3 de la exercițiul 3. $p \wedge (\overline{q \vee r}) \underset{(1)}{\equiv} p \wedge (\overline{q} \wedge \overline{r}) \underset{(2)}{\equiv} p \wedge p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \underset{(3)}{\equiv} (p \wedge \overline{q}) \wedge (p \wedge \overline{r})$ unde (1): o lege a lui Morgan; (2) idempotența conjuncției; (3) comutativitatea și asociativitatea conjuncției.

5. Să se determine mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x|12 \text{ sau } x|16) \wedge x|8\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x|12 \text{ și } x \not\vdots 3)\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \not| 5 \wedge (x \vdots 6) \wedge (x < 30)\}$

$D = \{x \in \mathbb{N}, x < 50 \mid (x \vdots 3) \wedge x \text{ nu divide 15 sau 16}\}$

6. Fie predicatele peste $\mathbb{R}$: $p(x) : x > 3$ sau $x > 5$; $q(x) : x > 3$; $r(x) : x > 5$. Notăm cu A, B, C mulțimile de adevăr ale predicatelor $p(x), q(x)$ și respectiv $r(x)$.

a) Care dintre propozițiile următoare sunt adevărate: $A = B$; $A = C$; $B \subset C$; $C \subset A$.

b) Determinați mulțimile: $A \cap \overline{C}$; $(A \setminus B) \setminus C$; $A \setminus (B \cup \overline{C})$; $A \triangle B$; $B \triangle C$.

7. Fie predicatele: $p(x) : x \geq 2$ sau $x \leq 0$; $q(x) : x \geq -1$ și $x \leq 2$; $r(x) : x \geq 1$ și $x < 3$ peste $\mathbb{R}$. Notăm cu A, B, C mulțimile de adevăr ale predicatelor $p(x), q(x)$ și respectiv $r(x)$.

a) Determinați mulțimile: $A \cap B \cap C$; $(A \setminus B) \cup C$; $A \cup B \cup C$; $(A \setminus B) \setminus C$

b) Exprimați cu ajutorul mulțimilor A, B, C, mulțimea de adevăr al predicatului:

(1) $p(x) \wedge \overline{q(x)}$;
(2) $\overline{p(x)} \vee r(x)$;
(3) $p(x) \vee r(x)$;
(4) $p(x) \Leftrightarrow q(x)$;
(5) $p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)$;
(6) $(p(x) \wedge q(x)) \vee r(x)$;
(7) $p(x) \wedge \overline{(q(x) \wedge r(x))}$;
(8) $p(x) \Leftrightarrow r(x)$.

Exemplu rezolvat: $\{x \in \mathbb{R} \mid \overline{p(x)} \vee q(x)\} = \overline{A} \cup B = (0,3)$.

8. a) Aceleași cerințe de la exercițiul anterior, pentru predicatele: $p(x) : x < 0$ sau $x > 1$; $q(x) : x < -1$ sau $x \geq 2$; $r(x) : x \geq -1$ și $x \leq 2$ peste $\mathbb{R}$ și mulțimile de adevăr corespunzătoare.

b) (1) $(\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}) \wedge r(x)$;
(2) $(\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}) \vee r(x)$;
(3) $q(x) \Rightarrow r(x)$;
(4) $(p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to r(x))$;
(5) $\overline{q(x)} \wedge (p(x) \to q(x))$;
(6) $(p(x) \vee q(x)) \wedge \overline{q(x)}$ (vezi și 8 §1)

9. Să se nege propozițiile:

a) $A \subset B \setminus C$
b) $A \subset (B \cup C)$
c) $A \subset (B \cap C)$
d) $B \setminus C \subset A$
e) $B \cup C \subset A$
f) $B \cap C \subset A$

Exemplu rezolvat: a) $A \subset B \setminus C \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B \setminus C)$

$\overline{A \subset B \setminus C} \Leftrightarrow \exists x(\overline{x \notin A \vee x \in B \setminus C}) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B \setminus C) \Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)) \Leftrightarrow \exists x\ (x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C))$.

10. Să se demonstreze că dacă $X \subset A \cup B \Rightarrow X \subset A$ sau $X \subset B$ atunci $A \subset B$ sau $B \subset A$.

Indicație. Procedăm prin absurd și există $a \in X$ și $a \notin A$ și $b \in X$ și $b \notin B$. Apoi fie $X = \{a, b\}$

Exerciții și probleme diverse

11. a) Să se arate că $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

b) Să se compare mulțimile finite A și B dacă $|A \cup B| = |A \cap B|$ (am notat cu $|X|$ numărul de elemente al mulțimii finite X)

Determinarea unor mulțimi din condiții date

12. Să se determine mulțimile A,B,C știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) (1) $A \cap C = \{2,5,6\}$
(2) $A \triangle B = \{2,3,4\}$
(3) $B \setminus C = \{1\}$
(4) $B \cup C = \{1,2,3,5,6\}$

b) (1) $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
(2) $|X \setminus Y| = 3$
(3) $X \cap Y = \{2,3,4\}$
(4) „$\{5\} \not\subset X \setminus Y$ și $8 \notin X \setminus Y$” adevărată

c) (1) $A \cup B = \{1,2,3,4\}$; (2) $A \cap B = \{1,2\}$
(3) $A \setminus B \subset \{1,2,4\}$
(4) $\{1,2,3\} \subset B$
(5) $|A| \leq |B|$

d) (1) $X \cup Y = \{2,3,4,5,6,7,8\}$
(2) $|X \setminus Y| = |Y \setminus X|$
(3) $X \cap Y = \{2,7,8\}$
(4) „$5 \notin X \setminus Y$ și $3 \notin Y \setminus X$” adevărată

e) (1) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$
(2) $A \cap B \cap C = \{5\}$
(3) $A \setminus B = \{1,3,6\}$
(4) $A \setminus C = \{1,2,4\}$

f)

(1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
(2) $A \cap B = \{2,3\}$
(3) $\{2,3,4\} \cap B \not\subset A$
(4) $\{1,4\} \cap A \not\subset B$

g) (1) $A \cup B \cup C = \{1,2,3\}$
(2) $A \cap B \not\subset C$
(3) $A \cap C \not\subset B$
(4) $B \cap C = \{2\}$; (5) $1 \in B \setminus C$.

h) (1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
(2) $A \cap B = \{1,2\}$
(3) $5 \notin A \setminus B$
(4) $|A| > |B|$

Rezolvare a): $5,6 \in A \cap C$ și $5,6 \notin A \triangle B \Rightarrow 5,6 \in A \cap B \cap C$. Din $4 \in A \triangle B$ și $4 \notin B \cup C \Rightarrow 4 \in A \setminus (B \cup C)$.
Din $2 \in A \triangle B \Rightarrow 2 \notin A \cap B$ și cum $2 \in A \cap C$ rezultă $2 \in (A \cap C) \setminus B$.
Cum $3 \in B \cup C$, dar $3 \notin B \setminus C$ și $3 \in A \triangle B$ se obține $3 \in (B \cap C) \setminus A$.
Aceste considerații conduc la diagrama alăturată, de unde se citesc A,B,C

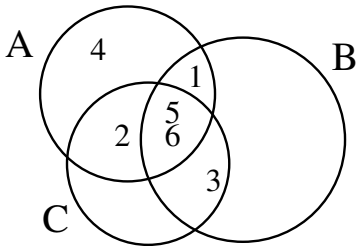


Fig. 1: *Problema 12*

13. Să se determine două părți X și Y ale mulțimii $E = \{1,2,3,4\}$ știind că sunt adevărate simultan proprietățile:
(1) $X \cap Y = \{1,2\}$ (2) $X \setminus Y = \{3\}$ (3) $(\alpha \in E$ și $\alpha \notin X) \nRightarrow \alpha \in Y$

14. Există două părți X și Y ale mulțimii $E = \{1,2,3,4,5\}$ astfel ca să fie adevărate simultan propozițiile următoare?
(1) $X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$; (2) $|X| = 2$ și $|Y| = 3$; (3) $a \in X \nrightarrow a \notin Y$.

15. Fie mulțimea $E = \{x,y,z,t\}$. Să se afle x,y,z,t distincte între ele știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) (1) $\{x,y,1\} \in \mathcal{P}(E)$
(2) $\{2,y,z,t\} \in \mathcal{P}(E)$
(3) $\{x,y,z,3\} \in \mathcal{P}(E)$
(4) $\{x,t,4\} \in \mathcal{P}(E)$

b) (1) $\{x,y,2\} \in \mathcal{P}(E)$
(2) $\{x,z,1\} \in \mathcal{P}(E)$
(3) $\{y,t,3\} \in \mathcal{P}(E)$
(4) $\{z,t,4\} \in \mathcal{P}(E)$

c) (1) $\{x,y,4\} \in \mathcal{P}(E)$
(2) $\{x,t,1\} \in \mathcal{P}(E)$
(3) $\{z,t,2\} \in \mathcal{P}(E)$
(4) $\{y,z,t,3\} \in \mathcal{P}(E)$
(5) $\{y,t,3\} \in \mathcal{P}(E)$

Exemplu rezolvat. Fie $E = \{x,y,z,u,v\}$. Să se determine x,y,z,u,v știind că următoarele condiții sunt îndeplinite simultan:

(1) $\{x,y,1\} \in \mathcal{P}(E)$
(2) $\{y,z,2\} \in \mathcal{P}(E)$
(3) $\{u,3,4\} \in \mathcal{P}(E)$
(4) $\{z,u,5\} \in \mathcal{P}(E)$
(5) $\{x,y,4,5\} \in \mathcal{P}(E)$

Completăm un tabel asemănător în care cu un $*$ indicăm ce valori nu pot lua variabilele din prima linie. Apoi citim soluțiile;

	x	y	z	u	v
1	$*$	$*$	$-$	1	$-$
2	2	$*$	$*$	$-$	$-$
3	$-$	3	$-$	$*$	$-$
4	$*$	$*$	4	$*$	$-$
5	$*$	$*$	$*$	$*$	5

$x = 2, y = 3, z = 4, u = 1, v = 5$

Ecuații ce au ca necunoscută o mulțime X

16. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\{a,b\} \cup X = \{a,b,c\} \cap X$ b) $A \cup X = B \cap X$. Discuție.

Îndrumare: Ne sunt utile proprietățile incluziunii în raport cu reuniunea și intersecția:

$A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$ și $B \subset C$; $C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A$ și $C \subset B$

17. a) Să se rezolve ecuația $\{a,b\} \cup X = \{a,b,c\}$

b) Fie $A \subset B$ și $A \neq \varnothing$. Să se arate că ecuația $A \cup X = B$ este echivalentă cu $B \setminus A \subset X \subset B$.

c) Studiați compatibilitatea ecuației $A \cup X = B$ în cazurile $A \not\subset B$ și $A = B$

Îndrumare: Ne sunt utile și proprietățile incluziunii în raport cu reuniunea și intersecția: $A \subset B$ și $C \subset D$ atunci $A \cup C \subset B \cup D$ și $A \cap C \subset B \cap D$.

18. Să se rezolve ecuațiile: a) $\{a,b\} \triangle X = \{a,b,c\}$ b) $A \triangle X = B$.

Îndrumare: Dacă $X = Y$ atunci $M \triangle X = M \triangle Y$ și reciproc. Mai ținem cont că $M \triangle M = \varnothing$ și $\varnothing \triangle M = M = M \triangle \varnothing$

19. Să se rezolve ecuațiile: a) $\{a,b\} \cup X \subset \{a,b\} \cap X$ b) $\{a,b,c\} \cup X = \{a,b,d\} \cap X$

Operații cu mulțimi numerice

20. Fie mulțimile: $A = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$C = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $D = \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $E = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se scrie câte trei elemente ale fiecărei mulțimi.

b) Să se arate că $A \cup B = C$ și $A \cup D = E$

21. Fie mulțimile: $A = \left\{\frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{\frac{\pi}{4} - k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$C = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $D = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $E = \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Să se arate că $A \cup B = C \cup D \cup E$.

22. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care:

a) $|A \cap B| = 0$; *b)* $|A \setminus B| \neq 0$; *c)* $|A \cup B| = 3$; *d)* $C_{\mathbb{R}} A = \varnothing$.

23. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - m = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x + 6 = 0\}$. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care:

a) $|A \cap B| = 1$; *b*) $|A \setminus B| = 0$; *c*) $|A \cup B| = 4$; *d*) $C_{\mathbb{R}} A \neq \varnothing$.

24. a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - m = 0\} \setminus \{-2, 1\} = \varnothing$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + m = 0\} \setminus \{0, 1\} \neq \varnothing$.

4.6.1 Test de evaluare

1. Fie A,B,C trei mulțimi.

a) Transcrieți în limbajul operatorilor logici enunțurile:
$x_0 \in (A \setminus B) \cap C$; $x_0 \in (A \cap C) \setminus B$.

b) Transcrieți în limbajul operatorilor logici duala propoziției: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

c) Demonstrați propoziția de la *b)*

2. Fie predicatele: $p(x)$: „$x > 0$ și $x \leq 2$”, $x \in \mathbb{R}$ și $q(x)$: „$x < 0$ sau $x \geq 1$”. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x)\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x)\}$ determinați mulțimile: $A \setminus B$; $A \cup B$; $A \cap B$.

3. Fie $X, Y \subset E$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, îndeplinind condițiile:

(1) $\{1, 4\} \subset X \setminus \overline{Y}$ (2) $\{2, 5\} \subset \overline{X \cup Y}$

(3) $3 \notin (X \setminus Y) \cup (\overline{X} \setminus \overline{Y})$, unde $\overline{X} = C_E X$. Să se arate că $X = Y$.

4. Să se arate că: $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$, $\forall A, B \subset E$

Căutați un contra exemplu pentru a dovedi că incluziunea în sens invers nu este adevărată.

5 Tipuri de raţonamente logice

5.1 Metoda inducţiei matematice

Principiul inducţiei matematice.

Fie $P(n)$ un enunţ care depinde de numărul n. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

I) $P(n)$ este adevărată pentru $n = m, m \in \mathbb{N}$ şi

II) presupunând că $P(n)$ este adevărată până la $n = k$ (unde k este un număr natural oarecare $k \geq m$), rezultă ca ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq m$.

Metoda inducţiei matematice pentru demonstrarea propoziţiilor de tip , "$\forall n, P(n)$"

Fie $P(n)$ un enunţ care depinde de numărul natural $n, n \geq m$. Demonstraţia prin metoda inducţiei matematice a propoziţiei „Pentru orice $n \geq m$, are loc $P(n)$"are două etape:

I) Verificarea: Se verifică faptul că $P(m)$ este adevărată;

II) Demonstraţia: Se demonstrează implicaţia $P(k) \implies P(k+1)$, unde k este un număr natural oarecare $k \geq m$ (adică presupunând că $P(k)$ este adevărată, se arată că $P(k+1)$ este adevărată).

Observaţii:

1. În etapa de demonstraţie, de multe ori se folosesc proprietăţi ale relaţiei de egalitate sau inegalitate din $\mathbb{R}$ ca:

a) $a = b \implies a + c = b + c$;

b) $a = b$ şi $b = c \implies a = c$;

c) $a \leq b \implies a + c \leq b + c$;

d) $a \leq b$ şi $b \leq c \implies a \leq c$;

e) $a \geq b$ şi $c > 0 \implies ac \geq bc$.

2. Pentru simplificarea scrierii folosim notaţiile:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

1. Să se arate că:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, n \geq 1$.

b) $\dfrac{1}{4 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 12} + \dfrac{1}{12 \cdot 16} + \ldots + \dfrac{1}{4n(4n+4)} + \dfrac{1}{16(n+1)} = \dfrac{1}{16}, n \geq 1$.

c) $2^n > n^3$, pentru $n \geq 10$.

Soluţie : Notăm enunţul prin $P(n)$.

I. Verificarea: $P(1) : 1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} \iff 1 = 1$, adevărată.

II. Demonstraţia: Presupunem propoziţia $P(n)$, adevărată până la $n = k$ şi în această ipoteză să arătăm că ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

$$P(k) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \tag{1}$$

$$P(k+1) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \tag{2}$$

Adunând ambilor membrii ai egalității (1) pe $(k+1)^3$ obținem $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

Deci egalitatea este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Egalitatea de demonstrat se scrie sub forma echivalentă:

$\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{n}{16(n+1)}$ (De ce ?)

Notăm prin $P(n)$ enunțul: $\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{n}{16(n+1)}, n\geq 1$.

I. Verificarea: $P(1):\ \frac{1}{4\cdot 8}=\frac{1}{16(1+1)}\iff\frac{1}{32}=\frac{1}{32}$, adevărată.

II. Demonstrația: Arătăm că $P(k)\implies P(k+1)$, unde

$P(k):\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4k(4k+4)}=\frac{k}{16(k+1)}, k\geq 1$

$P(k+1):\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{12\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4k+4)(4k+8)}=\frac{k+1}{16(k+2)}, k\geq 1$

Avem: $\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{(4k+4)(4k+8)}=$

$\underbrace{\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4k(4k+4)}}_{P(k)}+\frac{1}{(4k+4)(4k+8)}=\frac{k}{16(k+1)}+$

$\frac{1}{(4k+4)(4k+8)}=\frac{k}{16(k+1)}+\frac{1}{16(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{16(k+2)}$, și deci egalitatea este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Notăm enunțul prin $P(n)$ $(P(n):2^n>n^3,\ \forall\ n\geq 10)$

I. Verificarea: $P(10):2^{10}=1024>10^3=1000$, adevărată.

II. Demonstrația: Presupunem propoziția $P(n)$, adevărată până la $n=k$ și în această ipoteză să arătăm că ea este adevărată și pentru $n=k+1$, unde

$$P(k):2^k>k^3, k\geq 10 \tag{3}$$

și

$$P(k+1):2^{k+1}\geq(k+1)^3 \tag{4}$$

Înmulțind inegalitatea (3) cu 2 obținem $2^{k+1}>2k^3$ deci, pentru a demonstra inegalitatea (4), este suficient să demonstrăm că $2k^3>(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$ pentru $k\geq 10$. Inegalitatea de demonstrat devine $k^3>3k^2+3k+1$. Din $k\geq 10$ rezultă, prin înmulțire cu k^2, inegalitatea $k^3\geq 10k^2$. Cum $10k^2>3k^2+3k+1$ pentru $k\geq 10$, rezultă și inegalitatea de demonstrat. Deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\geq 10$.

2. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul n, sunt adevărate egalitățile:

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{3}$;

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{(4n^2-1)n}{3}$;

d) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

e) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

f) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$;

g) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$;

h) $1^4-2^4+3^4-4^4+\ldots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$;

i) $2+16+56+\ldots+(3n-2)2^n=10+(3n+5)\cdot 2^{n+1}$.

j) $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$ pentru $n\geq 2$.

3. Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ are loc egalitatea:

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n(n+2)}{n+1}.$$

4. Să se demonstreze prin inducție matematică că $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ au loc egalitățile :

a) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

b) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

c) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

d) $\dfrac{7}{1\cdot 8}+\dfrac{7}{8\cdot 15}+\dfrac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\dfrac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\dfrac{1}{7n+1}=1$;

e) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{15}{16}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

5. Să se demonstreze egalitățile:

a) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

b) $2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)=(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

6. Să se arate că: $\dfrac{2}{3+1}+\dfrac{2^2}{3^2+1}+\dfrac{2^3}{3^4+1}+\ldots+\dfrac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}=1-\dfrac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$

7. Se dă $S_n=1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+n(n+3), n\geq 1$

a) Urmăriți calculele: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+n(n+3)=1(1+3)+2(2+3)+3(3+3)+\ldots+n(n+3)=(1^2+1\cdot 3)+(2^2+2\cdot 3)+(3^2+3\cdot 3)+\ldots+(n^2+3\cdot n)=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots n)$. Ce proprietăți ale înmulțirii și adunării numerelor reale s-au aplicat?

b) Folosind punctele a) și b) de la exercițiul 1., finalizați calculele.

c) Demonstrați prin inducție matematică propoziția:

$$„S_n = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}\,,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*\ ”$$

Observație: Prescurtat, calculele de la punctul a) se pot scrie: $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot(k+3) = \sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+3\cdot k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} 3\cdot k = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum\limits_{k=1}^{n} k.$

8. Calculați sumele următoare și verificați prin inducție matematică corectitudinea calculului:

a) $S_n = 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \ldots + n(3n+1)$;

b) $S_n = 1\cdot 5 + 2\cdot 9 + \ldots + n(4n+1)$;

c) $S_n = 5^2 + 9^2 + \ldots + (4n+1)^2$;

d) $S_n = 2^2 + 6^2 + 10^2 + \ldots + (4n+2)^2$;

e) $S_n = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \ldots + n(n+2)$;

f) $S_n = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$;

g) $S_n = 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3$.

9. Să se arate că $\frac{1}{a(a+r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+r}\right)$, $(\forall)a, r \in \mathbb{R}^*$ și să se calculeze sumele următoare, apoi să se verifice prin inducție matematică corectitudinea calculului:

a) $S_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

b) $S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

d) $S_n = \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$;

10. Să se arate că $\frac{1}{a(a+r)(a+2r)} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a(a+r)} - \frac{1}{(a+r)(a+2r)}\right)$, $(\forall)a, r \in \mathbb{R}^*$ și să se calculeze sumele următoare:

a) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

b) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

11. Să se determine $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ să aibă loc egalitatea:

$$\frac{1^4}{x} + \frac{2^4}{x+1} + \frac{3^4}{x+2} + \ldots + \frac{n^4}{x+(n-1)} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

12. Să se arate că:

a) $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]$, $(\forall)n \geq 1$

b) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx], (\forall)x>0,$
$(\forall)n\in\mathbb{N}^*$

13. Să se demonstreze că:

a) dacă $n\geq 2$, atunci $2^n>n^2-1$;
b) dacă $n\geq 5$, atunci $2^n>n^2$;
c) dacă $n\geq 4$, atunci $2^n>2n+3$;
d) dacă $n\geq 2$, atunci $2^{n+1}>n^2-n+2$;
e) dacă $n\geq 2$, atunci $3^n>n^3$.

14. Pentru ce valori ale lui $n\in\mathbb{N}$ avem pe rând:

a) $3^n<2^n+7n$; b) $2^n>n^2+4n+5$ c) $3^n\geq 6n^2$?

15. Să se verifice prin inducție matematică următoarele inegalități:

a) $1+2+3+\ldots+n<\frac{(n+1)^2}{2}$, $(\forall)n\geq 1$;
b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2<\frac{(2n+1)^3}{6}$, $(\forall)n\geq 1$;
c) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3<2n^4$, $(\forall)n\geq 1$;
d) $\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(2n-1)}<\frac{4n-1}{2n}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$;
e) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\leq n$, $(\forall)n\geq 1$.

16. Să se arate că:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}, (\forall)n\geq 1$;
b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $(\forall)n\geq 2$;
c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4n+1}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}, (\forall)n\geq 1$;
d) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)<3-\frac{1}{n}, (\forall)n\geq 2$.

17. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}, (\forall)n\geq 2$;
b) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{k+1}-2, (\forall)n\geq 1$;
c) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{7}{10}, (\forall)n\geq 1$;
d) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1, (\forall)n\geq 1$;
e) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{3n+1}}>1$, $(\forall)n\geq 1$.

18. Să se arate că numărul $A=5^{2n-1}+5^{5n+1}+5^{5n}$ este divizibil cu 31 pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Să se arate că

1. $3^{2n+2}-2^{n+1}$ se divide cu 7 ,$(\forall)n \in \mathbb{N}$
2. $3 \cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ se divide cu 17,$(\forall)n \in \mathbb{N}$
   a) prin metoda inducției matematice;
   b) fără a folosi metoda inducției matematice.

Indicație: 1.b) Avem $3^{2n+2}-2^{n+1}=9^{n+1}-2^{n+1}=(9-2)(9^n+9^{n-1}\cdot 2+9^{n-2}\cdot 2^2+\ldots+9\cdot 2^{n-1}+2^n)$;
2.b) Avem: $3 \cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}=15 \cdot 25^n+2 \cdot 8^n=15 \cdot (25^n-8^n)+17 \cdot 8^n$ *etc*.

20. Să se arate că:

a) $7^{4n+1}-7$ se divide cu 210;
b) $13^{4n+1}-13$ se divide cu 390;
c) $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ se divide cu 111.

21. Să se arate că următoarele afirmații sunt adevărate pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $7^{4n+1}-7$ se divide cu 210;
b) $2^{4n+1}-2$ se divide cu 30;
c) $2^{(2n-1)^2}+13$ se divide cu 15;
d) $3^{2n} \cdot 7^n-2^{3n} \cdot 5^n$ se divide cu 23;
e) $4^n+15n-1$ se divide cu 9;
f) $3^{2n+1}+40n-67$ se divide cu 64;
g) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ se divide cu 133;
h) $6^{10n+1}+5^{11n-1}$ se divide cu 31;
i) $7 \cdot 5^{2n}+12 \cdot 6^n$ se divide cu 19;
j) $2^{7n+3}+3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ se divide cu 23.

22. Să se arate că $(\forall)n \in \mathbb{N}$, avem: $(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n \in \mathbb{Z}$.

Indicație: Notăm $a=2+\sqrt{5}$, $b=2-\sqrt{5}$ și avem $a+b=4, ab=-1$.

Folosind identitatea: $a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)(a^n+b^n)-ab(a^{n-1}+b^{n-1}) \Longrightarrow (2+\sqrt{5})^{n+1}+(2-\sqrt{5})^{n+1}=4((2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n)+((2+\sqrt{5})^{n-1}+(2-\sqrt{5})^{n-1})$

23. Fie $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că $x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural nenul n.

24. Să se arate că $(\forall)n \in \mathbb{N}$, avem: $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$.

25. a) Demonstrați că: $2<\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}<3$;

b) Aflați partea întreagă a lui $x_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, numărul având n radicali, $n \in \mathbb{N}^*$.

26. Calculați partea întreagă a numărului

$a_n = \sqrt{2004 + \sqrt{2004 + \ldots + \sqrt{2004 + \sqrt{2004}}}}$

numărul radicalilor fiind n, $n \geq 2$.

27. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \frac{1}{6}$ și $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\left(x_n + \frac{1}{2}\right)$, $\forall n \geq 1$.

a) Să se determine primii cinci termeni ai șirului.

b) Sa se determine termenul general al șirului.

28. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir definit prin: $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall n \geq 1$.

a) Aflați termenul general al șirului;

b) Calculați suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)a_k^2$ și arătați că $S_n < 1$

Prof. Traian Tămâian

29. Să se determine numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ strict pozitive care verifică relația:

$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

30. Să se determine numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ știind că:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \frac{(n-1)n(n+1)}{3},\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$$

31. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ astfel încât $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{2k+1}{3}$ pentru oricare $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Arătați că $(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

Romeo Ilie

32. Să se determine numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ știind că: $a_1 = 1$ și $\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 \cdot a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 \cdot a_3^2} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{a_{n-1}^2 \cdot a_n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

33. Determinați numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ știind că

$$a_3 = 3 \text{ și } a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{3}a_3^2 + \ldots + \frac{1}{n}a_n^2 = \frac{a_n a_{n+1}}{2}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

34. Se consideră șirul de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin $a_1 = \sqrt{34}$ şi $\sqrt{a_{n+1}^2 - 33} = 2 + \sqrt{a_n^2 - 2n - 32}$ pentru $n \geq 1$. Dacă $x_n = \left[\frac{4 \cdot 10^4}{a_n}\right]$, $(\forall)\ n \geq 1$ unde prin $[a]$ am notat partea întreagă numărului a, se cere:

a) Demonstrați că $a_2 = \sqrt{2^2 + 33}$ și $a_3 = \sqrt{3^2 + 33}$;

b) Determinați formula termenului general pentru a_n;

c) Aproximați a_{19} cu două zecimale exacte şi apoi calculați x_{19};

d) Arătați că există un singur număr natural n pentru care $x_n = 2015$.

35. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ proprietărea:

$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

36. Să se determine funcția $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ cu proprietățile:

a) $f(4) = 4$

b) $\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + ... + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n+1)}$

37. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, $n \geq 6$, un pătrat poate fi împărțit în n pătrate.

Soluție: Notăm cu $P(n)$ propoziția din enunț. Propoziția este adevărată pentru $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$ așa cum se vede din figurile de mai jos.

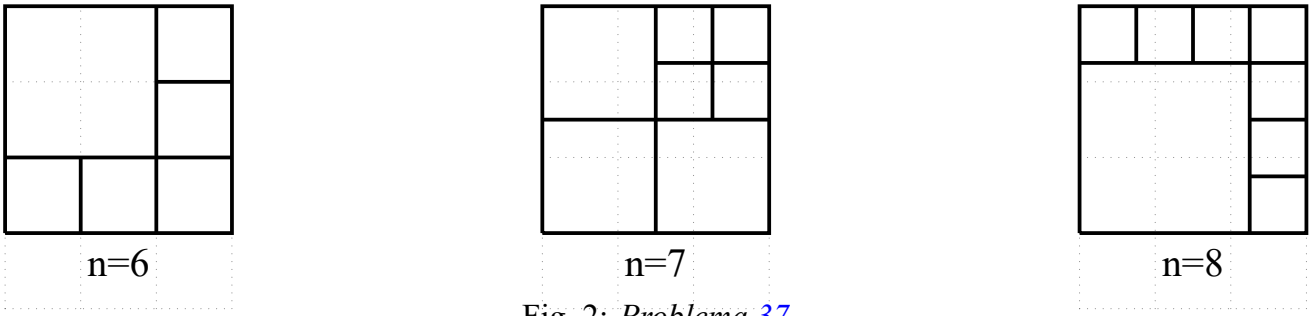


Fig. 2: *Problema 37*

Pentru ca $P(n)$ să fie adevărată, este suficient să demonstrăm că „$P(k) \Rightarrow P(k+3)$" este adevărată pentru orice $k \in \mathbb{N}, n \geq 6$.

Presupunând împărțirea în k pătrate, unul dintre ele se împarte în 4 pătrate egale și se obțin astfel $k + 3$ pătrate și deci implicația $P(k) \Rightarrow P(k+3)$ este adevărată.

5.1.1 Test de evaluare

1. Să se arate că: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{2n^2 - 1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2}{2n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

2. Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} + \frac{1}{18 \cdot 25} + \ldots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)}$$

și să se verifice prin inducție matematică corectitudinea calculului.

3. Să se arate că $13^n + 5$ se divide la 6, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

a) prin inducție matematică ;

b) fără a folosi inducția matematică.

4. Să se arate că: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

5.2 Probleme de numărare

Vom nota cu $|X|$ – numărul de elemente ale mulțimii finite X
(5.1) *Fie* $|A| = m$ *și* $|B| = n$. *Atunci* $|A \times B| = m \cdot n$
În general $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

1. a) Câte numere de două cifre $\overline{ab}$ există cu $a \geq 7$ și $b \leq 4$?

b) Câte numere de trei cifre $\overline{abc}$ există astfel încât $a \geq 5, b \leq 3, c \geq 6$?

c) Câte numere de patru cifre $\overline{abcd}$ există astfel încât $\overline{abcd} \vdots 4$,
$a \geq 2, b \leq 8, 1 \leq c \leq 2$. (toate numerele sunt în baza 10)

2. O urnă conține 3 bile albe, 2 bile roșii și 4 bile negre. Se extrag succesiv n bile din urnă fără a pune bila extrasă înapoi, $m \in \{2, 3, 4\}$

a) Câte posibilități de apariție a două bile există ? dar a trei bile; dar a patru bile.

Exemplu rezolvat: pentru $n = 2$. Prima bilă poate fi oricare din cele 9 aflate în urnă. A doua bilă poate fi oricare din cele 8 bile rămase în urnă, după extracția primei bile. Așadar numărul total de cuple ce pot fi extrase este $|A \times B|$, unde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ iar $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$, deci 72.

b) Dacă $n = 6$, în câte cazuri poate apărea combinația una albă, două roșii și trei negre $(1a, 2r, 3n)$? (nu neapărat în această ordine)

Indicație: Dacă notăm a_1, a_2, a_3 bilele albe, r_1, r_2 cele roșii și n_1, n_2, n_3,
n_4 cele negre atunci combinația $(a_1, r_1, r_2, n_1, n_2, n_3)$ este una din cele căutate; Răspuns: 12 combinații.

c) Dacă $n = 5$, câte cazuri posibile de apariție a combinației $2a, 1r, 2n$ există ?

Indicație: $2a \in \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3)\}$ ș.a.m.d.

d) Dacă $n = 7$, câte posibilități de apariție a combinației $2a, 2r, 3n$ există ?

3. Se aruncă simultan două zaruri identice cu șase fețe numerotate de la 1 la 6.

a) Câte posibilități de apariție a sumei 7 la o aruncare există ?

b) Dar a sumei 5? Dar a unei duble ? Dar un număr să fie par și altul prim ?

Indicație: De exemplu suma 4 se obține din combinațiile (1,3),(3,1),
(2,2)$\in A \times A$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. Să se afle câți divizori are numărul N a cărui descompunere în factori primi este N=$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$.

Indicație : Divizorii lui N sunt produsele elementelor din perechile produsului cartezian
$\{1, p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{\alpha_1}\} \times \{1, p_2, p_2^2, \ldots, p_n^{\alpha_2}\}$ adică în total $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$

(5.1.1) *În general, dacă* N=$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, *atunci numărul divizorilor lui N, notat* $\tau(N)$ *este* $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$ (justificare)

5. Determinați numărul divizorilor lui 360.

6. Câți divizori are numărul $2^9 \cdot 5^8 + 2^7 \cdot 5^7$, în mulțimea numerelor naturale .

7. Determinați toate numerele de forma $a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, unde α și β sunt numere naturale care au exact 8 divizori.

8. Să se determine forma numerelor care au exact 3 divizori; 5 divizori; 6 divizori; 12 divizori; și singuri săi divizori să fie 7 și 11.

9. Să se afle N de forma $N = 2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) 5N are cu 8 divizori mai mult decât N;

b) 7N are cu 12 divizori mai mult decât N.

10. a) Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ iar $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Să se arate că suma produselor elementelor din perechile produsului cartezian $A \times B$ este $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$

b) Să se afle suma divizorilor lui 400.

(5.2) *Principiul includerii și al excluderii*

Formula includerii și excluderii pentru două mulțimi A,B este:

$|A \cup B| = \begin{cases} |A| + |B| \text{ pentru } A \cap B = \varnothing \\ |A| + |B| - |A \cap B| \text{ pentru } A \cap B \neq \varnothing \end{cases}$; pentru trei mulțimi A, B, C are loc egalitatea : $|A \cup B \cup C| = \sum |A| - \sum |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$.

11. La un club sportiv sunt 59 de elevi. Dintre ei, 10 joacă numai șah, 15 numai tenis și 5 numai polo. Știind că 8 joacă șah și tenis, 4 joacă polo și tenis iar 2 elevi joacă toate trei sporturile, să se afle câți elevi joacă șah și polo.

12. Într-o tabără sunt 60 de elevi. Alături de limba maternă, 25 de elevi vorbesc limba franceză, 26 limba engleză, 23 limba germană, 9 vorbesc franceza și germana, 11 vorbesc engleza și franceza, 8 vorbesc engleză și germană, iar 3 vorbesc toate cele trei limbi.

a) Determinați numărul de persoane care vorbesc cel puțin o limbă străină.

b) Determinați numărul de persoane care vorbesc numai limba maternă.

c) Determinați numărul de persoane care vorbesc exact o limbă diferită de limba maternă.

13. Formulați și rezolvați exerciții analoage cu 11 și 12;

Indicație : Putem utiliza diagrama frunză de trifoi și aplicăm corect formula includerii și excluderii pentru trei mulțimi.

14. Într-o excursie școlara, elevii au putut alege între trei tipuri de activități: drumeție, ciclism şi vizitarea orașului. Programele s-au desfășurat la ore diferite, astfel încât un elev a putut participa la mai multe activități. Dintre elevi 18 au participat la drumeție, 10 au mers cu bicicleta, 12 au vizitat orașul, 6 au participat şi la drumeție și la ciclism, 7 au participat şi la drumeție şi la vizitarea orașului, 5 au participat şi la ciclism şi la vizitarea orașului, 4 elevi au participat la toate cele trei activități. Cați elevi au participat în total la excursie, dacă fiecare elev a ales cel puțin o activitate? Justificați răspunsul.

15. Într-o școală se practică baschetul, handbalul și fotbalul. Notăm cu B, H, F mulțimile celor care joacă baschet, handbal și respectiv fotbal. Se știe că numărul elevilor este 120 și în plus avem:

(1) $|B| = 30$; (2) $|F| = 20$; (3) $|H| = 45$; (4) $|B \cap F| = 15$; (5) $|F \cap H| = 10$; (6) $|B \cap H| = 12$; (7) $|H \cap B \cap F| = 5$. Se cer cardinalele mulțimilor elevilor:

a) $|F \setminus B|$; b) $|B \setminus H|$; c) $|(B \cup H) \setminus F|$ d) joacă doar fotbal e) joacă doar handbal f) nu practică nici un sport.

Indicație : Utilizați o diagramă „ frunză de trifoi" ca în exercițiul 11.

16. Fie A, B, C trei mulțimi finite așa încât $|A \cup B| - |C \cup B| = |C \cap B| - |A \cap B|$. Să se arate că $|A \setminus C| = |C \setminus A|$.

17. Fie $A, B \subset E$ două mulțimi, astfel încât $|A \cup B| = |A \cap B|$. Să se arate că $|A| = |B|$.

18. Fie $A, B \subset E$ două mulțimi.

a) Să se arate că au loc egalitățile:

(1) $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |E| - |A \cup B|$ (2) $|\overline{A} \cup \overline{B}| = |E| - |A \cap B|$

b) Stabiliți egalități analoage pentru $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$ și $|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}|$.

c) Câte numere de trei cifre care nu conțin decât cifrele 3,5,7 fiecare cel puțin o dată, există ?

19. a) Câte numere naturale, mai mici sau egale cu 100 se divid cu 2 și cu 3?

b) Câte numere naturale, mai mici sau egale cu 100 se divid cu 2 sau cu 3?

20. a) Câte numere naturale nenule, mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile cu 3 sau 4 sau 5?

b) Câte numere naturale nenule, mai mici sau egale cu 1000 nu sunt divizibile nici cu 3 nici cu 4 și nici cu 5?

c) Câte numere naturale nenule, mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile cu 3 sau 4 și nu sunt divizibile cu 5?

21. a) Câte numere naturale mai mici sau egale cu 500 nu se divid nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5 ?

b) Câte numere naturale mai mici sau egale cu 500 sunt divizibile sau cu 2 sau cu 3 sau cu 5 și nu sunt divizibile cu 7 ?

22. a) Câte numere mai mici decât 72 și prime cu 72 există ?

b) Câte numere mai mici decât $n = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\alpha_2}$ și prime cu n există ?

c) Câte numere mai mici decât 2250 și prime cu 2250 există ?

d) Câte numere mai mici decât $n = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$ și prime cu n există?

În general, numărul numerelor prime cu n și mai mici decât n este dat de formula
$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ unde $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$; (justificare)
$\varphi(n)$ – indicatorul lui Euler

23. a) Să se determine numărul de numere prime mai mici decât 150
(„ Ciurul" lui Eratostene)

Indicație: Putem nota $A_1 = \{k \mid 2|k\}$, $A_2 = \{k \mid 3|k\}$, $A_3 = \{k \mid 5|k\}$, $A_4 = \{k \mid 7|k\}$, $A_5 = \{k \mid 11|k\}$ (de ce ne oprim la 11 ?) și numărul căutat va fi: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}|$ etc.

(5.3) *Numărul de coduri de n cifre ce se pot forma cu m cifre este* m^n. (pentru demonstrație se poate recurge la inducție după n)

24. a) Câte coduri de n cifre se pot forma cu cifrele 0 și 1, $n \geq 2$. Inducție după n. *Rezolvare*: Dacă $n = 2$ avem 00,01,11,10, deci 2^2.

Pentru $n = 3$, din fiecare cod anterior se mai obțin alte două coduri: 001,000 etc, deci în total 2^3. Presupunem că numărul de coduri de lungime n este 2^n. Din fiecare cod de n cifre se obțin două de câte $n + 1$ cifre, deci în total 2^{n+1} coduri de $n + 1$ cifre

b) Fie E o mulțime cu 4 elemente, E=$\{a, b, c, d\}$

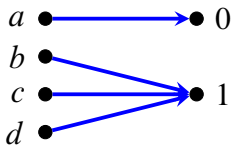
i) Scrieți toate codurile de câte 4 cifre formate numai cu 0 și 1

ii) Scrieți toate submulțimile mulțimii E, inclusiv $\varnothing$ și E.

c) Fie $\mathcal{P}(E)$ mulțimea părților mulțimii E și M mulțimea codurilor. Stabiliți o corespondență între $\mathcal{P}(E)$ și M după regula: dacă un element $x \in E$ nu figurează în $A \subset E$ se trece în cod cifra 0, în caz contrar se trece 1. Repetați exercițiul pentru $E = \{a, b, c\}$

d) Comparați $|\mathcal{P}(E)|$ și $|M|$. Stabiliți formula: $2^{|E|} = |\mathcal{P}(E)|$

Indicație: c) Corespondența poate fi redată prin diagramă



sau tabel:

a	b	c	d
0	1	1	1

25. a) Fie A și B două mulțimi finite îndeplinind condițiile:

(1) Din $A \cup B$ se obțin 128 submulțimi

(2) $\mathcal{P}(B)$ conține 8 submulțimi

(3) $A \cap B \neq \varnothing$

Să se arate că $A \cap B$ are cel puțin un element iar A cel puțin 5 elemente

b) Fie A și B două mulțimi îndeplinind condițiile:

(1) Cu elementele lui A se pot forma 32 de submulțimi

(2) $|\mathcal{P}(B)| = 16$

(3) $A \cap B \neq \varnothing$

Arătați că $A \cup B$ are cel mult opt elemente iar $A \cap B$ cel puțin un element.

26. a) Se aruncă o monedă de patru ori notându-se de fiecare dată cu A sau R (anvers sau revers) ceea ce a apărut, obținându-se astfel un șir de patru semne. Scrieți toate șirurile ce se pot obține.

b) Dar dacă se aruncă moneda de 5,6,7 ori, câte astfel de șiruri de semne se obțin ? Găsiți o legătură între acest exercițiu și exercițiul 17.

c) Socotiți, în câte cazuri ale aruncării monedei de 4 ori, apare stema cel puțin o dată ! Dar de 2 ori banul și de 2 ori stema ? Dar de 3 ori banul și o dată stema ?

d) În câte cazuri ale aruncării monedei de 5 ori apare banul de cel puțin două ori ? Dar de trei ori stema și de două ori banul ? Dar cel mult odată stema ?

27. Se aruncă două zaruri. În câte cazuri este posibil să apară cel puțin o dată fața 5?

Soluție : Dacă notăm cu $A = \{(a,b) \mid a,b \in \{1,2,3,4,6\}\}$ atunci $A \cup \overline{A} = E$ de unde $|\overline{A}| = |E| - |A| = 6^2 - 5^2 = 11$ cazuri.

28. a) Într-o localitate sunt atâtea mașini câte triplete de trei litere distincte ale alfabetului latin există. Calculați câte sunt ? (Alfabetul latin are 26 litere)

b) În câte situații este posibilă întâlnirea unei mașini al cărui număr începe cu litera A? Dar a unei mașini al cărui număr este de forma $*$AB ?

29. a) Câte numere de trei cifre în baza 3 există ? Dar de 4cifre ?

b) Câte numere naturale de 4 cifre formate numai cu cifrele 0,1,2,3 există ?

c) Câte numere de trei cifre în baza 7 există, care nu încep cu cifra 0 ?

30. Câte numere de n cifre, $n \in \mathbb{N}^*$ scrise în sistemul zecimal există ? Dar în sistemul binar ? Dar într-un sistem oarecare cu baza b ?

31. a) În câte moduri se pot distribui 7 cărți la 4 elevi (un elev poate primi mai multe cărți) ?

b) În câte moduri se pot aranja 5 cărți pe 3 rafturi ? Dar 4 cărți pe două rafturi ? (pot exista mai multe cărți pe un raft)

c) Răspundeți la b) și în cazul când pe fiecare raft este cel puțin o carte.

32. Calculați: $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))))|$; $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))|$ și $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))|$ când $|A| = 1$ și respectiv $|A| = 2$.

(5.4) *Numărul de moduri în care n obiecte pot fi repartizate pe n locuri (fiecare obiect ocupă un loc și nu există loc fără obiect) este egal cu* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ *scris pe scurt* $n!$ (*n factorial*) (pentru demonstrație se poate apela la metoda inducției matematice)

Exemple: a) În câte moduri se pot aranja trei litere a, b, c pe locurile 1,2,3 din căsuțele | | | |. Scrieți și modalitățile de aranjare.

Aceeași întrebare pentru patru litere a,b,c,d care se aranjează în patru căsuțe numerotate de la 1 la 4. Descrieți-le.

33. Cu cifrele 0,1,3,5,7,9 se formează toate numerele posibile de câte 6 cifre, astfel încât în fiecare număr să nu fie cifre identice. Să se afle:

a) Câte astfel de numere există ?
b) Câte dintre ele încep cu cifra 7? Dar cu cifra 3?
c) Câte dintre ele încep cu grupul 13 ? Câte se termină în 13 ?
d) Câte conțin cifrele 3,5,7 la rând și în ordine crescătoare ? Dar dacă sunt în ordine descrescătoare?
e) În câte dintre ele, cifrele 3,5,7 nu ocupă trei locuri la rând ?

34. În câte moduri se poate ordona mulțimea $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ pe locurile

1	2	3	4	5	6

astfel încât numerele 10,12,14,15 să stea pe locurile de rang $\neq 1$, ce divide numărul respectiv ?

Exemplu: 15 să stea pe pe pozițiile 3 și 5; 14 doar pe poziția 2 etc.

35. a) Fie $A = \{a, b, c\}$ și $M = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \neq y\}$. Aflați $|M|$

Rezolvare : Avem că $M \cup D = A \times A$, unde $D = \{(x, x) \mid x \in A\}$ iar $M \cap D = \varnothing$. De aici $|M| = |A \times A| - |D| = 3 \cdot 3 - 3 = 3 \cdot 2 = 6$.

b) Câte perechi de câte două elemente distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$?

c) Câte triplete de elemente se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$?

Rezolvare : Plecăm de la perechile formate la punctul b. Să notăm cu M_2 mulțimea lor. Din fiecare element al mulțimii M_2 putem forma două elemente de forma cerută: exemplu, din (a, b) găsim (a, b, c) și (a, b, d). Să notăm cu $M_3 = \{(x, y, z) | \ x, y, z \in A$, distincte$\}$. Atunci $|M_3| = |M_2| \cdot (4 - 2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

(5.5) *În general, numărul de grupe ordonate de câte k elemente ce se pot forma cu elementele unei mulțimi de n elemente, $n \geq k$ este egal cu $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$* (demonstrați prin inducție după k, folosind eventul modelul produsului cartezian).

36. a) Câte numere de două cifre există ? Câte numere dintre acestea au cifrele distincte ? Dar de trei cifre ?

b) Scrieți toate grupele ordonate de trei litere distincte ce se pot forma cu literele a, b, c, d.

c) Câte grupe ordonate de 3 cifre, de 4 cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5 ?. Scrieți-le pe cele de 4 cifre ?

37. a) Căutați exemple concrete din realitate cu caracter practic care conduc la probleme de numărare după modelul (5.4)

b) Căutați exemple concrete din realitate cu caracter practic care conduc la probleme de numărare după modelul (5.5)

38. Fie în plan n puncte distincte oricare trei necoliniare.

a) Câte drepte distincte determină aceste puncte ?

Rezolvare: Fiecare punct din cele n se unește cu fiecare din cele $n-1$ rămase, deci în total $n(n-1)$ perechi. Dar în acest fel fiecare dreaptă este numerotată de două ori: AB și BA, deci numărul total căutat este $\dfrac{n(n-1)}{2}$

b) Câte triunghiuri determină cele n puncte ?

Rezolvare: Un triunghi este determinat de o pereche de puncte din cele formate la punctul a) (A,B) și un punct C, așa încât C$\notin (AB)$. În total obținem $\dfrac{n(n-1)}{2} \cdot (n-2)$ triunghiuri. Dar în felul acesta triunghiul ABC este numărat de trei ori: $\{(B, C), A\}, \{(C, A), B\}\{(A, B), C\}$. Deci în final avem $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}$ triunghiuri.

c) Câte cvadruple de puncte se pot forma cu cele n puncte ?

(5.6) *În general numărul de submulțimi de k elemente ce se pot forma cu elementele unei mulțimi de n elemente $n \geq k$, este egal cu* $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$

39. a) Câte submulțimi de câte două numere prime se pot forma cu numerele prime de la 1 la 30? Dar submulțimi de câte trei pătrate perfecte ?

b) Câte mulțimi de șase numere, din care două sunt numere prime, trei sunt pătrate perfecte iar unul este cub perfect se pot forma cu numerele de la 1 la 30 ?

40. a) Fie $A = \{a, b\}$. Scrieți $\mathcal{P}(E)$. verificați formulele date în exercițiul 17.d) și exercițiul 31 pentru submulțimi de câte un element și de câte două elemente.

b) Repetați exercițiul a) pentru $A = \{a, b, c\}$, apoi pentru $B = \{a, b, c, d\}$.

c) Alegeți pentru n și k valori arbitrare, $n \geq k$ și aflați numărul de submulțimi de câte k elemente ce se pot forma cu n elemente, după formula dată de (5.6). Verificați pentru $n \leq 10$, de fiecare dată și relația $2^{|E|} = |\mathcal{P}(E)|$, unde $|E| = n$.

41. Din 12 elevi, din care 7 băieți și 5 fete, se formează o echipă alcătuită din 6 elevi, din care fac parte cel puțin două fete. În câte moduri se poate forma această echipă ?

(5.7) *Fie o secvență de numere* $A = \{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_p\}$ *unde fiecare termen se obține din precedentul prin adăugarea unei aceleiași cantități* r. *Atunci* $|A| = \dfrac{|a_p| - |a_k|}{r} + 1$.

42. Câte numere conține șirul:

a) 3,7,11,...,99;

b) 6,11,16,...,126;

c) $2^3, 2^5, \ldots, 2^{2p-1}$;

d) $\dfrac{1}{3n+1}, \dfrac{1}{3n+4}, \ldots, \dfrac{1}{6n-2}$; f) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{4}{5}}, \sqrt{\dfrac{6}{7}} \ldots, \sqrt{\dfrac{122}{123}}$.

e) $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{8}, \ldots, \dfrac{\pi}{1024}$;

43. a) Câți factori conține produsul:

1) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}$;

2) $\dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{11}{10} \cdot \dfrac{17}{16} \cdot \dfrac{27}{40} \cdot \ldots \cdot \dfrac{10n+17}{12n+16}$;

(3) $\dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}$

b) Câți termeni conține suma:

(1) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$;

(2) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

(3) $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

44. a) Câți termeni conține șirul dat de formula $a_n = (-1)^n(3n-1)$, $n \geq 1$ știind că ultimul termen este 401? Câți dintre ei sunt negativi, câți dintre ei sunt pozitivi ?

b) Aceeași întrebare pentru șirul $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{5n-1}{2}, n \geq 2$, ultimul termen fiind -377

(5.8) *Exponentul numărului prim* p *din descompunerea canonică a lui* $n!$ *este*
$\left[\dfrac{n}{p}\right] + \left[\dfrac{n}{p^2}\right] + \left[\dfrac{n}{p^3}\right] + \ldots$ *(Legendre)*

Numărul factorilor produsului $n!$, multiplii ai lui p este $\left[\frac{n}{p}\right]$, dintre aceștia $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ vor fi multipli ai lui p^2 ș.a.m.d. Suma numerelor indicate va da exponentul căutat, deoarece fiecare factor al produsului $n!$ care este multiplu de p^m, nu și de p^{m+1} se socotește de m ori ca multiplu de $p, p^2, \ldots, p^m$ etc.

45. În câte zerouri se termină numărul 300! ?

46. Să se determine exponentul lui 72 în 134!

47. În câte zerouri se termină numărul $31 \cdot 32 \cdot \ldots \cdot 60$?

48. Care este valoarea numitorului fracției N=$\frac{50!}{21^{30}}$ după simplificare ?

(5.9) *Principiul cutiei*

• În algebră acest principiu, – principiul lui Dirichlet – se mai formulează astfel: dacă repartizăm $k \cdot n+1$ obiecte în n cutii, atunci, cel puțin o cutie va conține cel puțin $k+1$ obiecte (se subânțelege condiția ca în fiecare cutie să fie cel puțin un obiect)

49. Să se arate că oricum am alege 7 numere naturale, există două a căror diferență se divide la 6.

Rezolvare : Numerele naturale le putem gândi împărțite în atâtea clase câte resturi se obțin la împărțirea prin același număr n. Exemplu, dacă $n = 6$, atunci $\mathbb{N} = \{x|x = 6k\} \cup \{x|x = 6k+1\} \cup \{x|x = 6k+2\} \cup \{x|x = 6k+3\} \cup \{x|x = 6k+4\} \cup \{x|x = 6k+5\}$, aceste șase clase fiind de fapt și cutiile. Se înțelege că luând 7 numere naturale, vor exista cel puțin din aceeași clasă, deci $6k + r - 6k' - r = 6(k + k') \vdots 6$

50. Se dă o mulțime M formată din n numere întregi. Să se arate că există o submulțime a lui M astfel încât suma elementelor sale să fie divizibilă prin n.

Gh.Szõllõsy

Indicație: Se consideră n numere formate astfel: $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k, k = \overline{1,n}$ și apoi se aplică teorema împărțirii cu rest

51. În 100 de cutii se află mere. Dacă fiecare cutie conține cel mult 48 de mere, să se arate că există cel puțin trei cutii ce conțin același număr de mere.

52. Să se arate că fiind date 12 numere naturale distincte, de două cifre, se pot alege două a căror diferență este un număr de două cifre identice.

53. Să se arate printre puterile a patra a oricăror 5 numere naturale există întotdeauna cel puțin două a căror diferență se divide cu 10.

• *În geometrie principiul cutiei are următorul enunț* : Dacă figurile $F_1, F_2, \ldots, F_n$ cu ariile $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sunt incluse în figura F cu aria S și $S_1 + S_2 + \ldots + S_n > kS$, atunci $k+1$ din figurile $F_1, F_2, \ldots, F_n$ au un punct comun

O altă formulare: fie în plan o figură F de arie S și n figuri F_i de arie $S_i, i = \overline{1,n}$. Dacă $S > \sum S_i$ atunci cele n figuri F_i nu pot acoperi figura F. Dacă cele n figuri acoperă pe F, atunci $\sum_{i=1}^{n} S_i \geq S$.

54. În dreptunghiul ABCD, cu AB=4 și BC=3 sunt așezate 13 puncte. Să se arate că există cel puțin două puncte pentru care distanța este mai mică decât $\sqrt{2}$.

55. În interiorul triunghiului echilateral de latură 1 se află 17 puncte. Să se arate că există cel puțin două puncte cu distanța între ele mai mică decât 0,25.

56. În pătratul de latură 1 se consideră 201 puncte. Să se arate că există cel puțin trei puncte, dintre acestea, conținute într-un cerc de rază $\frac{1}{10}$.

Indicație: Împărțim pătratul de latură 1 într-o rețea 10×10, obținând astfel 100 pătrate mici, fiecare având latura $\frac{1}{10}$, fiecare pătrat fiind inclus într-un cerc cu raza $\frac{1}{10}$.

57. În plan se consideră n vectori necoliniari doi câte doi. Să se arate că există doi vectori cu unghiul între ei mai mic decât $\frac{180^0}{n}$.

Indicație: Printr-un punct din plan considerăm n vectori egali cu cei dați. Suporturile lor împart planul în $2n$ regiuni unghiulare.

58. Să se arate că în orice poligon convex cu 21 de laturi există două diagonale care formează între ele un unghi mai mic decât 1^0.

5.2.1 Test de evaluare

1. Determinați numărul numerelor de 4 cifre care încep și se termină cu cifra 4.

2. Determinați numărul numerelor de 4 cifre distincte care încep și se termină cu cifra 4.

3. Determinați numărul numerelor de cinci cifre care au suma primelor două cifre egală cu 5.

4. Calculați câte diagonale are un poligon cu 12 laturi.

5. Dintr-o clasă de 30 elevi, la olimpiada de limba română au participat 15 elevi, la matematică au participat 12 elevi și 5 elevi au participat la ambele. Câți elevi nu au participat la nicio olimpiadă?

6. În câte zerouri se termină numărul 200! ?

7. Câte numere naturale mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile cu 2 sau cu 3 sau cu 5 ?

8. Să se determine exponentul lui 21 în 100!.

6 Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale.

1. Calculează primele 5 valori ale fiecăreia dintre următoarelor funcţii:

a) $u : \{1, 3, 5, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(x) = 2x - 1$;

b) $v : \{3n \mid n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{N},\ v(x) = \dfrac{x}{3}$;

c) $w : \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ w(x) = \sqrt{x}$;

2. Fie funcţia $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ a(n) = \dfrac{5 + (-1)^{n+1}}{n}$. Determinaţi punctele de coordonate: $(1, a(1))$, $(2, a(2))$, $(3, a(3))$, $(4, a(4))$ şi reprezentaţi-le grafic.

3. Fie $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \longrightarrow R,\ f(x) =$ restul împărţirii lui x cu 4. Reprezentaţi grafic funcţia.

4. Se dă funcţia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(n) = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$. Notăm $a_n = f(n)$. Calculaţi $a_1, a_4, a_{10}, a_{100}$.

5. Se dă funcţia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(0) = 1;\ f(n + 1) = \dfrac{f(n)}{1 + f(n)}$. Notăm $a_n = f(n)$.

a) Calculaţi a_1, a_2, a_3, a_4.

b) Arătaţi că $a_n < \dfrac{1}{n}, (\forall)n \geq 2$.

6. Se dă funcţia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, definită astfel $f(1) = 2,\ f(n + 1) = 2n + f(n), (\forall)n \geq 2$.

a) Să se calculeze primele patru valori ale funcţiei;

b) Să se arate că $f(n) = n^2 - n + 2,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că $f(n)$ este număr par $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.1 Şiruri de numere reale

Definiţia 10. *O funcţie $f : N_k \longrightarrow A$ unde $N_k = \{k, k + 1, k + 2, ...\}, k \in N$ şi $A \subset R$ se numeşte şir de elemente ale mulţimii A .*

Observaţii :

1. Notând $f(n) = a_n, (\forall)n \geq k$, elementele $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots$ se numesc termenii de rang $k, k + 1, \ldots, n, \ldots$ ai şirului.

2. Vom nota şirul cu $(a_n)_{n \geq k}$, cu $(a_n)_n$ sau cu a_n.

7. Care din următoarele funcţii este un şir ?

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + 2$;

b) $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1$;

c) $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\ h(x) = x^2 - 2x$;

d) $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N},\ i(x) = [x + 1]$;

e) $j : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N},\ j(x) = |x|$;

f) $k : \mathbb{Q} \longrightarrow [0, 1),\ k(x) = \{x - 1\}$;

g) $l : \mathbb{N}^* \longrightarrow (0, 1),\ l(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

h) $m : N^* \longrightarrow R;\ m(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$;

i) $p : \{3,4,5,\ldots\} \longrightarrow \mathbb{R},\ p(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

8. În coloana A aveți specificate moduri de definire a unui șir. Înscrieți în spațiul din fața fiecărui tip din coloana A, litera din coloana B care corespunde modului de definire a șirului menționat în coloana A.

A	B
___ 1. Descriptiv (prin descriere)	a) $a_n = \begin{cases} n^2, & \text{pt. } n \ par \\ n-1, & \text{pt. } n \ impar \end{cases}$
___ 2. Analitic (prin una sau mai multe formule)	b) $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 3, (\forall)n \geq 1$
___ 3. Prin recurență	c) $c_1 = 1,\ c_2 = 11, \ldots, c_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ cifre}$

9. În coloana A aveți specificate moduri de definire a unui șir. Înscrieți în spațiul din fața fiecărui tip din coloana A, litera din coloana B care corespunde modului de definire a șirului menționat în coloana A.

A	B
___ 1. Descriptiv (prin descriere)	a) $a_n = (-1)^n \cdot n^2 + 1$
___ 2. Analitic	b) $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 3, (\forall)n \geq 1$
___ 3. Prin recurență	c) $c_1 = \sqrt{2},\ c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots,$ $c_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots+\sqrt{2}}}}$
___ 4. Implicit	d) d_n este soluția din (0,1) a ecuației $x^n - nx + 2 = 0, (\forall)n \geq 2$

10. Cifrele de pe fiecare linie se succed într-o ordine bine definită. Completați șirul cu ceea ce credeți că ar trebui să urmeze.

a) 8; 10; 12; 14; 16; 18; _____ .

b) 17; 19; 21; 23; 25; 27; _____ .

c) $\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}$; _____ .

d) 111; 222; 333; 444; 555; _____ .

e) 1; 9; 25; 49; 81: 121; _____ .

f) 3; 6; 11; 18; 27; 38; 51; _____ .

g) 10;200;3000;40000;_____ .

h) 5; 10; 7; 14; 11; 22; 19; 38; 35; 70;_____.

11. Determinați termenul general al fiecăruia dintre șirurile următoare:

a) $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$

b) 1;4;9;16;...

c) $\frac{5}{8}; \frac{9}{16}; \frac{13}{24}; \frac{17}{32}; \ldots$

d) $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$

12. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1} : a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 7, (\forall)n \geq 1$.

a) Calculați primii cinci termeni ai șirului.

b) În baza observației: $a_n = a_{n-1} + 7 = a_{n-2} + 2 \cdot 7 = \ldots$ deduceți expresia termenului general al șirului și demonstrați prin inducție matematică formula găsită.

13. Determinați termenul general al șirului $(c_n)_{n\geq 1} : c_1 = 1, c_{n+1} = c_n - 3$.

14. Fie şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $b_1 = 2, b_{n+1} = 3b_n, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculaţi primii cinci termeni ai şirului.

b) În baza observaţiei: $a_n = 3b_{n-1} = 3^2 b_{n-2} = \ldots$, deduceţi expresia termenului general al şirului şi demonstraţi prin inducţie matematică formula găsită.

15. Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_n$ definit astfel:
$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n, (\forall)n \geq 1.$

16. Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_n$ definit astfel:
$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, (\forall)n \geq 1.$

17. Calculaţi primii trei termeni şi determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_n$ definit astfel:

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ (\forall)n \geq 1.$

b) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6},\ (\forall)n \geq 1.$

6.1.1 Şiruri mărginite. Şiruri monotone

Definiţia 11. *Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte mărginit dacă există două numere reale m, M astfel încât $m \leq a_n \leq M, (\forall)n \in \mathbb{N}$.*

Un şir care nu este mărginit se numeşte nemărginit.

Definiţia 12. *Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte:*

a) constant dacă $a_{n+1} = a_n,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$;

b) strict descrescător dacă $a_{n+1} > a_n,\ (\forall)n \geq 1$;

c) strict crescător dacă $a_{n+1} < a_n,\ (\forall)n \geq 1$;

d) descrescător dacă $a_{n+1} \geq a_n,\ (\forall)n \geq 1$;

e) crescător dacă $a_{n+1} \leq a_n,\ (\forall)n \geq 1$.

Un şir (strict) crescător sau (strict) descrescător se numeşte monoton.

Observaţie: Pentru a stabili monotonia unui şir se calculează diferenţa a doi termeni consecutivi oarecare $a_{n+1} - a_n$ şi se compară cu 0 sau în cazul în care termenii sunt pozitivi se poate face raportul a doi termeni consecutivi $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ şi se compară cu 1.

18. Se dă şirul $(a_n)_n$ cu termenul general $a_n = \frac{\alpha n + \beta}{n+2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Să se studieze monotonia şirului.

Soluţie: Avem $a_{n+1} - a_n = \frac{\alpha(n+1)+\beta}{n+3} - \frac{\alpha n + \beta}{n+2} = \frac{2\alpha - \beta}{(n+3)(n+2)}$. Pentru $2\alpha - \beta < 0$ şirul este strict descrescător, pentru $2\alpha - \beta > 0$ şirul este strict crescător, iar pentru $2\alpha - \beta = 0$ şirul este constant.

19. Fie şirul $(a_n)_n$ cu $a_n = \frac{2n+1}{n+3}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi primii cinci termeni ai şirului;

b) Arătați că șirul este mărginit;

c) Studiați monotonia șirului.

Soluție: a) $\frac{3}{4}; 1, \frac{7}{6}; \frac{9}{7}; \frac{11}{8}$ b) $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{2n+1}{n+3} > 0$ și deci m poate fi orice număr mai mic sau egal cu 0. Deoarece $\frac{2n+1}{n+3} = \frac{2(n+3)-5}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3} < 2 \Rightarrow M$ poate fi ales orice număr mai mare sau egal cu 2. c) Avem: $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{5}{(n+4)(n+3)} > 0$ și deci șirul este strict crescător.

20. Fie șirul $(a_n)_n$ cu $a_n = \frac{n^2+2n-5}{n+3}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul este nemărginit;

b) Studiați monotonia șirului.

Soluție: a) Avem: $a_n = \frac{n^2+2n-5}{n+3} = \frac{n(n+3)-(n+3)-2}{n+3} = n - 1 - \frac{2}{n+3} > n - 2 \geq M$ pentru $n \geq [M]+1$. b) $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+2(n+1)-5}{n+4} - \frac{n^2+2n-5}{n+3} = \frac{n^2+7n+14}{(n+4)(n+3)} > 0$, șir strict crescător.

21. Să se arate că următoarele șiruri sunt mărginite:

a) $a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$;

b) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{3n}$;

c) $a_n = \frac{3 \cdot 4^n + 2 \cdot 5^n}{3 \cdot 5^n + 7 \cdot 6^n}$;

d) $a_n = \frac{5^n + (-3)^n}{5^n + 3^n}$

e) $a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-3}; n \geq 2$

f) $a_n = \frac{[an]}{n}, a \in \mathbb{R}$.

22. Să se arate că următoarele șiruri sunt nemărginite:

a) $a_n = 2n^2 + 3$; b) $a_n = 2^n - 3$; c) $a_n = \sqrt{2n^2+5}$; d) $a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$.

23. Să se studieze monotonia șirurilor:

a) $a_n = \frac{n+1}{2n+7}$;

b) $a_n = \frac{2n+7}{n+2}$;

c) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}$;

d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

e) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

f) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}$.

24. Să se arate că următoarele șiruri sunt mărginite dar nu sunt monotone:

a) $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{4}$; b) $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{2}$; c) $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{2^n + 3^n}$;

d) $a_n =$ restul împărțirii lui n la 5.

e) $a_n =$ a $n-$a cifră după virgulă în scrierea zecimală a numărului $\frac{23}{29}$.

25. Să se arate că următoarele șiruri sunt monotone și nemărginite:

a) $a_n = n^2 + 3n$;
b) $a_n = -2n + 5$;
c) $a_n = \sqrt{n^2 + 4}$;
d) $a_n = -2^n + 3$.

26. Se consideră șirul (a_n) cu $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 8$.

a) Determinați termenul a_1 încât (a_n) să fie șir constant;

b) Arătați că $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1})$, $(\forall) n \geq 2$. Ce semn are expresia $(a_{n+1} - a_n)(a_n - a_{n-1})$?

c) Precizați monotonia șirului (a_n) funcție de valorile lui $a_1 \in \mathbb{R}$.

27. Se dă șirul $(a_n)_n$ definit astfel: $a_1 = \sqrt{6}$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.

a) Să se arate că $a_n \in (0, 2)$;

b) Să se studieze monotonia șirului.

28. Se dă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = -1, x_2 = 1$ și $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}(3^n - 4n - 1)$;

b) Să se demonstreze că oricare doi termeni consecutivi ai șirului sunt numere întregi prime între ele.

(Etapa locală– Arad, 2018)

6.2 Progresii aritmetice și progresii geometrice

6.2.1 Progresii aritmetice

Definiția 13. *Șirul numeric $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește progresie aritmetică, dacă fiecare termen începând cu al doilea, se obține prin adăugarea aceluiași număr r (numit rație) la termenul precedent adică $a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2$.*

Notație: $\div a_1, a_2, \ldots, a_n$

Proprietăți ale progresiei aritmetice.

P1. Termenul general al progresiei aritmetice se poate determina prin formula $a_n = a_1 + (n-1)r$, unde a_1 este primul al progresiei și r rația sa.

P2. Într-o progresie aritmetică fiecare termen, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui și reciproc.

P3. Termenul de rang k este media aritmetică a termenilor echidistanți de el:

$$a_k = \frac{a_{k-i} + a_{k+i}}{2}, i = \overline{1, k-1.}$$

Observație. Din proprietatea P2 rezultă condiția necesară și suficientă ca:

a) trei numere a, b, c în această ordine să formeze o progresie aritmetică este

$$b = \frac{a+c}{2} \Longleftrightarrow 2b = a + c.$$

b) trei numere a, b, c (fără precizarea ordinii) să formeze o progresie aritmetică este

$$(2b - a - c)(2c - a - b)(2a - b - c) = 0$$

P4. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ în progresie aritmetică. Atunci suma oricăror două numere egal depărtate de extreme este aceeași, adică $a_1 + a_n = \ldots = a_k + a_{n-k+1}$

Proprietatea se poate reformula astfel:

P4'. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie aritmetică și $k + n = m + p$ $(k, n, m, p \in \mathbb{N})$, atunci $a_k + a_n = a_m + a_p$

P5. Suma $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a primilor n termeni ai progresiei se poate calcula cu formula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ sau ținând seama de **P1.** $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2}$

Observații:

Obs.1 O progresie aritmetică este complet determinată dacă se cunosc primul termen și rația.

Obs.2 Pentru a demonstra că un șir de numere (cel puțin trei numere) formează o progresie aritmetică putem folosi definiția, adică arătăm că $a_n - a_{n-1}$ este o constantă (rația) sau proprietatea **P2.**

Obs.3 Fie (a_n) o progresie aritmetică cu rația r.

Dacă $r > 0$ atunci progresia este un șir strict crescător.

Dacă $r = 0$ atunci progresia este un șir constant.

Dacă $r < 0$ atunci progresia este un șir strict descrescător.

1. Să se determine al zecelea și al douăzecilea termen al progresiei aritmetice:

a) $5, 11, 17, 23, \ldots$ b) $13, 9, 5, 1, \ldots$ c) $-5, -1, 3, 7, \ldots$ d) $\dfrac{1}{3}, 2, \dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}, \ldots$

2. Completați tabelul de mai jos știind că pe fiecare rând termenii sunt în progresie aritmetică

a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
-5		-1			
	10				1
	$\frac{8}{3}$		2		
		-21		-15	

3. Se dă progresia aritmetică cu $a_1 = 1$ și $r = 3$. Care din următoarele numere aparțin progresiei:

a) 270; b) 2003; c) 2005; d) 1974 ?

4. Să se arate că numerele: $a = (x^2 - 2x - 1)^2$, $b = (x^2 + 1)^2$ și $c = (x^2 + 2x - 1)^2$ sunt în progresie aritmetică.

Indicație : Se arată că $2b = a + c$

5. Să se găsească termenul a_{20} al progresiei (a_n) dacă:

a) $a_1 = -4,\ a_8 = 10$;

b) $a_3 = 24,\ a_5 = 12$;

c) $a_2 = -150, a_{21} = 221$;

d) $a_{15} = 200,\ r = -\dfrac{1}{3}$.

6. Să se determine suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice (a_n) dacă:

a) $a_1 = -3,\ r = 2,\ n = 10$;

b) $a_2 = 102,\ r = -2,\ n = 30$;

c) $a_7 = 17,\ a_3 = 5,\ n = 20$;

d) $a_3 = 12, a_{14} = 144, n = 9$.

7. Să se determine rația și primul termen al progresiei aritmetice (b_n) dacă:

a) $b_3 = -12,\ b_6 = 60$;

b) $b_3 = 12,\ S_{14} = 483$;

c) $\begin{cases} b_2 + b_5 - b_8 = 6 \\ b_1 + b_6 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} b_2 + b_4 + b_9 = -6 \\ b_3 + b_5 + b_{10} = -9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} b_4 + b_{10} = -5 \\ 2b_1 - 4b_7 = 11 \end{cases}$

8. Să se determine rația și primul termen al progresiei aritmetice (a_n) dacă:

a) $\begin{cases} S_7 = 49 \\ S_{14} = 196 \end{cases}$

b) $\begin{cases} S_{10} = 155 \\ S_{12} = 222 \end{cases}$

c) $\begin{cases} S_2 - S_4 + a_2 = 10 \\ a_5 - S_5 = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7a_6 - 5a_2 = 28 \\ 3S_3 - 2S_5 = 10 \end{cases}$

9. Un muncitor taie o scândură cu lungimea de $4m$ în 10 bucăți, fiecare bucată fiind cu 6 cm mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

10. Să se găsească o progresie aritmetică formată din patru termeni, știind că produsul termenilor de rang par este 128, iar al termenilor de rang impar este 48.

11. Într-o progresie aritmetică, primul termen este 175, ultimul este -225, iar suma termenilor este -2025. Să se găsească rația și numărul termenilor.

12. Dacă suma primilor 10 termeni al unei progresii aritmetice este 65, iar suma primilor 100 de termeni este 5150, determinați suma primilor 110 termeni.

13. Dacă suma primilor 10 termeni al unei progresii aritmetice este 955, iar suma primilor 200 de termeni este 100, determinați suma primilor 210 termeni.

14. Suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice este 40, iar suma ultimilor patru termeni ai progresiei este 104. Știind ca suma tuturor termenilor progresiei este 216, să se determine a_{10}.

15. Să se determine rația și primul termen al progresiei aritmetice (b_n) dacă:

a) $S_7 = 7, b_3 + b_6 + b_7 = 7$;

b) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 = 45,\ b_4 - b_3 = 2$;

c) $S_{10} = 140$ și $b_2 \cdot b_9 = 147$.

16. Să se determine numărul x , astfel ca numerele $9 - x, x, 12$, luate în această ordine să fie în progresie aritmetică.

Soluție: Se aplică **P3.a**$\Rightarrow 2x = (9 - x) + 12 \Rightarrow x = 7$.

17. Să se determine x astfel încât numerele:

a) $x-4,\ x+2,\ 3x+2$;

b) $3x-10,\ x+2,\ 5x+8$;

c) $2x^2-x-13,\ x^2+x-4,\ 2x^2-3x+5$.

în ordinea dată să formeze o progresie o progresie aritmetică.

18. Să se determine numărul x , astfel ca numerele $7-x, x, 3x+4$, să formeze o progresie aritmetică.

Soluţie: Se aplică **P3.b** $\Rightarrow (14-2x-x-3x-4)(2x-7+x-3x+4)(6x+8-7+x-x)=0 \Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{6},\frac{5}{3}\right\}$.

19. Să se determine x astfel încât numerele:

a) $x-11,\ x+1, 3x+4$;

b) $2x-4,\ x+2,\ 5x+10$;

c) $x+8, x^2, x+4$.

(fără precizarea ordinii) să formeze o progresie o progresie aritmetică.

20. Să se determine primii trei termeni ai unei progresii aritmetice, descrescătoare, dacă $a_1+a_3+a_5=-24$ şi $a_1\cdot a_3\cdot a_5=640$

21. Dacă S_n este suma primilor n termeni a unei progresii aritmetice, să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{S_{2k-1}}{2k-1}=S_n$.

(Olimpiada locală, Satu Mare -2003)

22. Să se determine raţia şi primul termen ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_5=18,\ 4S_n=S_{2n}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, unde S_n este suma primilor trei termeni ai progresiei.

23. Termenul al n-lea al unei progresii aritmetice este $\frac{3n-1}{6}$. Să se determine primul termen, raţia şi suma primilor n termeni.

24. Să se determine formula termenului general şi raţia unei progresii aritmetice dacă suma primilor n termeni verifică egalitatea:

a) $S_n=3n^2+6n$;

b) $S_n=n^2$;

c) $S_n=n(2-n)$;

d) $S_n=7n^2-5n$

e) $S_n=\frac{n(3n-5)}{4}$;

f) $S_n=\frac{n(5n+1)}{4}$

25. Să se arate că dacă a, b, c (în această ordine) sunt în progresie aritmetică atunci:

a) $a^2+ab+b^2; a^2+ac+c^2; b^2+bc+c^2$;

b) $a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab$;

c) $a^2(b+c),\ b^2(c+a),\ c^2(a+b)$

în această ordine, sunt tot în progresie aritmetică.

În ce condiții este adevărată și reciproca?

Indicație: a) Din ipoteză $2b = a + c$ (1) și trebuie arătat că $2(a^2 + ac + c^2) = (a^2+ab+b^2)+(b^2+bc+c^2)$ (2). Se poate scoate din prima relație, de exemplu, $a = 2b-c$ și se introduce în relația a doua și se fac calculele. O altă posibilitate este să transformăm relația (2) în relația echivalentă $(a + b + c)(-2b + a + c) = 0$, adevărată în baza relației (1). Reciproca este adevărată numai dacă $a + b + c \neq 0$

26. Să se arate că dacă numerele a^2, b^2, c^2sunt în progresie aritmetică atunci:

a) $\frac{a}{b+c}; \frac{b}{c+a}; \frac{c}{a+b}$. b) $\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}; \frac{2(a^2+c^2)-b}{4}; \frac{2(b^2+a^2)-c^2}{4}$.

în această ordine, sunt tot în progresie aritmetică.

27. Să se arate că dacă numerele $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică

28. Să se arate că dacă a, b, c sunt trei numere pozitive în progresie aritmetică atunci ele satisfac relația $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$. Reciproca este adevărată?

29. Să se arate că elementele mulțimii $\{a, b, c\}$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă este satisfăcută relația: $2(a^3 + b^3 + c^3) + 21abc = 3(a + b + c)(ab + bc + ac)$.

Indicație: Se arată că relația poate fi adusă la forma $(2a - b - c)(2b - a - c)(2c - a - b) = 0$.

30. Să se demonstreze că numerele:

a) $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$; b) $\sqrt{2}, 3, \sqrt{5}$; c) $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$; d) $\sqrt{11}, \sqrt{17}, \sqrt{23}$

nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

*Soluție:*a) Presupunem că cele trei numere sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice. Conform proprietății **P2.** avem $2\sqrt{7} = \sqrt{3} + \sqrt{11} \iff 28 = 3 + 2\sqrt{33} + 11 \iff \sqrt{33} = 7$ fals.

31. Să se demonstreze că numerele:

a) $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$; b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$; c) $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$; d) $\sqrt{5}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$

nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

Soluție: a) Presupunem prin absurd, că aceste numere sunt termenii (nu neapărat consecutivi) unei progresii aritmetice. Fie deci $a_m = \sqrt{5}, a_n = \sqrt{7}, a_p = \sqrt{11}, m, n, p \in \mathbb{N}, m \neq n \neq p$.

Avem: $\begin{cases} a_m = a_1 + (m-1)r = \sqrt{5} \\ a_n = a_1 + (n-1)r = \sqrt{7} \\ a_p = a_1 + (p-1)r = \sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_m - a_n = (m-n)r = \sqrt{5} - \sqrt{7} \\ a_n - a_p = (n-p)r = \sqrt{7} - \sqrt{11} \end{cases}$ Împărțind, membru cu membru, aceste relații obținem: $\frac{m-n}{n-p} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{11}}$ (1).

Deoarece $\frac{m-n}{n-p} \in \mathbb{Q}$ iar $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{11}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (demonstrați !) egalitatea (1) nu poate avea loc, și deci presupunerea este falsă.

32. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât nici unul dintre numerele ab, bc, ac nu este pătrat perfect. Să se arate că numerele $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

33. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_{10} = 2$ să se determine S_{21}.

Soluție: Conform proprietății **P4.** avem $a_1+a_{21} = a_2+a_{20} = \ldots = 2a_{10}$ și $S_{21} = \frac{(a_1+a_{21})21}{2} = \frac{2a_{10}\cdot 21}{2} = 42$.

34. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_7 = 5$ să se determine S_{13}.

35. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Să se determine S_{19} știind că $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Indicație: $a_1 + a_{19} = a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12}$.

36. Fie $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ o progresie aritmetică și $S_n = n^2 + 2n$ suma primilor n termeni ai progresiei. Aflați valoarea sumei $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot S_k$.

37. Sa se determine numerele, ce sunt termeni comuni ai progresiilor aritmetice 2, 5, 8, ..., 332 si 7, 12, 17, ..., 157.

38. Să se determine o progresie aritmetică, știind că sunt satisfăcute simultan următoarele condiții:

1^0) suma primilor patru termeni ai progresiei este 40;

2^0) suma ultimilor patru termeni ai progresiei este 104;

3^0) suma tuturor termenilor progresiei este 216.

39. Să se rezolve ecuația $108 + 114 + 120 + \ldots + x = 82248$

Soluție: $x = a_n = a_1 + (n-1)r = 108 + 6(n-1) = 102 + 6n$ și $82248 = S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(210+6n)n}{2} \Rightarrow n = 149 \Rightarrow x = 108 + 148\cdot 6 = 996$

40. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + x = 400$;

b) $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + x = 1025$;

c) $900 + 896 + 892 + \ldots + x = 900$;

d) $(3x-1) + (3x-3) + (3x-5) + \ldots + (3x-29) = -180$;

e) $(2x+1) + (2x+4) + (2x+7) + \ldots + (2x+298) = 4950$.

41. Să se determine suma tuturor numerelor pare de trei cifre, divizibile la 3.

Indicație: Primul număr par divizibil la 3 este 102. Numărul fiind par și divizibil la 3 este divizibil la 6, și numerele sunt termenii progresiei 102,108,114,…,996.

42. Să se determine suma tuturor numerelor pare de două cifra divizibile la 3.

43. Aflați termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$: $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$ care are proprietatea că diferențele dintre termenii consecutivi formează o progresie aritmetică.

44. Fie (a_n) o progresie aritmetică iar S_k suma primilor k termeni. Să se determine rația progresiei știind că $a_1 = 3$ și $\frac{S_m}{m^2} = \frac{S_n}{n^2}$, pentru $m \neq n$.

45. Fie (a_n) o progresie aritmetică iar S_k suma primilor k termeni. Să se determine $\frac{a_m}{a_n}$ știind că $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, pentru $m \neq n$.

46. Fie (a_n) o progresie aritmetică cu $a_n \in \mathbb{N}$. Știind că $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$ și $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{25}{12}$ să se determine a_{10}.

47. Notăm cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \cdot b \neq 0$. Să se determine numerele a, b, c, x_1, x_2 știind că numerele a, x_1, b, x_2, c formează în această ordine o progresie aritmetică.

48. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale nenule în progresie aritmetică ($r \neq 0$).

a) Să se arate că $\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$

b) Pentru $n \geq 2$ să se verifice egalitatea:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}.$$

c) Să se calculeze suma $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$

49. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale nenule în progresie aritmetică ($r \neq 0$).

a) Să se arate că $\frac{a_k + a_{k+1}}{a_k^2 \cdot a_{k+1}^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_k^2} - \frac{1}{a_{k+1}^2}\right)$

b) Pentru $n \geq 2$ să se verifice egalitatea:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 \cdot a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 \cdot a_3^2} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{a_{n-1}^2 \cdot a_n^2} = \frac{(n-1)(a_1 + a_n)}{a_1^2 \cdot a_n^2}.$$

c) Să se calculeze suma $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$

50. Să se arate că numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, n \geq 3$ verifică egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}, \quad (1)$$

dacă și numai dacă acestea formează o progresie aritmetică.

51. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenii pozitivi astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ și $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{n(6n^2 - 3n - 1)}{2}$

(Olimpiada locală, Cluj 2003)

52. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 0}$ cu rația r nenulă. Să se calculeze suma:

$S=\left(a_1a_2a_3a_4+\frac{1}{a_2a_3a_4}\right)+\left(a_2a_3a_4a_5+\frac{1}{a_3a_4a_5}\right)+\ldots+\left(a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}+\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}\right)$, $n\geq 1$, în funcție de $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$.

53. Dacă șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ verifică egalitatea $3a_1+5a_2+7a_3+\ldots+(2n+1)a_n=(n+1)^2a_n-\frac{1}{2}n(n+1),\ \forall n\geq 1$ să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ unde $b_n=\frac{1}{a_{n+1}-a_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este o progresie aritmetică.

54. Arătați că, dacă șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are termenii strict pozitivi şi $\frac{a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{2n+1}{3}$,
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

(Concurs Viitori Olimpici.ro, 2022)

55. Dacă $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_p$ sunt sumele primilor n termeni a p progresii aritmetice având primii termeni egali cu $1, 2, 3, \ldots, p$ și rațiile respective $1, 3, 5, \ldots$, să se afle suma $S=S_1+S_2+\ldots+S_p$.

56. Se consideră șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$

Dacă $3(x_1+x_2+\ldots+x_n)=nx_{n+1}$ și $x_n=ny_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ atunci demonstrați că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este un șir progresie aritmetică.

57. Fie $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică și $S_p=\sum_{k=1}^{p}a_k,\ \forall p\in\mathbb{N}^*$. Știind că suma primilor n termeni ai progresiei este jumătate din suma următorilor n termeni să se afle valoarea raportului $\frac{S_{3n}}{S_n}$.

6.2.2 Progresii geometrice

Definiția 14. *Un șir de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ cu $a_1\neq 0$ este o progresie geometrică dacă fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu același număr nenul q, numit rație, adică $a_n=a_{n-1}\cdot q,\ n\geq 2$.*

Notație: $\div\div\ a_1, a_2, \ldots, a_n$

Proprietăți ale progresiei geometrice.

P6. Termenul general al progresiei geometrice se poate determina prin formula $a_n=a_1.q^{n-1}$, unde a_1 este primul al progresiei și $q\neq 0$, rația sa.

P7. Într-o progresie geometrică pătratul fiecărui termen, începând cu al doilea, este egal cu produsul termenilor vecini lui și reciproc.

Deci șirul (a_n) este o progresie geometrică $\Longleftrightarrow a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}, n\geq 2$.

Ultima formulă se poate scrie și astfel $|a_n|=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$, adică modulul termenului de rang n este media geometrică a termenilor vecini lui. În cazul progresiei cu termeni pozitivi, termenul de rang n este media geometrică a termenilor vecini lui.

P8. Pătratul termenului de rang k este egal cu produsul termenilor echidistanți de el el:

$$a_k^2 = a_{k-i} \cdot a_{k+i}, i = \overline{1, k-1}.$$

Observație. Din proprietatea P7 rezultă condiția necesară și suficientă ca:

a) trei numere a, b, c în această ordine să formeze o progresie geometrică este

$$b^2 = a \cdot b \Longleftrightarrow |b| = \sqrt{a \cdot c}.$$

b) trei numere a, b, c (fără precizarea ordinii) să formeze o progresie geometrică este

$$(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab) = 0$$

P9. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ în progresie geometrică. Atunci produsul oricăror două numere egal depărtate de extreme este același, adică $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots = a_k \cdot a_{n-k+1}$

Proprietatea se poate reformula astfel:

P9'. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ este o progresie geometrică și $k + n = m + p$ $(k, n, m, p \in \mathbb{N})$, atunci $a_k \cdot a_n = a_m \cdot a_p$

P10. Suma $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a primilor n termeni ai progresiei se poate calcula cu formula $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

Observații:

Obs.1 O progresie geometrică este complet determinată dacă se cunosc primul termen și rația.

Obs.2 Pentru a demonstra că un șir de numere (cel puțin trei numere) formează o progresie geometrică putem folosi definiția, adică arătăm că $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ este o constantă (rația) sau proprietatea **P7.**

Obs.3 Fie (a_n) o progresie geometrică cu rația q.

Dacă $a_1 > 0$ și $q > 1$ atunci progresia este un șir strict crescător.
Dacă $a_1 > 0$ și $q \in (0, 1)$ atunci progresia este un șir strict descrescător.
Dacă $q = 0$ sau $q = 1$ atunci progresia este un șir constant.
Dacă $a_1 < 0$ și $q > 1$ atunci progresia este un șir strict descrescător.
Dacă $a_1 < 0$ și $q \in (0, 1)$ atunci progresia este un șir strict crescător.

1. Să se determine termenul al $n-$lea al progresiei geometrice:

a) $4, 12, 36, 108, \ldots$ c) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$ e) $-2, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \ldots$

b) $4, 2, 1, \dfrac{1}{2}, \ldots$ d) $\sqrt{6}, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \ldots$ f) $\sqrt{2}, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}, \ldots$

2. Fie a, b, c, d termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Să se determine progresia știind că suma termenilor de rang par este 60, iar suma celor de rang impar este 20.

Soluție: Avem de analizat două cazuri. Sau $\begin{cases} a + c = 60 \\ b + d = 20 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a + c = 20 \\ b + d = 60 \end{cases}$ Conform definiției, avem $b = aq, c = aq^2, d = aq^3$ și primul sistem devine $\begin{cases} a(1 + q^2) = 60 \\ aq(1 + q^2) = 20 \end{cases}$. Împărțind membru cu membru cele două ecuații, obținem $\dfrac{1}{q} = 3 \Longrightarrow q = \dfrac{1}{3}$ și apoi din prima ecuație $a = 54$ și cele patru numere sunt 54,18,6,2. Analog, al doilea sistem conduce la soluția 2,6,18,54.

3. Să se determine primii trei termeni ai progresiei geometrice (b_n) dacă:

a) $b_8 = 81, q = 3$;

b) $b_9 = \frac{1}{6561}, q = \frac{1}{3}$;

c) $b_3 = 12; b_6 = 96$;

d) $b_9 = \frac{1}{243}; b_{12} = \frac{1}{6561}$

4. Fie (a_n) o progresie geometrică și S_n suma primilor n termeni ai acesteia. Să se determine S_n dacă:

a) $a_1 = 2, q = 3, n = 5$;

b) $a_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}, n = 4$;

c) $a_4 = 27, a_5 = 54, n = 7$;

d) $a_1 = -1, q = -1, n = 50$;

e) $a_5 = 1, a_8 = \frac{1}{8}, n = 8$;

f) $a_4 = -\frac{1}{3}, a_7 = \frac{1}{81}, n = 5$.

5. Să se determine rația și suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice (x_n) dacă:

a) $x_1 = 2, x_6 = 486, n = 8$;

b) $x_1 = \frac{2}{3}, x_4 = \frac{4}{6}, n = 12$;

c) $x_3 = 162, x_6 = 118098, n = 5$;

d) $x_2 = \frac{4}{5}, x_5 = 100, n = 6$.

6. Să se găsească primul termen și rația unei progresii geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 240 \\ a_4 - a_2 = 72 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 42 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_5 - a_4 - a_3 = 12 \\ a_5 - a_4 = 2a_3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1a_2 - a_2a_3 = 24 \\ a_2a_3 - a_3a_4 = 6 \end{cases}$

7. Să se găsească primul termen și rația unei progresii geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă

a) $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_4 = 10 \\ a_3 + a_6 - a_5 = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_5 - a_4 - a_3 = 4 \\ a_5 - a_4 = 2a_3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 7 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 21 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_2(a_3 - a_1) = -24 \\ a_3(a_2 - a_4) = \frac{8}{3} \end{cases}$

8. Populația unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populația număra 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populația va atinge 24300 de bacterii?

9. Se consideră un pătrat de arie S_1. Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2. În același mod, construim succesiv un șir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)n \geq 1$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $1024S_n \geq S_1$.

10. Determinați o progresie geometrică formată din 4 termeni: a_1, a_2, a_3, a_4, știind că:

a) $a_1 - a_2 = 36$ și $a_3 - a_4 = 4$; b) $a_1 + a_4 = 56$ și $a_2 a_3 = 108$

11. Suma primilor patru termeni ai unei progresii geometrice este 5, iar suma următorilor patru termeni este 80. Determinați primul termen și rația progresiei.

12. Suma primilor patru termeni ai unei progresii geometrice este $\frac{15}{2}$, iar suma următorilor patru termeni este $\frac{15}{32}$. Determinați primul termen și rația progresiei.

13. Suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi este $\frac{7}{8}$ iar suma următorilor trei este 7. Să se arate că:

a) $2\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6\right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}$

b) $2^n\left(a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n + a_5^n + a_6^n\right) = \frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \frac{1}{a_3^n} + \frac{1}{a_4^n} + \frac{1}{a_5^n} + \frac{1}{a_6^n}$

14. Fie 3 numere reale strict pozitive x_1, x_2, x_3, aflate în progresie geometrică, care satisfac relația: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

Să se arate că: $x_1^{2004} + x_2^{2004} + x_3^{2004} = \frac{1}{x_1^{2004}} + \frac{1}{x_2^{2004}} + \frac{1}{x_3^{2004}}$.

Indicație: Din enunț rezultă că $x_1 \cdot q = 1$ și deci cele trei numere sunt $x_1, 1, q$ etc.

15. Determinați primul termen și rația unei progresii geometrice formate din 7 termeni, știind că suma primilor trei termeni este 26, iar suma ultimilor trei termeni este $\frac{26}{81}$.

16. Să se demonstreze că numerele:

a) $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$; b) $\sqrt{7}, 3, \sqrt{11}$; c) $2, \sqrt{7}, \sqrt{13}$; d) $\sqrt{7}, 10, \sqrt{14}$;

nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

17. Să se demonstreze că numerele:

a) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{11}$; c) $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{15}$; e) $\sqrt{3}, 5, \sqrt{7}$;

b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$; d) $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$ f) $\sqrt{7}, 10, \sqrt{11}$

nu pot fi termeni ai unei progresii geometrice.

Soluție: a) Presupunem, prin absurd, că cele trei numere sunt termenii unei progresii geometrice (b_k), adică există $m, n, p \in \mathbb{N}, m \neq n \neq p$, astfel încât $b_m = \sqrt{3}, b_n = \sqrt{5}, b_p = \sqrt{11} \iff b_1 q^m = \sqrt{3}, b_1 q^n = \sqrt{5}, b_1 q^p = \sqrt{11}$.Împărțind egalitățile obținute membru cu membru, obținem (în ipoteza $m < n < p$) $q^{n-m} = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $q^{p-n} = \sqrt{\frac{11}{5}} \iff (q^{n-m})^2 = \frac{5}{3}$, $(q^{p-n})^2 = \frac{11}{5} \iff ((q^{n-m})^2)^{p-n} = \left(\frac{5}{3}\right)^{p-n}$, $((q^{p-n})^2)^{n-m} = \left(\frac{11}{5}\right)^{n-m}$ și deci, $\left(\frac{5}{3}\right)^{p-n} = \left(\frac{11}{5}\right)^{n-m} \iff$

$3^{p-n} \cdot 11^{n-m} = 5^{p-m}$, relație falsă deoarece 3 și 5 respectiv 11 și 5 sunt numere relativ prime între ele.

18. Să se arate că numerele 9,10,11 nu pot fi termeni ai unei progresii geometrice.

19. Se dau numerele 1,2,5. Cu cât trebuie mărite aceste numere pentru a obține o progresie geometrică.

20. Dacă a_m, a_n, a_p sunt termenii de rang m, n, p ai unei progresii geometrice, să se arate că $(a_m)^{n-p} \cdot (a_n)^{p-m} \cdot (a_p)^{m-n} = 1$.

21. Numerele a, b, c, d în această ordine formează o progresie geometrică. Să se arate că $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d^2) = (a-d)^2$.

22. Să se determine formula termenului general și rația unei progresii geometrice dacă suma primilor n termeni verifică egalitatea:

a) $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$; b) $S_n = 2^{n-1} + 1$; c) $S_n = -14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7$.

23. Să se decidă dacă este o progresie geometrică un șir astfel încât pentru orice n suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = 2n + 1$; b) $S_n = 2^n + 1$; c) $S_n = 7^n + 5$; d) $S_n = 2n^2 + 1$.

24. Primul termen al unui șir de numere este 2, al doilea 3 și $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ dacă $n \geq 3$.

a) Să se determine primii patru termeni ai șirului.

b) Să se determine termenul general al șirului și să se afle suma primilor n termeni.

Soluție 1: $a_1 = 2 = 2^0 + 1$; $a_2 = 3 = 2^1 + 1$; $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 9 - 4 = 5 = 2^2 + 1$, $a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 15 - 6 = 9 = 2^3 + 1$ și prin inducție se arată că $a_n = 2^{n-1} + 1$. $S_n = n + (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) = n + \dfrac{1-2^n}{1-2} = n - 1 + 2^{n-1}$.

Soluție 2: $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, (\forall)n \geq 3 \Longleftrightarrow a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), (\forall)n \geq 3$. Notând $a_n - a_{n-1} = b_n, (\forall)n \geq 2$, avem $b_2 = 1$ și $b_n = 2b_{n-1}, (\forall)n \geq 3 \Rightarrow \div\div (b_n)_{n\geq 2} \Rightarrow b_n = 2^{n-2} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2^{n-2}, (\forall)n \geq 2$ (1)

În relația (1) dând valori lui n de la 1 la k și însumând membru cu membru relațiile obținute, rezultă $a_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} + a_1 = 2^{n-1} + 1$.

25. Să se demonstreze că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, dacă și numai dacă:

$$\frac{1}{b_1 b_n} + \frac{1}{b_2 b_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{b_n b_1} = \frac{n}{b_1 b_n}, (\forall)n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

(etapa locală,Constanța, 2001–prof. Gheorghe Andrei)

Soluție: Dacă $\div\div b_n \overset{\text{P9.}}{\Longrightarrow} b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n$ și egalitatea este verificată.

Reciproc, pentru $n=3$ avem $\frac{1}{b_1b_3}+\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{b_3b_1}=\frac{3}{b_1b_3}\Rightarrow b_2^2=b_1b_2\Rightarrow \div\div b_1,b_2,b_3$ și prin inducție arătăm că $\div\div b_n$.

Presupunem că din $\frac{1}{b_1b_k}+\frac{1}{b_2b_{k-1}}+\ldots+\frac{1}{b_kb_1}=\frac{k}{b_1b_k}\Rightarrow \div\div b_1,b_2,\ldots,b_k$ și arătăm că din $\frac{1}{b_1b_{k+1}}+\frac{1}{b_2b_k}+\ldots+\frac{1}{b_kb_2}+\frac{1}{b_{k+1}b_1}=\frac{k+1}{b_1b_{k+1}}\Rightarrow \div\div b_1,b_2,\ldots,b_k,b_{k+1}$.

Avem: $\frac{1}{b_1b_{k+1}}+\frac{1}{b_2b_k}+\ldots+\frac{1}{b_kb_2}+\frac{1}{b_{k+1}b_1}=\frac{k+1}{b_1b_{k+1}}\Rightarrow \frac{1}{b_2b_k}+\ldots+\frac{1}{b_kb_2}=\frac{k-1}{b_1b_{k+1}}\overset{ip.}{\Longrightarrow}$ $\frac{k-1}{b_1q^k}=\frac{k-1}{b_1b_{k+1}}\Rightarrow b_{k+1}=b_1q^k\Rightarrow \div\div b_1,b_2,\ldots,b_k,b_{k+1}$ și demonstrația este încheiată.

26. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu $q\neq 1$. Dacă $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$ și $T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$, $(\forall)n\geq 1$, să se calculeze $P=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ funcție de a_1, S și T.

27. Să se calculeze suma: $S_n=7+77+777+\ldots+\underbrace{777\ldots77}_{n\ cifre}$

Soluție: Avem $S_n=7+77+777+\ldots+\underbrace{777\ldots77}_{n\ cifre}=7(1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots11}_{n\ cifre})$ și deci $9S_n=7(9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots99}_{n\ cifre})$.

Împărțind egalitatea cu 7 obținem: $\frac{9}{7}S_n=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots+(10^n-1)$ $\Longleftrightarrow \frac{9}{7}S_n=(10+10^2+10^3+\ldots+10^n)-n\Longleftrightarrow \frac{9}{7}S_n=10\cdot\frac{1-10^n}{-9}-n$ de unde $S_n=\frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$.

28. Să se calculeze următoarele sume:

a) $S_n=3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots33}_{n\ cifre}$

b) $S_n=5+55+555+\ldots+\underbrace{555\ldots55}_{n\ cifre}$

c) $S_n=8+88+888+\ldots+\underbrace{888\ldots88}_{n\ cifre}$

29. Să se arate că $(\forall)n\in\mathbb{N}$, numărul $A=\underbrace{111\ldots1}_{2n\ cifre}-\underbrace{222\ldots2}_{n\ cifre}$ este pătrat perfect.

30. Să se arate că numărul $A=\underbrace{444\ldots4}_{n\ cifre}\underbrace{888\ldots8}_{n-1\ cifre}9$,$(\forall)n\in\mathbb{N}$, este pătrat perfect.

31. Să se calculeze sumele:

a) $S=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}$;

b) $T=1+2x+3x^2+\ldots+100x^{99}$.

Soluție: a) Prima sumă este o progresie geometrică cu $a_1=1$ și $q=x\Rightarrow S=\frac{1-x^{100}}{1-x}$

b) Înmulțim relația $T = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 100x^{99}$ cu x și din relațiile:

$$\begin{array}{rcl} T & = & 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 100x^{99} \\ xT & = & x + 2x^2 + \ldots + 99x^{99} + 100 \cdot x^{100} \end{array}$$

prin scăderea membru cu membru obținem:

$(1-x)T = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} - 100x^{100} \Longleftrightarrow (1-x)T = \dfrac{1-x^{100}}{1-x} - 100x^{100} \Longrightarrow$
$T = \dfrac{1-x^{100}}{(1-x)^2} - \dfrac{100x^{100}}{1-x}$. *Generalizare* : $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

32. Să se calculeze sumele:

a) $S_1 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{20}}$;

b) $S_2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{2^3} + \ldots - \dfrac{1}{2^{19}} + \dfrac{1}{2^{20}}$;

c) $S_3 = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + 21 \cdot 3^{20}$;

d) $S_4 = 1 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^3 + \ldots + 20 \cdot 3^{19} - 21 \cdot 3^{20}$;

e) $S_5 = 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{1}{2^2} + \ldots + 21 \cdot \dfrac{1}{2^{20}}$;

f) $S_6 = 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{1}{2^2} - 4 \cdot \dfrac{1}{2^3} + \ldots + 20 \cdot \dfrac{1}{20^{19}} - 21 \cdot \dfrac{1}{2^{20}}$

33. Să se calculeze sumele:

a) $S_n = 1 + 2x^2 + 3x^4 + \ldots + nx^{2n-2}$;

b) $S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$;

c) $S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n$, unde $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică cu termeni pozitivi.

34. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ și $b_1, b_2, \ldots, b_n$ primii termeni ai unei progresii geometrice cu $a_k > 0, k = \overline{1,n}$. Notăm cu $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{b_k}$ și $P = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$. Să se determine P funcție de S_1, S_2 și n.

35. O progresie geometrică cu toți termenii pozitivi conține un număr par de termeni. Știind că suma termenilor de rang par, este dublu sumei termenilor de rang impar, determinați rația progresiei.

36. Dacă numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, n \geq 3$ verifică egalitatea:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)^2 \qquad (1)$$

atunci acestea formează o progresie geometrică.

Soluție: Demonstrăm prin inducție matematică propoziția:

$P(n) : a_1, a_2, \ldots, a_n, n \geq 3$ sunt în progresie geometrică.

Verificare: Pentru $n = 3$ egalitatea (1) devine: $(a_1^2 + a_2^2)(a_2^2 + a_3^2) = (a_1a_2 + a_2a_3)^2 \Longrightarrow$
$a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_2^4 + a_2^2a_3^2 = a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2^2 + a_2^2a_3^2 \Longrightarrow (a_2^2 - a_1a_3)^2 = 0 \Longrightarrow a_2^2 - a_1a_3 = 0$
și deci $P(3) : a_1, a_2, a_3$ sunt în progresie geometrică, este adevărată.

Demonstrație: Arătăm că $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, unde

$P(k): a_1, a_2, \ldots, a_k$ sunt în progresie geometrică $\Longleftrightarrow a_k = a_1 q^{k-1}, k \geq 2$ și

$P(k+1): a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ sunt în progresie geometrică.

Din egalitatea (1), pentru $n = k+1$, avem:$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k-1}^2+a_k^2)(a_2^2+a_3^2+\ldots+a_k^2+a_{k+1}^2) = (a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{k-1}a_k+a_ka_{k+1})^2 \Longrightarrow (a_1^2+a_1^2q^2+\ldots+a_1^2q^{2(k-1)})(a_1^2q^2+a_1^2q^4+\ldots+a_1^2q^{2(k-1)}+a_{k+1}^2) = (a_1^2q+a_1^2q^3+\ldots+a_1^2q^{2k-3}+a_1q^{k-1}a_{k+1})^2 \Leftrightarrow \frac{a_1^2(q^{2k}-1)\left(a_{k+1}^2-\frac{a_1^2(q^2-q^{2k})}{q^2-1}\right)}{q^2-1} - \left(a_1a_{k+1}q^{k-1}-\frac{a_1^2(q^2-q^{2k})}{q(q^2-1)}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{a_1^2(q^2-q^{2k})(a_1q^k-a_{k+1})^2}{q^2(q^2-1)}$ de unde rezultă $a_{k+1} = a_1q^k$ și deci $P(k+1)$ este adevărată.

37. Fie $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ termenii unei progresii geometrice crescătoare cu termeni pozitivi. Demonstrați că: $b_{12} - b_1 > 11(b_7 - b_6)$.

38. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică având termenii pozitivi. Să se arate că $(b_1 + b_2 + \ldots + b_{2014})(b_1 + b_{2014}) \geq 4028b_1b_{2014}$

39. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică crescătoare cu termeni pozitivi. Să se demonstreze că $b_{2n+2} - b_1 \geq (2n+1)(b_{n+2} - b_{n+1})$

6.3 Probleme combinate

1. Să se determine numerele a, b, c dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice cu suma 12. Dacă se adaugă acestora, respectiv numerele 1,2,11, progresia devine geometrică. Să se afle aceste numere.

2. Să se determine numerele a, b, c dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația r, iar numerele $a, b+1, c+6$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația $r+2$.

3. Să se determine numerele a, b, c dacă se știe că a, b, c sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice; $a, b+2, c$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, iar $a, b+2, c+9$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

4. Determinați trei numere distincte în progresie geometrică, știind că suma lor este 78 și că aceste numere sunt primul, al treilea și respectiv al nouălea termen al unei progresii aritmetice.

5. Determinați trei numere distincte în progresie geometrică, știind că suma lor este 13 și că aceste numere sunt primul, al treilea și respectiv al nouălea termen al unei progresii aritmetice.

6. Determinați o progresie aritmetică și o progresie geometrică dacă primul termen din fiecare progresie este egal cu 4, al treilea termen din cele două progresii este același, iar al doilea termen al progresiei aritmetice este cu 2 mai mare decât al doilea termen al progresiei geometrice.

7. Determinați o progresie aritmetică și o progresie geometrică dacă primul termen din fiecare progresie este egal cu 2, al treilea termen din cele două progresii este același, iar al unsprezecelea termen al progresiei aritmetice este egal cu al cincilea termen al progresiei geometrice.

8. Determinați o progresie aritmetică și o progresie geometrică dacă primul termen din fiecare progresie este egal cu 2, al treilea termen din cele două progresii este același, iar al doilea termen al progresiei aritmetice este cu 4 mai mare decât al doilea termen al progresiei geometrice.

9. Numerele a, b, c sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de rație r, iar numerele $a, b+2, c+12$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația $r+1$. Să se determine ambele progresii.

10. Să se determine numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4 știind că sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, iar numerele: $1+a_1, a_2-1, a_3-1, a_4+3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

11. Trei numere formează o progresie geometrică. Dacă micșorăm al treilea număr cu 64 atunci obținem trei numere în progresie aritmetică. Dacă al doilea număr al acestei din urmă progresii este micșorat cu 8 se obține o progresie geometrică. Determinați numerele inițiale.

12. Numerele a, b, c, d sunt în progresie aritmetică, iar numerele $a+1, b-1, c-1, d+3$ sunt în progresie geometrică.Să se afle numerele a, b, c, d.

13. Se consideră șirurile $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = 2^n + 4n - \alpha$ și respectiv $y_n = 2^n - 4n + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că $x_n - y_n$ este termen general al unei progresii aritmetice și $x_n + y_n$ al unei progresii geometrice.

14. Să se determine progresiile ce sunt simultan și aritmetice și geometrice.

Soluție: Considerăm $a_1,\ a_2 = a_1q,\ a_3 = a_1q^2, \ldots, a_k = a_1q^{k-1}$... o progresie geometrică și impunem condiția ca ea să fie și aritmetică. Avem: $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}, (\forall)k \in \mathbb{N} \Longrightarrow 2a_1q^{k-1} = a_1q^{k-2} + a_1q^k$ de unde se obține $a_1q^{k-2}(1-2q+q^2) = 0 \Longleftrightarrow a_1q^{k-2}(1-q)^2 = 0$.

Cum $a_1q \neq 0 \Rightarrow q = 1$ și progresia este șirul constant $a_1, a_1, \ldots a_{1,\ldots}$

15. Fie $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ șirurile definite prin

$u_0 = 4$, $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 4, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$ și $v_n = u_n - 3,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine primii trei termeni ai celor două șiruri;

b) Să se arate că $(v_n)_{n\geq 3}$ este un șir în progresie geometrică. Determinați rația.

c) Determinați, funcție de n termenul general al celor două șiruri.

16. Se consideră șirurile (a_n), (b_n), și (c_n) definite astfel: $a_0 = 1,\ b_0 = 2$,

$a_n = \frac{3a_{n-1} + 2b_{n-1}}{5}\ (\forall)n \geq 1,\ b_n = \frac{a_{n-1} + 3b_{n-1}}{4}, (\forall)n \geq 1$, $c_n = b_n - a_n,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că șirul (c_n) este o progresie geometrică și determinați termenul general al șirului.

b) Precizați monotonia șirurilor (a_n) și (b_n).

c) Aflați termenul general al șirului (a_n).

d) Aflați termenul general al șirului (b_n).

Soluție: a) Avem $c_n = b_n - a_n = \frac{a_{n-1}+3b_{n-1}}{4} - \frac{3a_{n-1}+2b_{n-1}}{5} = \frac{7}{20}(b_{n-1}-a_{n-1}) = \frac{7}{20}c_{n-1}$ și deci șirul este o progresie geometrică cu rația $\frac{7}{20}$ și $c_0 = b_0 - a_0 = 2-1 = 1 \Rightarrow c_n = \left(\frac{7}{20}\right)^n$.

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n+2b_n}{5} - a_n = \frac{2}{5}(b_n - a_n) = \frac{2}{5}c_n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^n > 0 \Rightarrow a_n$ strict crescător;

$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+3b_n}{4} - b_n = \frac{1}{4}(a_n - b_n) = -\frac{1}{4}c_n < 0 \Rightarrow b_n$ strict descrescător.

c) În relația $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^n$ dăm pe rând lui n valorile $0, 1, 2, \ldots, k-2, k-1$ și obținem:

$$\begin{aligned}
a_1 - a_0 &= \frac{2}{5}\\
a_2 - a_1 &= \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}\\
a_3 - a_2 &= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^2\\
\ldots &\quad \ldots\\
a_{k-1} - a_{k-2} &= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^{k-2}\\
a_k - a_{k-1} &= \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

Însumând membru cu membru relațiile precedente obținem

$$a_k - a_0 = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{7}{20} + \left(\frac{7}{20}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{7}{20}\right)^{k-1}\right) \Longleftrightarrow a_k - 1 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{7}{20}\right)^k}{1-\frac{7}{20}} \Longrightarrow a_k = \frac{21}{13} - \frac{8}{13}\left(\frac{7}{20}\right)^k$$; d) $b_k = \frac{21}{13} + \frac{21}{13}\left(\frac{7}{20}\right)^k$.

17. Se consideră șirurile (a_n), (b_n), și (c_n) definite astfel: $a_0 = 1,\ b_0 = 2,$ $a_n = \frac{a_{n-1}+2b_{n-1}}{3}\ (\forall)n \geq 1,\ b_n = \frac{a_{n-1}+3b_{n-1}}{4}, (\forall)n \geq 1\ , c_n = b_n - a_n,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că șirul (c_n) este o progresie geometrică și determinați termenul general al șirului.

b) Precizați monotonia șirurilor (a_n) și (b_n).

c) Aflați termenul general al șirului (a_n).

d) Aflați termenul general al șirului (b_n).

18. Se consideră șirurile (a_n) ,(b_n) și (c_n)definite astfel: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1},\ (\forall)n \geq 2,\ b_n = a_{n+1} - a_n, (\forall)n \geq 1$ și $c_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

a) Arătați că șirul (b_n) este o progresie geometrică și determinați termenul general al șirului.

b) Studiați monotonia șirului (a_n) .

c) Aflați termenul general al șirului (c_n).

d) Determinați termenul general al șirului (a_n).

19. Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel: $a_0 = 1$ și $a_n = \frac{2+a_{n-1}}{a_{n-1}},\ (\forall)n \geq 1.$

a) Precizați primii patru termeni ai șirului;

b) Arătați că șirul $x_n = \dfrac{1+a_n}{2-a_n}$ definește o progresie geometrică.

c) Arătați că $a_n = \dfrac{4\cdot(-2)^n - 1}{1+2\cdot(-2)^n}$.

6.3.1 Test de evaluare

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenul general $a_n = \dfrac{8n+3}{5n-1}$

a) Să se studieze monotonia șirului

b) Să se arate că $a_n > \dfrac{8}{5}$.

2. Găsiți o relație de recurență între termenii șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ știind că:

a) $a_n = 7n+3$; b) $a_n = \dfrac{5}{2^n}$.

3. Se consideră șirurile (a_n) și (b_n)definite astfel: $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + 3,\ (\forall)n \geq 1$, și $b_1 = 8,\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n, (\forall)n \geq 1$.

a) Arătați că $a_n = 3n+2,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$; b) Arătați că $b_n = \dfrac{16}{2^n},\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Să se determine suma primilor 30 de termeni știind că $a_8 + a_{13} + a_{18} + a_{23} = 30$.

5. Numerele reale pozitive $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt în progresie geometrică. Știind că $b_2+b_3+b_4 = 7$ și $b_4+b_5+b_6 = 28$ să se afle:

a) $b_6+b_7+b_8$;

b) $\dfrac{b_9b_8b_7}{b_6b_5b_4}$.

6. Primul termen al unei progresii aritmetice este 24. Știind că primul, al cincilea și al unsprezecelea termen al progresiei sunt trei numere în progresie geometrică (în ordinea dată) să se afle cele trei numere.

6.3.2 Test de evaluare

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, de rație r și se notează cu S_n suma primilor n termeni ai progresiei.

(a) Dacă $a_1 = 5$ și $r = 2$, atunci a_{2004} este :

A 4007; B 4008; C 4009; D 4010; E 4011.

(b) Dacă $a_1 = 1$ și $r = 2$ atunci S_{10} este:

A 190; B 100; C 90; D 99; E 80.

(c) Dacă $S_n = n^2$ pentru orice n, atunci a_{10} este:
A 100; B 50; C 19; D 20; E 9.

(d) Dacă $a_2 + a_{12} = 6$, atunci $a_4 + a_{10}$ este:
A 4; B 6; C 12; D 10; E 3.

(e) Dacă $S_{10} = S_{20} = 100$, atunci S_{30} este:
A 100; B 200; C 0; D -10; E -100.

2. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ de rație q și se notează cu S_n suma primilor n termeni.

(a) Dacă $b_1 = 3$ și $q = 2$, atunci b_{2004} este:
A $3 \cdot 2^{2002}$; B $3 \cdot 2^{2001}$; C $3 \cdot 2^{2003}$; D $3 \cdot 2^{2004}$; E $2 \cdot 3^{2003}$.

(b) Dacă $S_n = 63 \cdot b_1$, $b_1 \neq 0$ și $q = 2$ atunci n este :
A 5; B 3; C 7; D 10; E 6.

(c) Dacă $b_1 = 2$ și $q = 2$, atunci S_{100} este:
A $2^{101} + 2$; B $2^{100} - 2$; C $2^{101} - 2$; D $2^{102} - 2$; E $2^{101} - 1$.

(d) Dacă $a_{10} \cdot a_{20} = 2004$, atunci $a_8 \cdot a_{22}$ este:
A 2002; B 2001; C 2003; D 2004; E 2000.

(e) Dacă $q = 2$ și $\dfrac{S_{2n}}{S_n} = 65$, atunci n este:
A 9; B 7; C 5; D 6; E 8.

3. Dacă la fiecare dintre numerele $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}, \dfrac{7}{1+\sqrt{8}}, \dfrac{31}{1+\sqrt{32}}$ se adună x, se obține o progresie geometrică. Atunci:
A $x = \sqrt{2}$; B $x = 1 + \sqrt{2}$; C $x = 2$; D $x = 1$; E $x = 7$.

4. Numerele a, b, c sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice și au suma 56, iar $a - 1,\ b + 3,\ c - 1$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice. Atunci $a^2 + b^2 + c^2$ este:
A 1434; B 1443; C 1344; D 4134; E 3144.

6.3.3 Test de evaluare

1. Primul termen al unei progresii aritmetice este 2, iar suma primilor 10 termeni este 155. Suma primilor 20 de termeni este:
A $S_{20} = 600$ B $S_{20} = 610$ C $S_{20} = 620$ D $S_{20} = 1010$.

2. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie aritmetică. Dacă $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 52$, atunci S_{20} este:
A $S_{20} = 200$ B $S_{20} = 180$ C $S_{20} = 250$ D $S_{20} = 280$.

3. Primul termen b_1 al unei progresii geometrice este egal cu 5 și suma primilor trei termeni este 35. Atunci rația q este:

A $q = 2$ sau $q = -3$; B $q = 3$; C $q = -2$ sau $q = 3$; D $q = -1$.

4. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu $S_3 = 40$ și $S_6 = 60$. Să se determine S_9.

A 60; B 751; C 150; D 70.

5. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este $\frac{n(5n+1)}{2}$. Primii doi termeni ai progresiei sunt:

A $a_1 = 2,\ a_2 = 8$; B $a_1 = 3,\ a_2 = 8$; C $a_1 = 3,\ a_2 = 7$; D $a_1 = 3,\ a_2 = 6$;

6. Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi. Raportul dintre suma termenilor al treilea, al cincilea și al șaselea și suma dintre termenul al doilea, al patrulea și al cincilea este 3. Dacă suma pătratelor termenilor al doilea și al treilea este 90, atunci suma primilor n termeni ai progresiei este:

A $S_n = 2^n - 1$ B $S_n = \frac{2^n - 1}{2}$ C $S_n = 3^n - 1$ D $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

7. Fie $a > b > c > 0$ trei numere în progresie aritmetică. Dacă $a\ ;\ b - 0,25\ ;\ c$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația $q = \frac{1}{2}$ atunci cele trei numere sunt:

A $a = \frac{9}{2}; b = \frac{14}{4}, c = 2$ B $a = 2; b = \frac{5}{4}, c = \frac{1}{2}$ C $a = 2; b = 1, c = \frac{1}{2}$
D $a = \frac{9}{2}, b = 3, c = 2$.

7 Funcţii, lecturi grafice

7.1 Reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulțimi numerice

(1) Reper cartezian pe dreaptă

- Cuplul $(O,\vec{i})$ este un reper cartezian pe dreapta d, $O \in d$ origine, $|\vec{i}| = 1$, sensul pe dreaptă este dat de $\vec{i}$.
- Dacă $M \in d$, $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i}$, iar x_M – abscisa lui M, unică în reperul $(O,\vec{i})$ și $O(0)$;
- Dacă $M(x_M)$ și $N(x_N)$ atunci $MN = |x_N - x_M|$.

1. Dacă A, B, C sunt pe dreapta d raportată la reperul $(O,\vec{i})$ atunci B este între A și C dacă și numai dacă $AB + BC = AC$.

2. Dacă $A(-3)$ și $AB = 5$ să se afle punctele B față de reperul $(O,\vec{i})$.

3. În reperul cartezian pe o dreaptă, $P(7)$, $Q(-12)$. Aflați $M(x)$ astfel încât $MP = MQ$.

4. Într-un reper pe o dreaptă, $A(6)$, $B(-2)$, $C(1)$, $D(x)$ și $E(y)$.

a) Care puncte din cele date este între alte două ?

b) Calculați AB, BC, AD și DE și aflați x, y așa încât $AD = DE$ și $AB = DC$

c) Dacă $x > 6$ și $y < -2$, în ce ordine sunt așezate cele cinci puncte.

(2) Produs cartezian. Reper cartezian în plan.

(2.1)• Produsul cartezian a două mulțimi A și B este mulțimea $A \times B$, $A \times B = \{(x,y) \,|\, x \in A$ și $y \in B\}$. (Vezi și cap. 1.9, vol I)

• Produsul cartezian este *distributiv* față de $\cup, \cap, \setminus$:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ etc.

• Produsul cartezian este *izoton*: $A \subset B$ și $C \subset D \Leftrightarrow A \times C \subset B \times D$.

5. Fie $A = \{1, 2, x\}$ și $B = \{3, 4, y\}$. Să se afle x, y știind că $\{1, 3\} \times \{2\} \subset A \times B$.

6. Să se nege propozițiile:

$P_1 : (x,y) = (x',y')$; $P_2 : (x,y) \in A \times B$; $P_3 : A \times B = C \times D$.

7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se afle:

a) $G \subset A \times B$, $G = \{(x,y) |\ 2x + y = 9\}$;

b) $G \subset A \times B$, $G = \{(x,y) |$ există $z \in C$ așa încât: $2x + 3y + z = 12\}$

8. a) Dacă $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ și $B = \{5, 6, x, z\}$, să se afle x, y, z știind că $\{4, 5\} \times \{2, 4\} \subset A \times B$;

b) Aflați $A = \{1, 3, x, y\}$ și $B = \{2, x, z\}$, știind că $\{(1, 3), (2, 4)\} \subset A \times B$.

9. Să se demonstreze că produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția și diferența mulțimilor.

(3) *Reper cartezian în plan*

• Fie $\vec{i}, \vec{j}$ doi vectori necoliniari, în plan. Tripletul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ definește un reper cartezian în plan. Dacă $\vec{i} \perp \vec{j}$, reperul este ortogonal și așa îl vom considera în continuare, unde $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, adică și ortonormat.

• Dacă M este un punct oarecare în plan, există și sunt unice două numere reale x, y așa încât $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, numite coordonate lui M și scriem $M(x, y)$.

10. Fie în reperul cartezian xOy punctele $A(2, 0)$ și $B(0, 1)$. Să se afle punctele $M(x, y)$ astfel încât $MA = MB = AB$.

Indicație: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ unde $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$

11. În reperul xOy fie $A(3, 0)$ și $C(1, \sqrt{2})$. Să se afle B astfel încât patrulaterul cu vârfurile în O,A,B,C să fie paralelogram. Câte soluții are problema?

12. Să se reprezinte în planul raportat la reperul xOy, mulțimile de puncte $M(x, y)$ ale căror coordonate satisfac condițiile:

a) $|x| \leq 1$ și $y = x + 1$;
b) $|x| \leq 1$ și $|y| \leq 1$;
c) $|x| = |y| \leq 1$;
d) $|x| = 1$ și $|y| \leq 2$;
e) $|x| \leq 1$ și $y = 2$;
f) $x = a$ și $y \in \mathbb{R}$;
g) $x \in \mathbb{R}$ și $y = b$.

13. Reprezentați grafic mulțimile:

a) $M_1 = \{(x, y) \,|\, x \in [1, 2] \cup \{3\}, y \in [0, 1] \cup \{2\}\}$;
b) $M_2 = \{(x, y) \,|\, x \in [0, 1] \cup [2, 3], y \in \{0, 1\}\}$;
c) $M_3 = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}$;
d) $M_4 = \{(x, y) \,|\, x \geq 1, y \geq 1\}$;
e) $M_5 = \{(x, y) \,|\, x \geq 1, y \in \mathbb{R}\}$
f) $M_6 = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}\, y \leq 1\}$

14. Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Reprezentați grafic următoarele submulțimi ale lui $A \times A$:

a) $\{(x, y) \in A \times A \,|\, |x| = |y|\}$; b) $\{(x, y) \in A \times A \,|\, x \geq y\}$;

c) $\{(x, y) \in A \times A \,|\, x = y + 1\}$; d) $\{(x, y) \in A \times A \,|\, x + y = 0\}$

15. Priviți graficul din figurile următoare și determinați mulțimea $A \times B$ pe care o reprezintă.

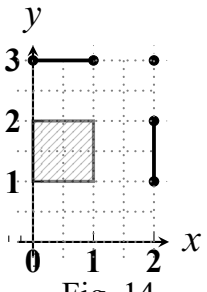


Fig. 14

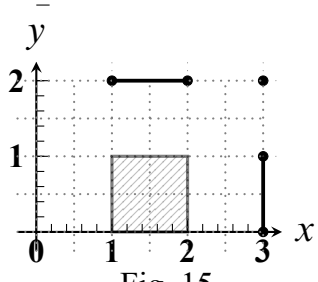


Fig. 15

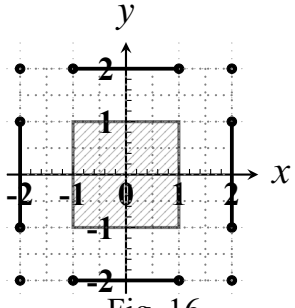


Fig. 16

7.2 Noţiunea de funcţie

(1) Când vorbim de o funcţie avem în vedere două mulţimi, una de plecare A, alta de sosire B şi un procedeu (regulă, mod, lege) de corespondenţă notat cu f prin care:

(i) $\forall x \in A\ \exists y \in B$ ($x \to y$ sau $y = f(x)$)

(ii) Dacă $f(x_0) = y_1$ şi $f(x_0) = y_2$ atunci $y_1 = y_2$.

A: domeniul de definiţie al funcţiei f (mulţimea valorilor variabilei independente x)

B: codomeniul funcţiei f sau mulţimea în care funcţia ia valori (variabila dependentă y)

(2) Mulţimea $G \subseteq A \times B, G = \{(x, y) | x \in A, y \in B$ şi $y = f(x)\}$ se numeşte *graficul* funcţiei f. Corespondenţa $x \to y = f(x)$ se mai numeşte şi *corespondenţă funcţională*.

Exerciţii:

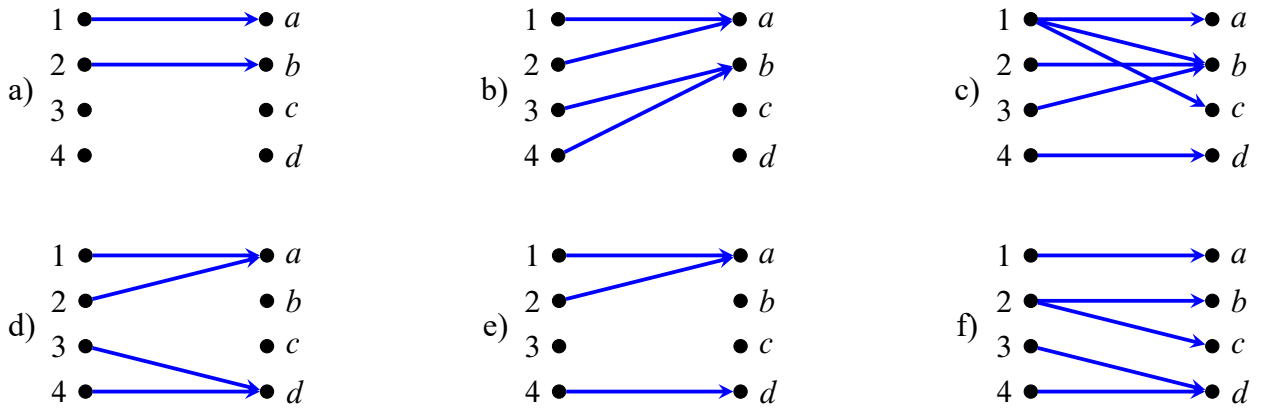
16. Fie mulţimea $A = \{A \cdot M,\ D \cdot M,\ M \cdot D,\ N \cdot N,\ A \cdot P,\ P \cdot A\}$ de perechi de iniţiale nume–prenume ale unor copii. Stabiliţi corespondenţele funcţionale (prin diagrame) între mulţimea dată şi ea însăşi astfel încât:

a) iniţiala numelui din prima pereche să fie aceeaşi cu iniţiala prenumelui din a doua pereche;

b) iniţiala prenumelui din prima pereche să fie aceeaşi cu iniţiala numelui din a doua pereche;

c) iniţialele atât ale numelui cât şi ale prenumelui să coincidă în ambele perechi.

17. a) Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ şi $B = \{a, b, c, d\}$. Care din diagramele următoare indică o corespondenţă funcţională şi care nu. Justificaţi fiecare răspuns.



Căutaţi şi alte exemple de corespondenţe funcţionale şi nefuncţionale între A şi B.

b) O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *constantă* dacă $\forall x \in A,\ f(x) = y_0, y_0 \in B$. Câte funcţii constante se pot defini de la $A = \{1, 2, 3, 4\}$ la $B = \{a, b, c, d\}$?

18. a) Fie $A = \{a, b\}$ şi $B = \{0, 1\}$. Scrieţi toate corespondenţele funcţionale de la A la B. Câte aţi găsit? Dar dacă mulţimea A are n elemente, câte corespondenţe $A \to B$ există ?.

b) Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{5, 7, 9\}$. Să se determine toate funcţiile $f : A \to B$ astfel încât $f(1) \neq 5$ şi $f(2) \neq 9$

c) Să se determine toate funcţiile $f : A \to B$ astfel ca $f(1) = c$, unde $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{a, b, c\}$

19. Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{Z}$. Notăm cu $x \to y$ asocierea dintre un $x \in A$ și un număr real y.

a) Asocierile $x \to x^2 - 1$, $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $x \to x^3 - x + 1$, $x \in \{-1, 1, 3, 4\}$ definesc o funcție $f : A \to \mathbb{R}$?

b) În caz afirmativ să se întocmească tabloul de valori corespunzător și să se reprezinte funcția prin acoladă dându-se expresia sa pe două mulțimi disjuncte a căror reuniune este A.

20. Fie $\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor raționale și $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Care dintre următoarele asocieri definesc o corespondență funcțională pe $\mathbb{Q}$?

(1) $\frac{m}{n} \to \frac{m^2 - n^2}{m'^2 + n'^2}$; (2) $\frac{m}{n} \to \frac{m - n}{m' + n'}$; (3) $\frac{m}{n} \to m + n$

Justificați în prealabil afirmația: $f : A \to B$ funcție și $x_1, x_2 \in A$ „dacă $x_1 = x_2$ atunci $f(x_1) = f(x_2)$".

Exemplu rezolvat : (1) ținând cont de condiția (ii) din definiția funcției (1), corespondența f este funcțională dacă din $\left.\begin{array}{l} a \to f(a) \\ b \to f(b) \\ a = b \end{array}\right\} \Rightarrow f(a) = f(b)$. Dar $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = \frac{m'^2}{n'^2} \Leftrightarrow \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = \frac{m'^2 - n'^2}{m'^2 + n'^2}$.

21. Fie funcția $f : A \to B$, dată de formula $f(x) = -2x + 1$

a) Aflați B știind că $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$;

b) Aflați B știind că $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{3}{n - 2}, n \in \mathbb{Z}\}$;

c) Aflați B știind că $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{n - 6}{n - 3}, n \in \mathbb{N}\}$;

Vom înțelege prin $B = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$.

22. Fie funcția $f : A \to B$, dată de formula $f(x) = -3x + 2$.

a) Aflați A știind că $B = \{y \mid |y - 2| \leq 2\}$

b) Aflați A știind că $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 - 3y = 4\}$. În acest exercițiu prin B înțelegem $\{y \mid y = f(x), x \in A\}$.

23. a) Fie mulțimile $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ și corespondența funcțională f dată de submulțimea $G \subseteq A \times B, G = \{(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$. Găsiți o formulă pentru această corespondență.

b) Aceeași cerință în cazul mulțimilor: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 5, 10\}$ iar $G = \{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 10)\}$.

24. Identificați printre următoarele mulțimi de perechi ordonate pe acelea care ar putea fi graficul unei funcții $f : A \to B$. În caz afirmativ, precizați mulțimea de valori a funcției

a) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 5), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\}$ unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $\{(0, 1), (2, 0), (1, 1), (3, 4)\}$ unde $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

c) $\{(-1, 0), (2, 1), (1, 1), (0, 2), (-2, 1), (3, 0)\}$, unde $A = \{-1, 2, 1, 0, 3\}$;

d) $\{(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(0,1),(1,2)\}$, unde $A=\{2,3,4,5,0,1\}$.

25. a) Fie $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}\subset\mathbb{N}$ și funcția $f:A\to A$ dată prin $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\in\{1,2,3\}\\ x,\ x\in\{4,5,6,7\}\end{cases}$.
Scrieți graficul funcției f.

b) Aceeași cerință pentru funcția $f:A\to A$ dată prin formula $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\in\{1,2,3,4\}\\ x-1,\ x\in\{5,6,7\}\end{cases}$.

26. Fie $A=\{1,2,3,4,5,6\}\subset\mathbb{N}$. Aflați a și b astfel încât mulțimea $G=\{(4,a),(a,2),(2,3),(4-a,b),(5,b-1),(b,6)\}$ să definească o funcție $f:A\to A$.

27. Fie $A=\{1,2,3,4,5\}\subset N$ și $G=\{(2,1),(3,a-b),(4,b-2),(a,5),(1,2b-1)\}$. Aflați a și b astfel încât G să definească o funcție $f:A\to A$.

28. Aflați a și b astfel încât mulțimea $\{(1,3),(a,1),(a+b,5),(2,b)\}$ să fie graficul unei funcții $f:\{-1,1,2,3\}\to\{1,3,4,5\}$. Găsiți și expresia funcției (formula).

29. Aflați a și b astfel încât mulțimea $\{(a,a),(b,b),(b+2,2),(b+1,b+2),(2,a+1)\}$ să reprezinte graficul unei funcții definite pe $A=\{1,2,3,4,5\}$. Precizați mulțimea valorilor funcției găsite.

30. Următoarele exprimări sunt greșite. Să se explice și să se corecteze:

a) $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}$, $f:A\to B$, funcție, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;

b) $A=[0,5]$, $B=[0,2]$, $f:A\to B$, funcție, $f(x)=x-1$;

c) $A=[0,\infty)$, $B=[3,4]$, $f:A\to B$, funcție, $f(x)=x$.

31. Care dintre tripletele următoare (A,f,B) nu definesc o funcție $f:A\to B$ și de ce? Corectați încât să obțineți o funcție.

a) $A=[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{1-x}$, $B=[0,\infty)$;

b) $A=[-2,3]$, $f(x)=2x-1$, $B=[-4,6]$;

c) $A=[-2,3]$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $B=\mathbb{R}$;

d) $A=(-1,1)$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $B=\mathbb{R}$.

32. Se poate asocia o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, expresiei:

a) $\dfrac{1}{|x|+1}$; b) $\sqrt{3-x}$; c) $\dfrac{x}{|x|}$; d) $\dfrac{x}{[x]-1}$; e) $\sqrt[3]{x}$; f) $\dfrac{1}{x^2+1}$?

33. Să se scrie graficele următoarelor funcții:

a) funcția caracteristică a unei mulțimi $A\subset E$

$f_A:E\to\{0,1\}$, $f_A(x)=\begin{cases}0,\ x\notin A\\ 1,\ x\in A\end{cases}$

b) funcția propozițională $p(x):U\to\{0,1\}$, unde $p(x)$ predicat;

c) funcția sgn (signum):$sgn : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, $sgn\ x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

d) funcția treaptă unitate (Heaviside): $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

e) funcția parte întreagă $f(x) = [x]$, $f : [-1, 2] \to \mathbb{Z}$.

f) funcția „modul de x", $f(x) = |x|$, $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

34. Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin formulele $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $h(x) = ax + 3$. Pentru ce valori ale lui a, avem $h(-1) \cdot g(-1) \cdot f(-1) = a\sqrt{2}$?

• Două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ spunem că sunt egale, dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$

• f și g sunt egale $\Leftrightarrow G_f = G_g$.

35. Fie $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 - x^2 + 5x - 6$ și $g : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$.

Să se verifice dacă $f = g$.

36. Fie $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 8, 13\}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in \{0, 1\} \\ 5x - 2, & x \in \{2, 3\} \end{cases}$ și $g : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 8, 13\}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in \{0, 1\} \\ x^2 + 4, & x \in \{2, 3\} \end{cases}$

Să se verifice dacă $f = g$.

37. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = (2a - 1)x + 1 - b$. Să se determine a și b astfel încât $f(x) = g(x)$.

38. Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} cx + 1, & x < 1 \\ (3 - c)x, & x \geq 1 \end{cases}$ să fie egale.

39. Fie $f : A \to \{a, a + 1, a + b\}$ și $g : A \to \{2a + b, -b, 2\}$. Pentru ce valori ale lui a și b funcțiile sunt egale ?

40. Fie $f, g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ două funcții având graficele $G_f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 3)\}$ și $G_g = \{(c+2, c), (c, b), (a, a), (b, a), (2b, b)\}$. Să se determine a, b și c astfel încât $f = g$.

• Fie $f : A \to B$ o funcție. Dacă $x \in A$ atunci $y = f(x)$ este *imaginea lui x prin funcția f*, $y \in B$.

• Dacă $A' \subset A$ atunci $f(A') = \{y \in B \mid \exists x \in A', (f(x) = y)\}$ se numește *imaginea mulțimii A'* prin funcția f.

• Dacă $y = f(x), x \in A$ și $y \in B$, atunci x *este o preimagine a lui* y.

• Dacă $B' \subset B$ atunci imaginea reciprocă a ei, notată $f^{-1}(B')$ este submulțimea $A' \subset A$, $A' = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$ numită *preimaginea mulțimii* B'.

41. Fie $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ și $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ dacă $x \leq 0$ și $f(x) = x$, dacă $x > 0$.

a) Să se determine $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$ unde $A_1 = \{-3, -1, 0\}, A_2 = \{2, -1, 1, 0\}$ și $A_3 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) Verificați că $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ și $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ unde $X, Y \in \{A_1, A_2, A_3\}$

c) Verificați că $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3)$.

42. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$.

a) Determinați mulțimile: $f([-1, 2])$, $f([1, 3])$, $f([0, 1])$;

b) Determinați mulțimile: $f^{-1}(\{-4, -3, 3, 5\})$, $f^{-1}(\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\})$, preimaginea mulțimii $\{y \in \mathbb{R} \mid y \in [3, 4]\}$.

Exemplu rezolvat: fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ și $x \in [a, b]$, deci $a \leq x \leq b \Leftrightarrow 1 - a \geq 1 - x \geq 1 - b$. Așadar $f([a, b]) = [1 - b, 1 - a]$, de aici imaginea lui $[5, 6]$ este $[-5, -4]$ iar preimaginea lui $[-5, -4]$ este $[5, 6]$.

43. Fie $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$. Să se determine:

a) $f([-2, -1])$; b) $f((-\infty, 0])$; c) $f([0, 2] \cup [3, 5])$

d) preimaginea mulțimii $B_1 = [0, 1]$, $B_2 = [2, 4]$, $B_3 = \{0, 3, 5, 7\}$.

Exemplu rezolvat : fie $x \in [-1, 0] \Rightarrow x^2 \in [0, 1]$ deci $f([-1, 0]) \subset [0, 1]$. Fie acum $y \in [0, 1]$ și probăm că $y \in f([-1, 0])$, adică există $x \in [-1, 0]$ astfel încât $x^2 = y$, fie acest $x = -\sqrt{y}$ și avem că din $-1 \leq -\sqrt{y} \leq 0$ rezultă $1 \geq y \geq 0$, deci $f([-1, 0]) = [0, 1]$.

44. Fie $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$; Dacă $\operatorname{Im} f = \{a + b, 2a + b - 1, 5, -1, 1\}$ iar $f(x) = 2x + 1$, să se determine preimaginea mulțimii $\{a + b, 2a + b - 1\}$.

45. Fie $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin formulele: $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = 2x^2 - 5x$.

a) Să se determine $f(A)$, $h(A)$ și $g(A)$ unde $A = \{-3, -\frac{5}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, 3\}$.

b) Să se afle $y \in \mathbb{R}$ pentru care $h^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ și respectiv $y \in \mathbb{R}$ pentru care $g^{-1}(y) = f^{-1}(y)$.

c) Efectuați $f^{-1}(-2) \cap h^{-1}(-2)$ și $f^{-1}(-2) \cap g^{-1}(-2)$

46. a) Fie $E = \{-1, 0, 2, 3\}$ și $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + x - 1$

Dacă $A = \{-1, 0\}$, $B = \{2\}$, $C = \{0, 2, 3\}$, să se determine
$f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $\operatorname{Im} f$. Scrieți și graficul funcției f.

b) Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$ și $f : A \to B$, $f(x) = x^2 - 1$ iar $B = \operatorname{Im} f$. Scrieți graficul funcției f.

c) Fie $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\le 0 \\ b, & x>0 \end{cases}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se afle a și b știind că $f(\{-1,2\})=\{3,1\}$. Câte soluții avem ?

d) Fie funcțiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|+x$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=[x]$, $h:[-5,3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=2|x|+1$. Determinați $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Im}g$, $\mathrm{Im}h$.

• Fie $f:A\to B$ o funcție și $A'\subset A$.

Funcția $g:A'\to B$, $g(x)=f(x)$, $\forall x\in A'$ se numește o *restricție* a funcției f la A', iar funcția f este o *prelungire* a funcției g la de la A' la A.

47. Fie $f:\{1,2,3\}\to\mathbb{R}$ o funcție pentru care $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=5$. Să se construiască o prelungire $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f, de forma $g(x)=ax^2+bx+c$.

Indicație : Prelungirea g și funcția f trebuie să coincidă în 1,2,3 deci $g(1)=f(1), g(2)=f(2)$ și $g(2)=g(3)$.

48. Fie $f:\{1,2\}\to\mathbb{R}$ o funcție pentru care $f(1)=2$ și $f(2)=4$. Să se construiască o prelungire $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f de forma $g(x)=ax+b$.

49. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Determinați două restricții ale funcției f, f_1 și f_2 astfel încât $f_1(x)\le 0$, $\forall x\in D_1$ și $f_2(x)>0$ $\forall x\in D_2$, unde $f_1:D_1\to\mathbb{R}$, $f_2:D_2\to\mathbb{R}$. Determinați o restricție $g:D\to\mathbb{R}$ astfel încât $g(x)\ge 5$, $\forall x\in D$.

50. a) Fie $f(x)=ax^2+bx+c$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Definiți o familie de restricții ale funcției f la $(-\infty,2]$ care se anulează în 0 și 2.

b) Fie $f(x)=ax+3$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Definiți acea restricție a lui f la $(-\infty,0]$ care se anulează în $-0,5$.

51. Fie $f:A\to\mathbb{R}$, unde $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 4\}$ iar $f(x)=x^2-x+2$.

a) Să se scrie graficul restricției lui f la $A'=\{-3,-2,0,1,3\}$.

b) Să se determine o restricție g a lui f astfel încât $\mathrm{Im}f=\{14,2\}$. Scrieți graficul ei.

c) Scrieți două prelungiri ale funcției f la $\mathbb{Q}$ și la $\mathbb{R}$.

52. Fie mulțimea $E=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 3\}$ și funcția $f:E\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\in E \text{ și } x\le 0 \\ 1, \text{ dacă x} \in E \text{ și } x>0 \end{cases}.$$

Să se determine restricțiile lui f la mulțimile: $A=\{-3,-2,1,2\}$, $B=\{-3,-1,0,1,2\}$, $C=\{1,2,3\}$.

53. a) Fie funcția $f:\{1,2,3,4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

a) Să se scrie două prelungiri ale lui f la mulțimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ și două prelungiri la mulțimea $\{-1,0,1,2,3,4\}$.

b) Se dă funcția $f:\{1,2,3,4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Să se determine o prelungire g a lui f la $\mathbb{R}$ astfel încât $g(-1)=1$, $g(5)=1$ și $g(x)=f(x)+1$ pentru $x<-1$.

7.3 Proprietăți ale funcțiilor numerice introduse prin lecturi grafice

• Fie $f : A \to B$, o funcție numerică, $A, B \subset \mathbb{R}$, și $G_f = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x) \in B\}$. Imaginea geometrică a graficului funcției este mulțimea punctelor din planul raportat la un reper cartezian xOy, notată $C_f = \{M(x, y) \mid (x, y) \in G_f\}$, numită curba funcției f.

• $C_f \cap Ox = \{(x, 0) \mid f(x) = 0\}$; $C_f \cap Ox = \{(0, f(0))\}$;

54. Să se reprezinte grafic funcțiile următoare. Acolo unde este posibil să se scrie și graficul funcției. Determinați acolo unde este cazul și intersecțiile cu axele de coordonate.

$f_1 : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 3, 5, 7\}$, $f_1(x) = 2x - 1$ $\quad f_4 : \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq |x| \leq 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$

$f_2 : [3, 5] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 2x - 3$

$f_3 : [-2, 3] \to [0, 3]$; $f_3(x) = |x|$ $\quad f_5 : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = x^2 - 2x - 3$

55. Fie $f : \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 6$.

a) Scrieți graficul funcției;

b) Reprezentați în planul raportat la reperul cartezian xOy domeniul de definiție, $\mathrm{Im} f$ și imaginea geometrică a graficului funcției.

Același exercițiu pentru funcțiile: $g : [-3, 4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -1$; $g : [-5, -2] \cup [1, 3] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2$

56. Să se afle graficul funcției a cărui imagine este reprezentată în figurile următoare:

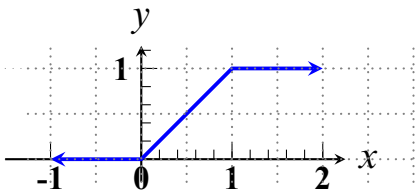


Fig. 23: *56.a*

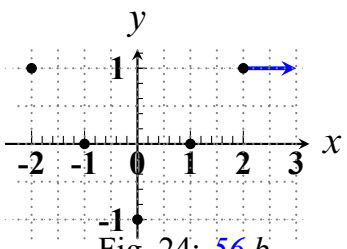


Fig. 24: *56.b*

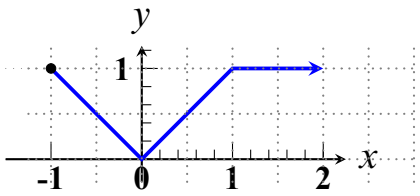


Fig. 25: *56.c*

57. Fie $f(x) = \begin{cases} [x], & x \in [-3, -2) \\ |x|, & x \in \{-2, -1, 0\} \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[x], & x \in [-2, -1) \\ |x|, & x \in \{-1, 0, 1\} \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

a) Scrieți graficele funcțiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Reprezentați geometric graficele celor două funcții.

58. a) Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $B = \{f(x) \mid x \in A\}$, unde $f(x) = x^2 - 1, x \in A$. Scrieți graficul funcției $f : A \to B$ și reprezentați-l geometric.

b) Fie $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ bx, & x > 0 \end{cases}$ Să se afle a și b știind că $A(-1, 3)$ și $B(2, 1)$ sunt puncte ale imaginii geometrice ale graficului funcției f.

59. Care din reprezentările din figurile 26–33 indică graficul unei funcții ? Precizați în acest caz domeniul de definiție, $\mathrm{Im}\, f$ și intersecțiile cu axele de coordonate.

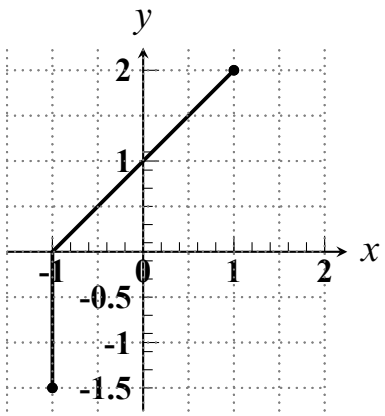


Fig. 26: *59.a*

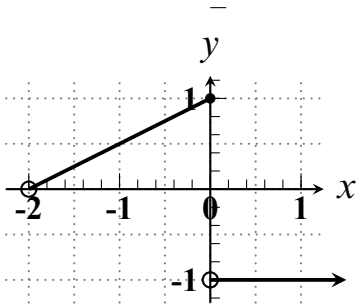


Fig. 27: *59.b*

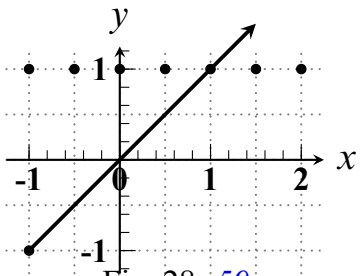


Fig. 28: *59.c*

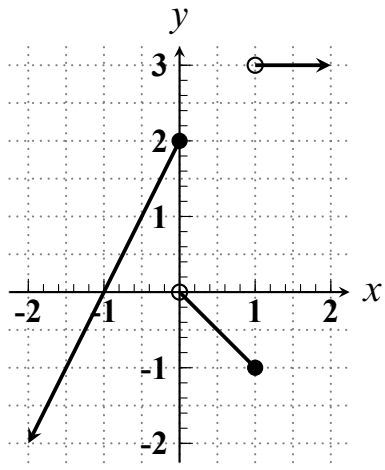


Fig. 29: *59.d*

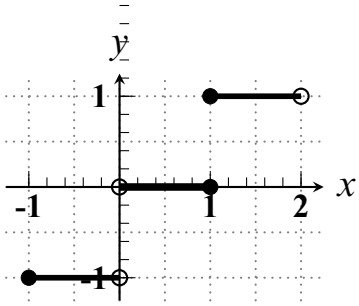


Fig. 30: *59.e*

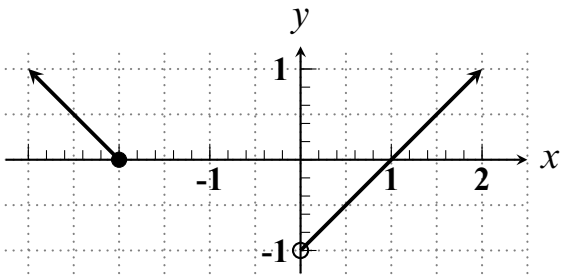


Fig. 31: *59.f*

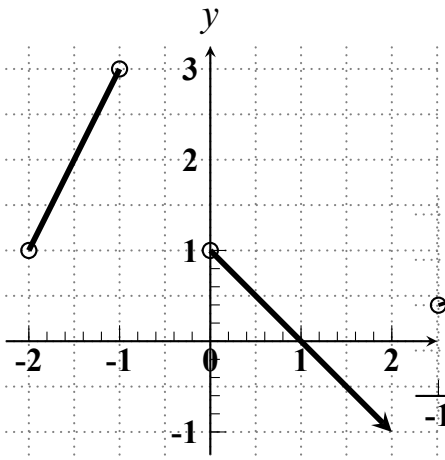


Fig. 32: *59.g*

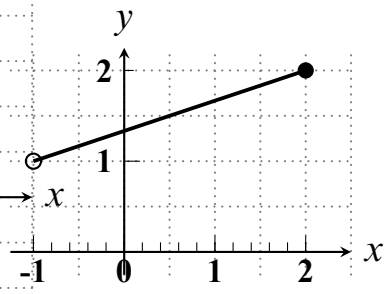


Fig. 33: *59.h*

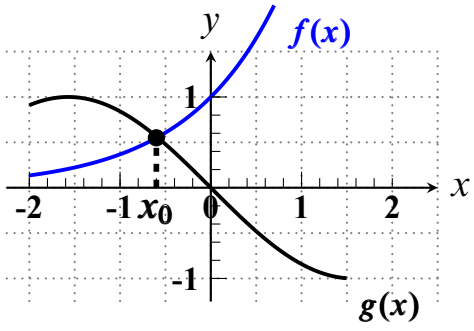


Fig. 34: *Prob. 60*

Fie $f : A \to B$, $g : C \to D$, $A, B \subset \mathbb{R}$, $C, D \subset \mathbb{R}$.

• Ecuația $f(x) = g(x)$, $x \in A \cap C$, are ca soluții $\{x \in A \cap C \mid f(x) = g(x)\}$.

- Inecuația $f(x) \leq g(x),\ x \in A \cap C$, are ca soluții $\{x \in A \cap C \mid f(x) \leq g(x)\}$.
- A compara $f(x)$ cu $g(x)$ revine la rezolvarea inecuației $f(x) \leq g(x),\ x \in A \cap C$.
- A studia semnul funcției f revine la a rezolva inecuații de forma $f(x) > 0,\ f(x) < 0, x \in A$.

60. În figura **??**. sunt reprezentate curbele funcțiilor f și g.

a) Să se rezolve ecuația $f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Să se compare $f(x)$ cu $g(x)$.

c) Să se studieze $sgn\ f(x)$ și $sgn\ g(x),\ x \in \mathbb{R}$.

d) Precizați intersecțiile cu axele ale curbelor C_f, C_g.

Rezolvare : Din reprezentarea geometrică citim:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\} = \{x_0\},\ x_0 < 0$; b) pe $(-\infty, x_0),\ g(x) > f(x)$, pe $(0, \infty),\ f(x) > g(x)$. c) $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$; pe $(-\infty, 0)$, $g(x) > 0$, iar pe $(0, \infty), g(x) < 0$; d) $C_f \cap Oy = \{(0, a)\}; C_f \cap Ox = \varnothing;\ C_g \cap Oy = \{(0, 0)\};\ C_g \cap Ox = \{(0, 0)\}$.

61. În figura 35 sunt reprezentate curbele funcțiilor:
$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to [-1, 1], f(x) = \sin x, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x;\ h : \mathbb{R} \to \{-\frac{1}{2}\}, h(x) = -\frac{1}{2}$.

a) Rezolvați ecuațiile: $f(x) = g(x),\ f(x) = h(x)$;

b) Indicați intersecțiile cu axele de coordonate ale curbei f.

c) Precizați semnul funcției f.

d) Rezolvați inecuațiile: $f(x) \leq g(x)$ și $h(x) \geq f(x)$

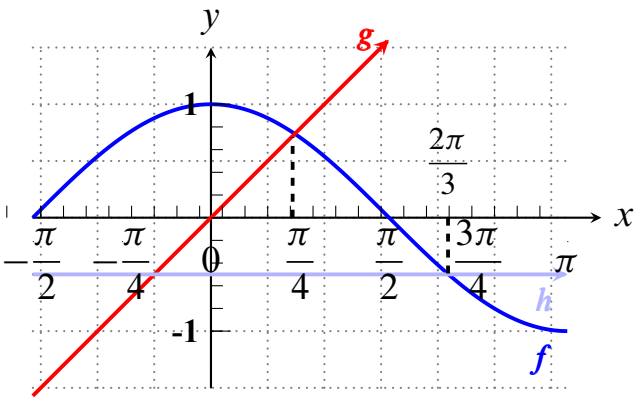


Fig. 35: *Prob.62*

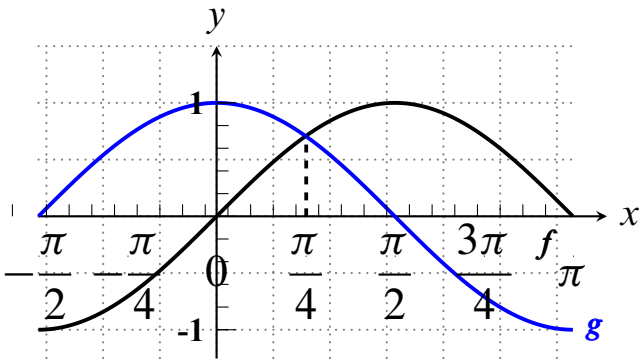


Fig. 36: *Prob.63*

62. În figura 36 sunt reprezentate curbele funcțiilor:
$f, g : \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \to [-1, 1]$.

a) Rezolvați ecuația $f(x) = g(x)$ și inecuația $f(x) \leq g(x)$.

b) Indicați intersecțiile $C_f \cap Ox$ și $C_g \cap Ox$.

d) Precizați intervalele pentru care $f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ g(x) > 0$ și $g(x) < 0$

63. În figura 37. sunt reprezentate curbele funcțiilor:
$f : [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = 1, \ h(x) = -1, \ x \in \mathbb{R}.$

a) Să se rezolve ecuațiile:
$f(x) = g(x), \ f(x) = h(x),$
$x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}.$

b) Să se rezolve inecuațiile $f(x) \leq g(x)$ și $f(x) \geq g(x)$.

c) Precizați intersecțiile cu axele ale curbelor C_f, C_g, C_h.

d) Indicați $sgn\, f$, $sgn\, g$, $sgn\, h$, pe domeniile de definiție.

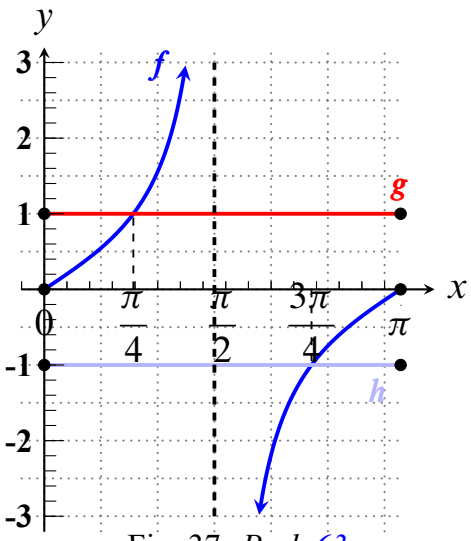


Fig. 37: *Prob.63*

64. Pentru curbele din figurile 38,39,40 se cer următoarele:

a) Indicați domeniul de definiție și imaginea fiecărei funcții.

b) Rezolvați ecuația $f(x) = g(x)$ și inecuația $f(x) \geq g(x)$.

c) Precizați $sgn\ f$ și $sgn\ g$ pe domeniul de definiție:

d) Indicați intersecțiile cu axele de coordonate ale curbelor funcțiilor date.

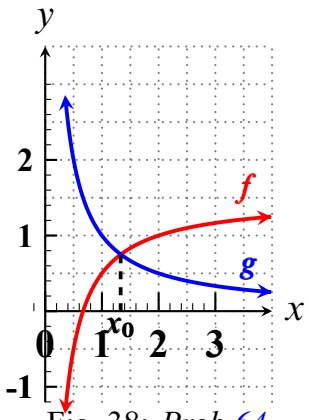


Fig. 38: *Prob.64*

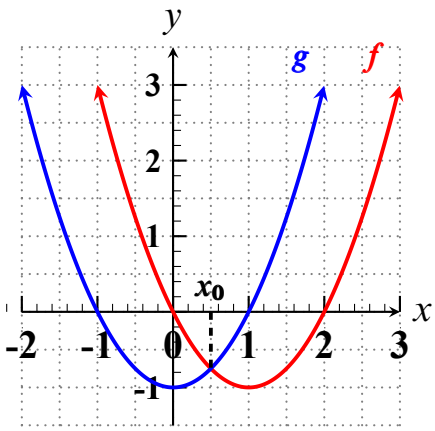


Fig. 39: *Prob.64*

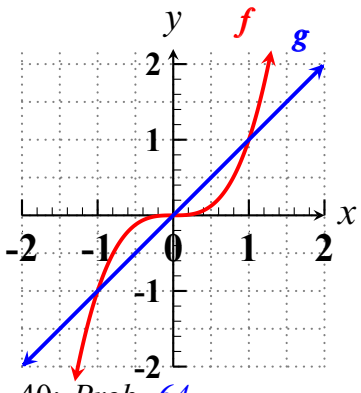


Fig. 40: *Prob. 64*

• Fie $f : A \to B, A, B \subset \mathbb{R}$. Spunem că f este mărginită dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < f(x) < b, \ \forall x \in A$.

• Dacă există $x_1 \in A$ și /sau x_2 așa încât $a = f(x_1)$ și/sau $b = f(x_2)$ se spune că f își atinge marginile și $\min\limits_{x \in A} f(x) = a$, și/sau $\max\limits_{x \in A} f(x) = b$

65. În figurile 41–46 sunt indicate curbele mai multor funcții:

a) Indicați domeniul de definiție și imaginea funcției;

b) Precizați dacă sunt sau nu mărginite

c) Indicați acolo unde este cazul punctele în care funcția ia valoarea minimă și/sau maximă.

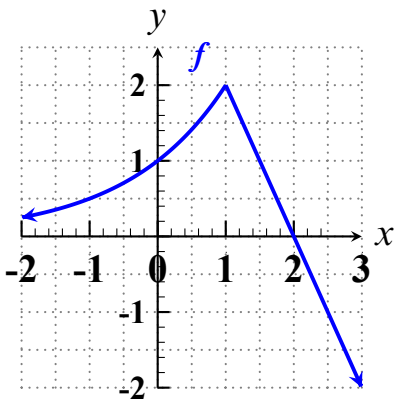


Fig. 41

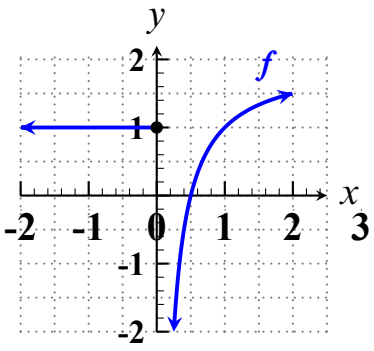


Fig. 42

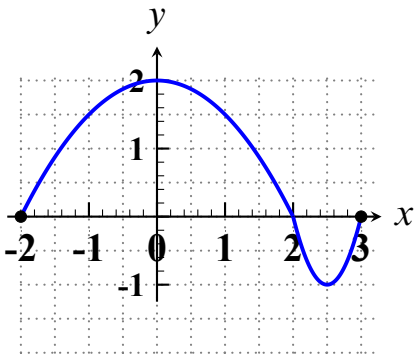


Fig. 43

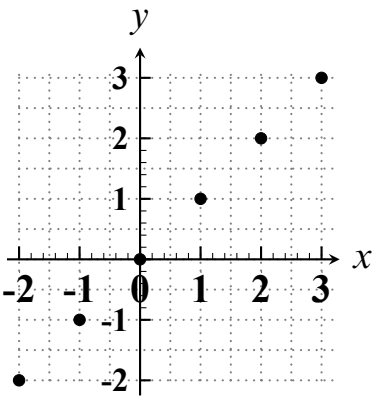


Fig. 44

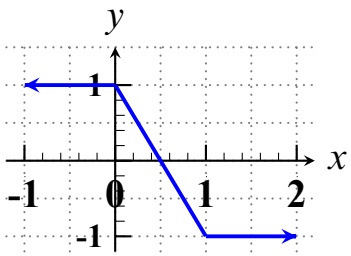


Fig. 45

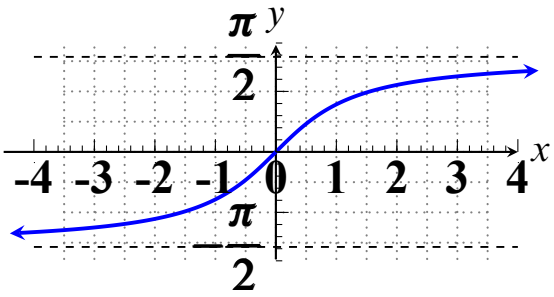


Fig. 46

Fie $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, A interval simetric față de O.

- f se numește *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$.
- f se numește *impară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$
- Din punct de vedere geometric, curba funcției, C_f, este simetrică în raport cu axa Oy dacă f este pară și în raport cu originea sistemului de axe, O, dacă f este impară.

66. În figurile 47–58 sunt reprezentate geometric curbele unor funcții:

a) Indicați domeniile de definiție și imaginea funcției;

b) Precizați care dintre ele sunt pare, care impare.

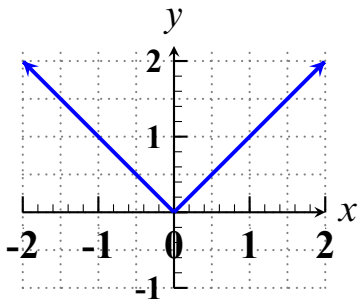


Fig. 47

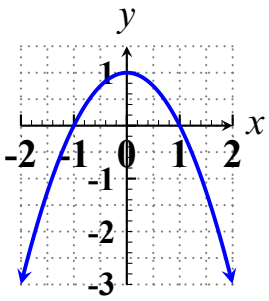


Fig. 48

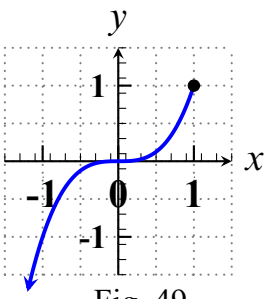


Fig. 49

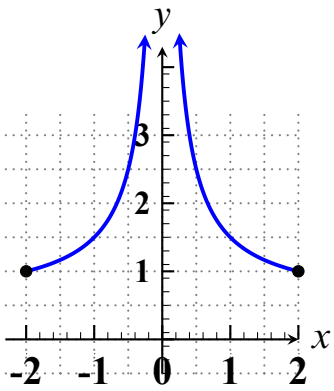


Fig. 50

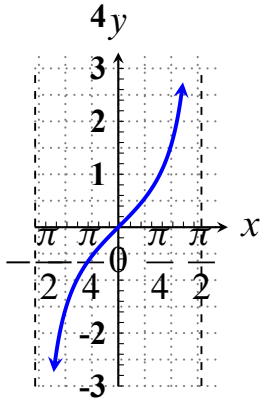


Fig. 51

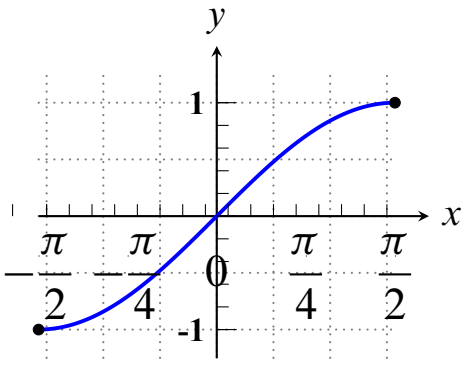


Fig. 52

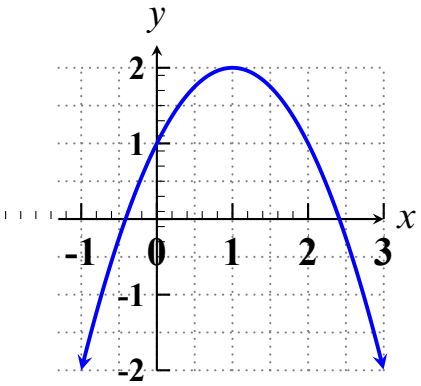


Fig. 53

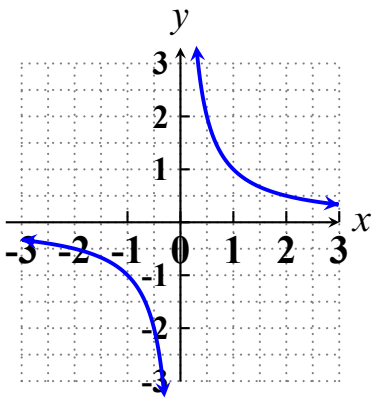


Fig. 54

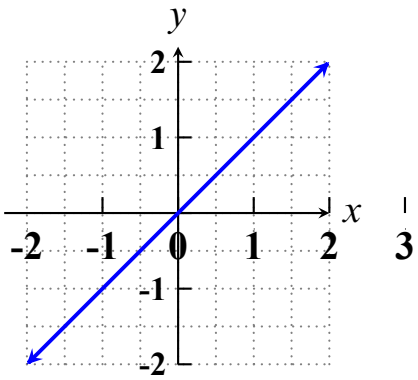


Fig. 55

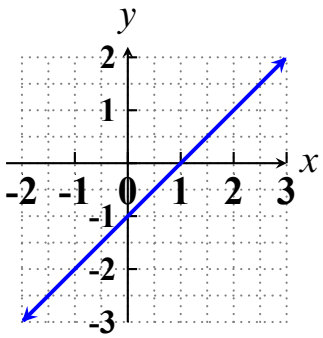


Fig. 56

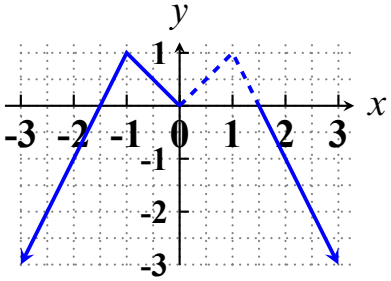


Fig. 57

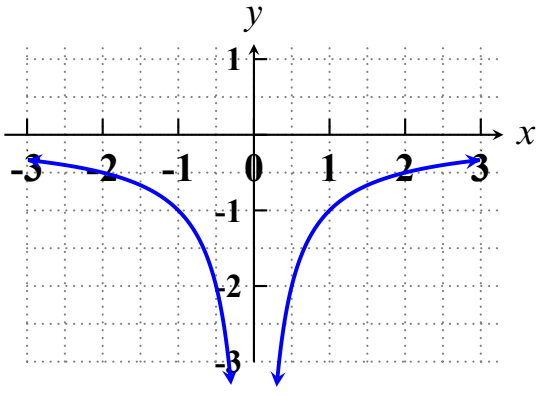


Fig. 58

67. Știind că funcțiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt pare iar $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt impare (vezi fig.59–62), completați imaginea geometrică pe domeniul complementar acelui pe care sunt desenate.

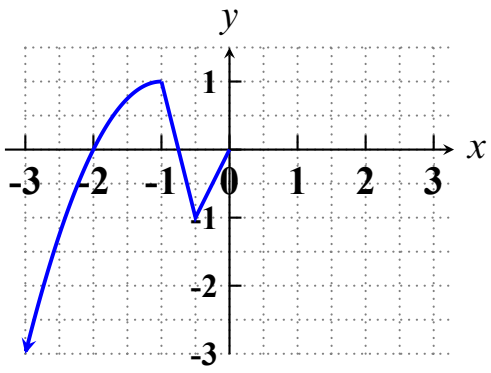


Fig. 59: f_1

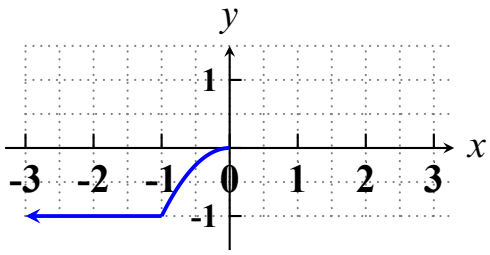


Fig. 60: g_1

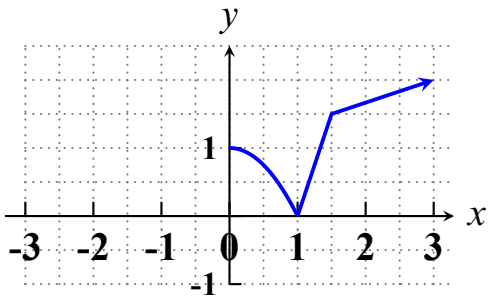


Fig. 61: f_2

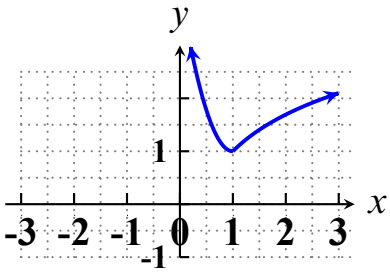


Fig. 62: g_2

68. Studiați mărginirea următoarelor funcții:

a) $f : [-1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 2$

b) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -5x & x \in [-2, 0] \\ 2x + 2 & x \in (0, 3] \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 3}$.

69. Studiați mărginirea următoarelor funcții. În cazurile posibile determinați $\min\limits_{x \in A} f(x)$ și $\max\limits_{x \in A} f(x)$

a) $f : [-3, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$;

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{|x| + 1}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2$.

Exemplu rezolvat: fie $f : [-4, 11] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$.

$-4 \le x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x + 3 \le 4$ deci $f(x)$ mărginită, în plus $\min\limits_{x \in [-4,1]} f(x) = f(-4) = -1$ iar $\max\limits_{x \in [-4,1]} f(x) = f(1) = 4$.

70. Studiați paritatea sau imparitatea următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x$;

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^3}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|+1$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$.

Exemple rezolvate :

1) fie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x}$. Exprimăm $f(-x)=\dfrac{-x+1}{-x}=\dfrac{x-1}{x}$ care, dacă ar fi egal cu $f(x)$ ar conduce la $-1=1$ absurd, deci f nu este pară, iar $f(-x)=-f(x)$ conduce la $x=0,\forall x\in\mathbb{R}$ absurd, deci f nu este nici impară.

2) fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4+x^2+1,\ f(-x)=(-x)^4+(-x)^2+1=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ deci funcție pară.

71. Studiați paritatea sau imparitatea următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-4|-|4+x|$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{-x-3x^3}{3+|x|}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x^2|x|+4}$.

• Fie $f:A\to B,\ A,B\subseteq\mathbb{R}$ și $a\in\mathbb{R}$ fixat. Curba funcției, C_f admite drept *axă de simetrie* dreapta de ecuație $x=a$ dacă au loc (1) și (2)

(1) $a-h,\ a+h\in A,\ \forall h>0$ și (2) : $f(a-h)=f(a+h),\ \forall h>0$.

• Curba funcției, C_f admite punctul $C(a,b)$ drept *centru de simetrie*, dacă au loc condițiile: (1) $a-h,a+h\in A,\forall h>0$ și (2): $f(a-h)+f(a+h)=2b,\forall h>0$.

72. În figurile 63–71 sunt indicate curbele a opt funcții pe domenii de definiție simetrice în raport cu un număr real.

a) Precizați pentru fiecare funcție domeniul de definiție și mulțimea de valori a funcției.

b) Depistați curbele ce admit axă de simetrie și scrieți ecuația axei de simetrie.

c) Depistați curbele ce admit centru de simetrie și scrieți coordonatele centrului de simetrie.

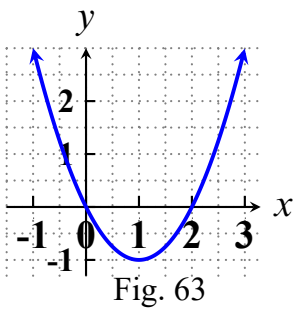


Fig. 63

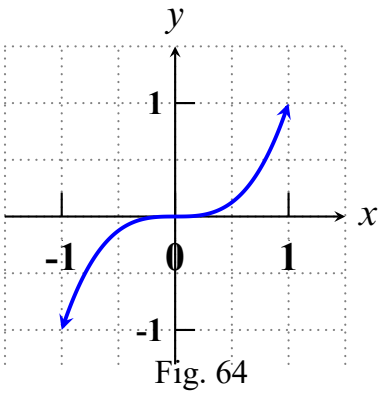


Fig. 64

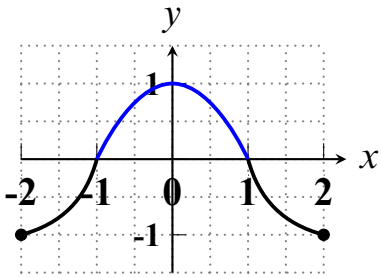


Fig. 65

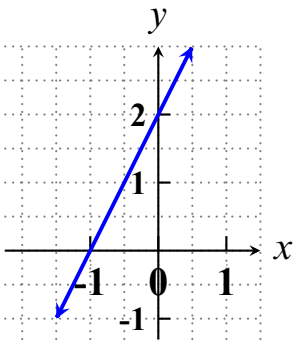


Fig. 66

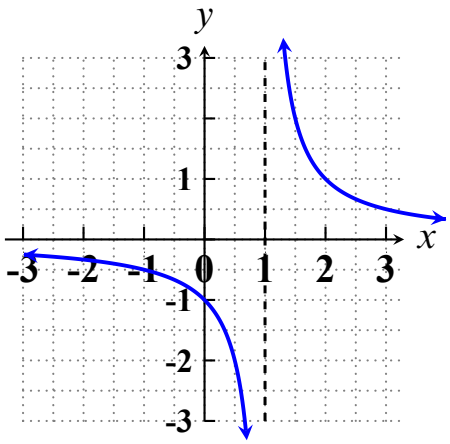


Fig. 67

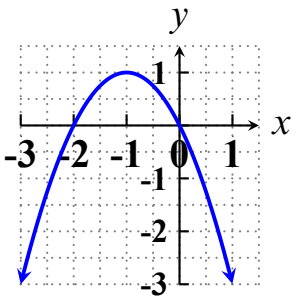


Fig. 68

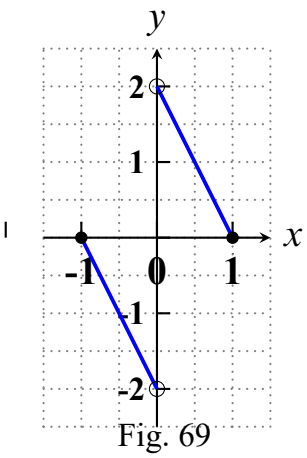


Fig. 69

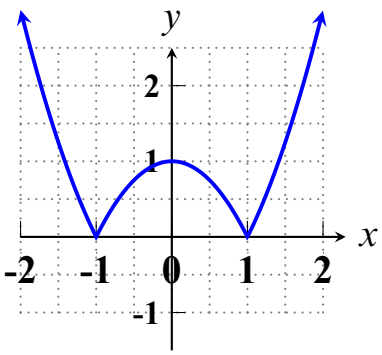


Fig. 70

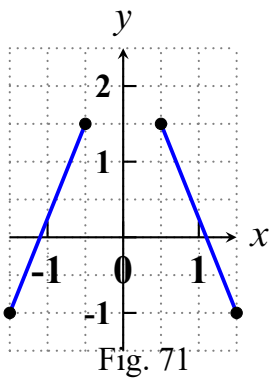


Fig. 71

73. Să se verifice dacă reprezentările grafice ale funcțiilor următoare admit axă de simetrie, dreapta de ecuație indicată.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+2,\ (d):x=2;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|2x-3|,\ (d):x=\dfrac{3}{2};$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-|x+1|,\ (d):\ x=-1$

74. Să se verifice dacă reprezentările grafice ale funcțiilor următoare, admit centru de simetrie, punctul indicat:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ S(0,b);$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2+3x,\ S(1,1);$

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{x-2},\ S(2,1).$

• Fie $f:A\to\mathbb{R},\ A\subseteq\mathbb{R}$. Funcția f este *periodică,* dacă există $T>0$, astfel încât, $\forall x\in A$, avem $x+T\in A$ și $f(x+T)=f(x)$.

• Dacă funcția $f : A \to \mathbb{R}$ este periodică de perioadă T, atunci oricare ar fi $x \in A$ și $k \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $(x + kT) \in A$, avem $f(x + kT) = f(x)$.

• Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție periodică. Dacă există un cel mai mic număr real pozitiv T cu proprietatea $f(x + T) = f(x)$, $(\forall)x \in A$, atunci el se numește perioada principală a funcție f.

75. În figurile următoare sunt reprezentate funcții periodice. Precizați în fiecare caz, care este perioada principală:

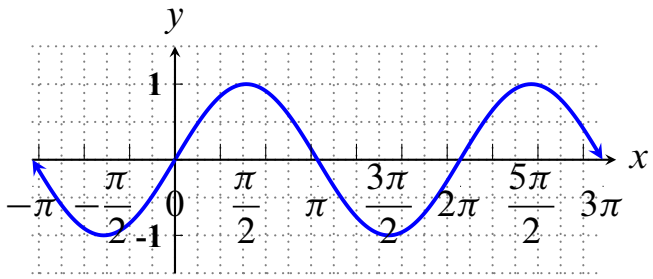


Fig. 72

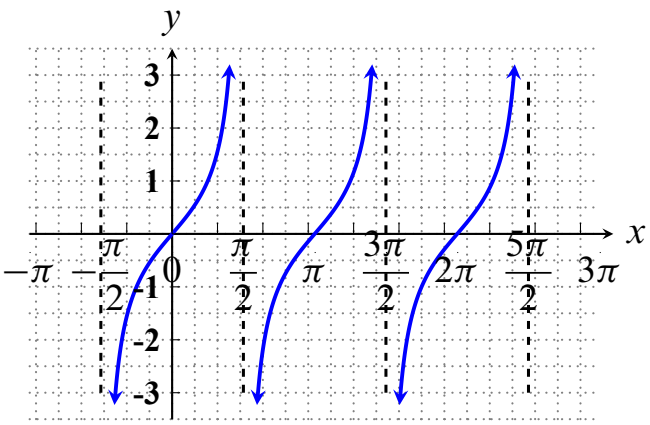


Fig. 73

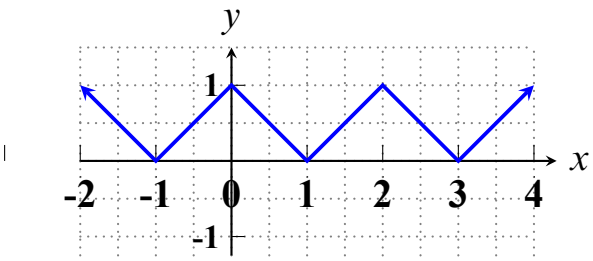


Fig. 74

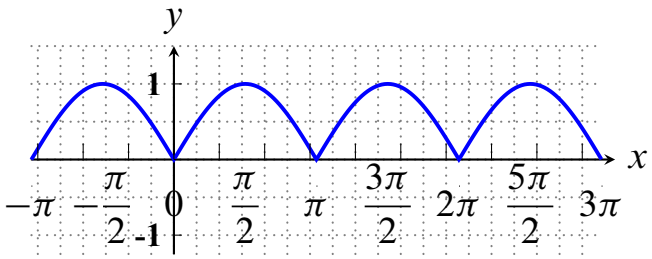


Fig. 75

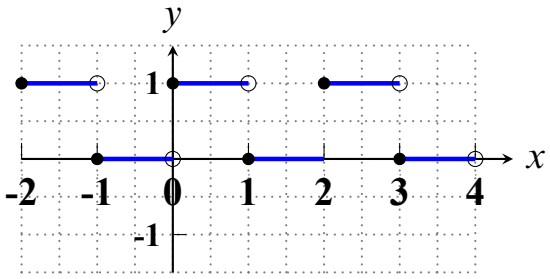


Fig. 76

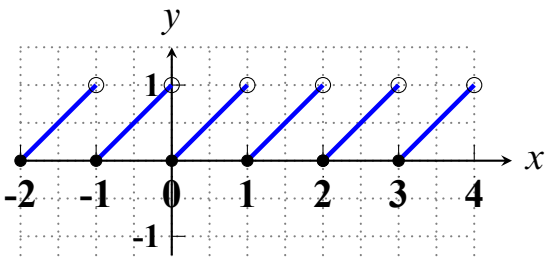


Fig. 77

76. Verificați dacă următoarele funcții au perioada $T = 2$

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (-1)^x$;

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \dfrac{1 + (-1)^x}{2}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$;

d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) =$ ultima cifră a numărului 9^x;

77. Demonstrați că următoarele funcții sunt periodice cu perioada principală T indicată>

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\frac{x}{4}\right\}$ $T=4$; c) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\frac{x^4}{4}\right\}$ $T=4$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\frac{x+2}{3}\right\}$ $T=3$; d) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\frac{x^2-x}{3}\right\}$ $T=3$.

78. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ o funcție cu proprietatea $f(x+1)=\dfrac{1}{1-f(x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcția f este periodică.

79. Fie $a>0, b>0$ și $f:\mathbb{R}\to[a,2a]$ o funcție cu proprietatea $f(x+b)=a+\sqrt{2af(x)-f^2(x)}$. Să se arate că funcția este periodică.

80. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ o funcție cu proprietatea că există $a\neq 0$, astfel încât $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. Arătați că f este periodică.

O.I.M, Moscova, 1968

81. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care satisface relația: $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$

a) Să se arate că f este periodică.

b) Să se dea un exemplu diferit de funcția nulă.

Florin Pârvănescu, Slatina

- Fie $f:A\to B$, $A,B\subseteq\mathbb{R}$ și I interval, $I\subseteq A$
- f este strict crescătoare pe I dacă și numai dacă $\forall x_1,x_2\in I\ (x_1<x_2\to f(x_1)<f(x_2))$.
- f este strict descrescătoare pe I dacă și numai dacă $\forall x_1,x_2\in I\ (x_1<x_2\to f(x_1)>f(x_2))$.
- f este crescătoare pe I dacă și numai dacă $\forall x_1,x_2\in I\ (x_1<x_2\to f(x_1)\leq f(x_2))$.
- f este descrescătoare pe I dacă și numai dacă $\forall x_1,x_2\in I\ (x_1<x_2\to f(x_1)\geq f(x_2))$.

82. În figurile următoare sunt reprezentate curbele unor funcții monotone pe intervale. Determinați pentru fiecare din ele intervalele de monotonie, precizând și tipul de monotonie.

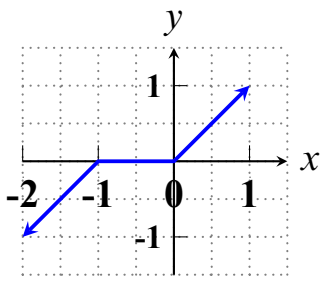


Fig. 78

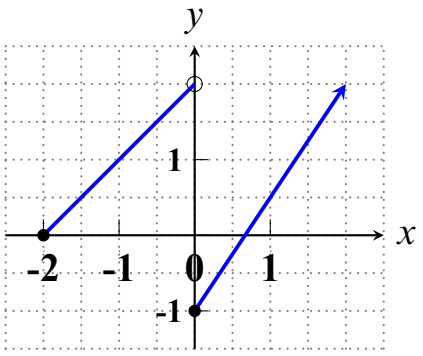


Fig. 79

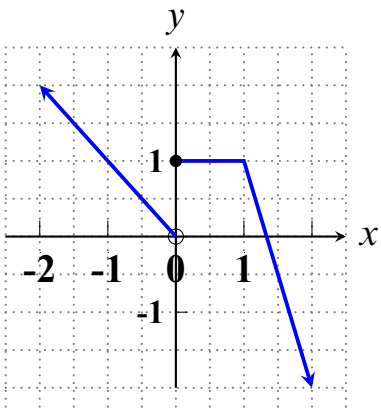


Fig. 80

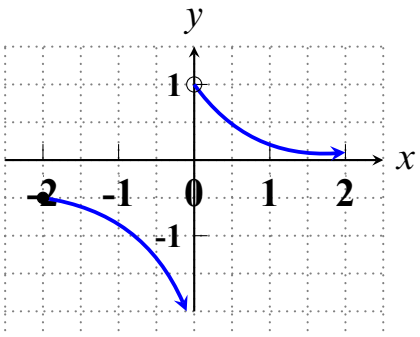


Fig. 81

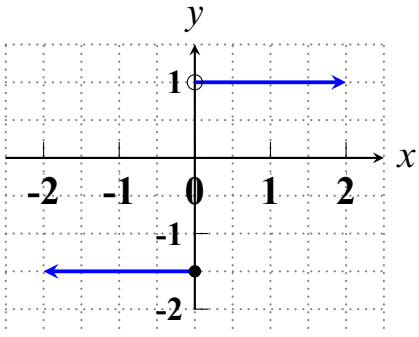


Fig. 82

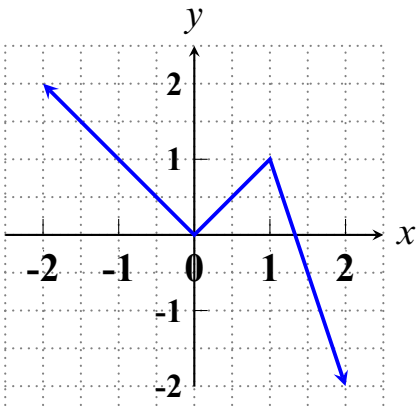


Fig. 83

7.4 Compunerea funcțiilor

• Fie $f : A \to B,\ A, B \subseteq \mathbb{R}$ și $g : B' \to C$, unde $B' \supseteq \operatorname{Im} f,\ C \subseteq \mathbb{R}$. Atunci se poate defini funcția $g \circ f$, indicată de diagrama din figura 84. Dacă $f : A \to B$, și $g : B \to C$ atunci are loc $(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ g \circ f : A \to C$

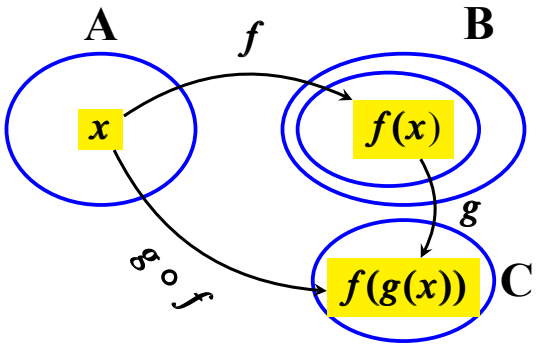


Fig. 84: *Diagrama 1*

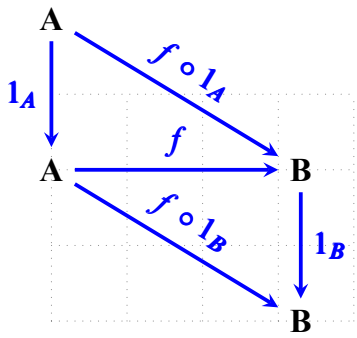


Fig. 85: *Diagrama 3*

• Dacă $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D$, atunci $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$:, , ∘" este *asociativă.*

• Dacă notăm cu $1_A : A \to A,\ 1_A(x) = x$, funcția identică a mulțimii A, atunci are loc diagrama din figura 85 $f \circ 1_A = 1_A \circ f = f, \forall f : A \to B$.

• În general compunerea funcțiilor nu este comutativă.

83. Fie funcțiile $f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x + 1,\ A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $g : B \to \mathbb{R}$, $B = \{0, 1, 3, 7\}, g(x) = x - 3$. Pot fi definite funcțiile compuse $g \circ f,\ f \circ g$? În caz afirmativ să se determine aceste funcții. Să se întocmească și diagrama corespunzătoare.

Rezolvare: $f(A) = \{1, 3, 7\}$, deci $f(A) \subset B$ și are sens $g \circ f$. Cum $g(B) = \{-3, -2, 0, 4\} \not\subseteq A$, nu se poate defini $f \circ g$. Avem deci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 3 = x^2 - x - 2$, (diagrama fig. 86)

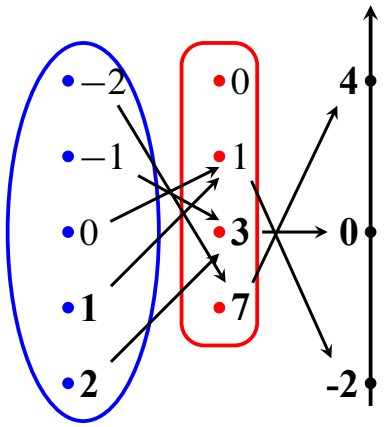


Fig. 86: *Problema 83*

Aceleași cerințe pentru funcțiile:

84. $f : A \to B$, $g : B \to A$ unde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 3, 5\}$ iar $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$; $g(0) = 2$, $g(1) = 1$, $g(3) = 4$, $g(5) = 1$

85. $f : A \to B$, $g : B \to A$ unde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ și $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$, $g(a) = 2$, $g(b) = 4$, $g(c) = 3$, $g(d) = 1$.

86. $f : \{0, 1, 2\} \to \{1, 4, 6, 7\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 7$ și $g : \{4, 5, 6\} \to \{0, 2\}$ $g(4) = 0$, $g(5) = 2$, $g(6) = 2$

87. a) Fie mulțimile $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 4\}$, $G = \{2, 3, 4\}$, $H = \{0, 1, 4\}$ și funcțiile: $f : E \to F$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 4$; $g : F \to G$, $g(1) = 3$, $g(4) = 2$; $h : G \to H$, $h(2) = 1$, $h(3) = 0, h(4) = 0$. Să se verifice, folosind și o diagramă că $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

b) Aceeași cerință pentru funcțiile:

$f : \{1, 3, 5\} \to \{0, 1, 4\}$, $f(1) = 1$, $f(3) = 0$, $f(5) = 4$;

$g : \{1, 4\} \to \{1, 3\}$, $g(1) = 1, g(4) = 3$;

$h : \{0, 1, 5\} \to \{1, 4\}$, $h(0) = 1, h(1) = 1$, $h(5) = 4$;

88. Fie funcțiile $f : \{0, 2, 3\} \to \{-1, 0, 1\}$, $f(0) = 0$, $f(2) = -1, f(3) = 1$; $g : \{0, 1\} \to \{0, 2\}$, $g(0) = 0$, $g(1) = 2$. $h : \{-1, 0, 3\} \to \{0, 1\}$, $h(-1) = 0$, $h(0) = 0$, $h(3) = 1$. Aceeași cerință ca la exercițiul precedent

89. Să se definească trei funcții $f : A \to B$, $g : C \to D$, $h : E \to F$ astfel încât să existe $h \circ g \circ f$ și să se verifice apoi asociativitatea compunerii funcțiilor.

90. Fie funcția $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 2$, $f(d) = 4$ și funcția identică a mulțimii $\{a, b, c, d\}$ notată e. Să se determine funcțiile $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c, d\}$ care satisfac egalitatea: $g \circ f = e$

Exemplu rezolvat : $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1)$ și pentru a avea $(g \circ f)(a) = e(a) = a$, alegem $g(1) = a$; $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(3) = e(b) = b$; $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(2) = c$; $(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(4) = d$ iar $g(5)$ îl alegem pe rând a, b, c, d, deci avem patru funcții tip g astfel încât să aibă loc cerința.

Același exercițiu pentru funcțiile:

91. $f:\{1,2,3,4\}\to\{a,b,c\},\ f(1)=b,\ f(2)=a,\ f(3)=c,\ f(4)=b$

$g:\{a,b,c\}\to\{1,2,3,4\}$. Să se afle toate funcțiile g așa încât $f\circ g=e$, unde e funcția identică a mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

92. $f:\{x,y,z\}\to\{1,2,3,4\},\ f(x)=3,\ f(y)=2,\ f(z)=1$. Să se determine toate funcțiile $g:\{1,2,3,4\}\to\{x,y,z\}$ pentru care este adevărată egalitatea $g\circ f=e$, e funcția identică a mulțimii $\{x,y,z\}$. Alcătuiți și diagrama corespunzătoare.

93. a) În tabelul următor completați fiecare din liniile 2 și 3 pe baza celei precedente: ex: dacă $a=2$, $2a+1=5$ iar $3-a=35=-2$. Completați și linia a 4-a. Ce observați? Găsiți o legătură între cele trei expresii: $2a+1$, $3-a$ și $-2a+2$.

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2a+1$						5			
$3-a$						-2			
$-2a+2$						-2			

b) Completați tabelul de mai jos, identificați funcțiile definite de acest tabel. Scrieți funcțiile compuse obținute, domeniul și codomeniul fiecăreia.

x	0	1	2	3	4
$y=2x+1$					
$z=y-1$					
$u=3z$					

94. Considerăm graficele funcțiilor f și g, următoare:
$G_f=\{(x,1),(y,2),(z,1),(t,3),(u,4)\}$ și
$G_g=\{(1,y),(2,z),(3,x),(4,x)\}$

Care dintre funcțiile $f\circ g$ și $g\circ f$ poate fi definită ? Pentru funcția care există scrieți graficul ei.

95. Fie $A=\{1,2,3,4,5\}\subset\mathbb{N}$ și funcțiile f,g definite de graficele: $G_f=\{(1,2),(2,3),(3,3),(4,1),(5,2)\}$; $G_g=\{(1,4),(2,5),(3,1),(4,2),(5,3)\}$. Să se determine $g\circ f$ și $f\circ g$.

96. Pentru fiecare din perechile de funcții următoare să se determine parametri ce apar în funcție de condiția dată:

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+m,\ g(x)=2(x-m)+1,\ (f\circ g)(1)=2$

b) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ g(x)=3x-1,\ (f\circ g)(1)=2,\ (g\circ f)(-1)=1$

c) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x-2,\ g(x)=mx,\ (f\circ g)(1)=0$

d) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx-1,\ g(x)=x+n$ iar $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

e) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+1,\ a\neq 0,\ g(x)=x^2-x+1$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$, știind că imaginile geometrice ale graficelor $f\circ g$ și $g\circ f$ trec prin același punct de abscisă -1.

97. Determinați $f\circ g$ și $g\circ f$ pentru următoarele perechi de funcții:

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1,\ g(x)=x^2$;

b) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+3,\ g(x)=2x-1$

c) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ g(x)=cx+d$

d) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x,\ x\le 0\\ 1,\ x>0\end{cases},g(x)=\begin{cases}1,\ x\le 0\\ x,\ x>0.\end{cases}$

e) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-1,\ x\le 1\\ 2,\quad x>1\end{cases},\ g(x)=x$

f) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+3, & pt.\ x\le -1\\ x-2, & x>-1\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}-x+5, & pt.\ x\ge 3\\ 2x-8 & pt.\ x>3\end{cases}$

98. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+3 & pt.\ x\ge -1\\ x-2 & pt.\ x>-1\end{cases}$. Determinați funcția $g=f\circ f$

99. a) Fie $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1,\ g(x)=2x,\ h(x)=-4x+2$. Determinați $h\circ g\circ f$; Calculați $(h\circ g\circ f)(1)$ și $(h\circ g\circ f)(2)$;

b) Dacă în loc de g de la a) se alege $g(x)=\begin{cases}1,\ x\le 0\\ -1,\ x>0\end{cases}$, să se verifice cerințele de la punctul a.

100. a) Fie $G=\{f_1,f_2,f_3\}$ unde f_1,f_2,f_3 sunt trei funcții definite astfel: $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=x,\ f_2:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=\dfrac{1}{1-x},\ f_3:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f_3(x)=\dfrac{x-1}{x}$, să se întocmească tabla compunerii acestor funcții, în cele nouă moduri posibile pentru câte două funcții.

b) Aceeași cerință pentru mulțimea de funcții $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ unde $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=x,\ f_2:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=\frac{1}{x},\ f_3:\mathbb{R}\}\to\mathbb{R},\ f_3(x)=-x,\ f_4:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=-\frac{1}{x}$

Exemplu rezolvat : a) Cum $f_1(x)=x$ este funcția identică avem că $f_1\circ f_2=f_2,\ f_1\circ f_3=f_3,\ f_2\circ f_1=f_2$ și $f_3\circ f_1=f_3$. Acum $(f_2\circ f_2)(x)=f_3(x)$ (prin calcul) $f_2\circ f_3=f_1,\ f_3\circ f_2=f_1$ și $f_3\circ f_3=f_2$. Toate aceste rezultate le trecem într-o tablă cu trei linii și trei coloane. Pentru a obține un element al tabelului aflat pe linia 2 și coloana 3, compunem funcția de pe linia 2 cu funcția de pe coloana 3 aflate în exterior.

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

101. Fie E o mulțime de elemente, nevidă. Fiecărei submulțimi A a ei i se poate asocia o funcție notată f_A numită funcția caracteristică a mulțimii A definită astfel: $f(x)=\begin{cases}1,\ x\in A\\ 0,\ x\notin A\end{cases}$

a) Să se arate că: $f_{A\cup B}=f_A+f_B-f_{A\cap B};\ f_{A\cap B}=f_A\cdot f_B;\ f_{A-B}=f_A(1-f_B);A=B\Leftrightarrow f_A=f_B$.

b) Să se demonstreze, folosind funcția caracteristică, proprietățile operațiilor cu mulțimi: $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C);\ A\setminus B=A\cap\overline{B};A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

c) Utilizând eventual și rezultatul problemei 7 cap3.2 vol 1, să se arate că numărul de funcții caracteristice definite relativ la o mulțime E este $2^{|E|}$.

102. a) Fie $A = \{x+y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Asociind fiecărui număr $x+y\sqrt{2}$ din A, numărul $x-y\sqrt{2}$, definim o funcție $f : A \to A$?

b) Fie $A = \{x+2y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Asociind fiecărui număr $x-2y$ din A, numărul $x-y\sqrt{2}$, definim o funcție $f : A \to A$?

103. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ coordonatele unui punct din plan în raport cu două axe perpendiculare.

a) Să se determine mulțimea $\{M(x,y) \mid \sqrt{(1-x)(1-y)} + \sqrt{xy} \in \mathbb{R}\}$.

b) Să se arate că relația $\sqrt{(1-x)(1-y)} + \sqrt{xy} = 1$, unde $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, definește o funcție de argument x.

c) Să se reprezinte grafic această funcție.

104. Fie $G \subset [0,1] \times [0,1]$ mulțimea definită astfel:

$G = \left\{(x,y) \mid \sqrt{\frac{x(1-x)}{x-y}} - \sqrt{\frac{y(1-x)}{x-y}} = 0\right\}$. Este aceasta graficul unei funcții de argument x ? Dar dacă $G \subset (\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2})$? În caz afirmativ să se reprezinte grafic funcția într-un sistem de axe xOy ortogonal.

105. Fie funcțiile: $f : [9,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$ și $g : [9,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 6, & 9 \le x \le 18 \\ 2\sqrt{x-9}, & x > 18 \end{cases}$ Verificați dacă sunt egale aceste funcții.

106. Se dau funcțiile: $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+2, & -2 \le x \le 0 \\ x+2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$, $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \max(-x+2, x+2)$ și $h : [-2,2] \to \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} |x|+2, & -2 \le x \le 2,\ x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

107. Raportăm dreapta d la două repere $(O,\vec{i})$ și $(O',\vec{i})$. În reperul $(O,\vec{i})$ $A(a)$, în reperul $(O',\vec{i})$, $B(b)$, iar O' față de $(O,\vec{i})$, are abscisa m.

a) Determinați abscisele lui A în $(O',\vec{i})$ și a lui B în $(O,\vec{i})$.

b) Determinați distanța AB în $(O,\vec{i})$ și în $(O',\vec{i})$.

108. a) Fie $f : E \to F$ o funcție iar $A, B \subset E$. Să se arate că $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ iar $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$ și $A = [-2,5]$ și $B = [-7,2]$. Verificați proprietățile de la a)

109. Fie $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$ și $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x+1$. Să se determine a și b astfel încât să poată fi definită funcția $f \circ g$. Analog, să se determine a, b astfel încât să poată fi definită $g \circ f$.

110. a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-4$. Să se calculeze $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori}(-1)$

b) Să se determine $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori}(x)$ pentru fiecare dintre funcțiile $f_1(x)=x+3$ și $f_2(x)=3x+1$; Demonstrați prin inducție rezultatul intuit.

111. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$. Determinați $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori}(x)$.

112. Fie $a\in\mathbb{R}$. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ ce satisfac simultan egalitățile:

a) $(f\circ f)(x)=4x+3,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$; b) $(f\circ f\circ f)(x)=8x+a$.

(M. Chiriță, V. Matrosenco)

113. a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $(f\circ f)(x)=2x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să se afle $f(1)$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că există $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât să avem relația $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori}(x)=2x-1,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$. Să se afle $f(1)$.

114. a) Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ și $g(x)=x^2-x$. Determinați $f\circ g$ și $g\circ f$

b) Dacă $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=2x^6-3x^3+1$, determinați funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $h=g\circ f$.

c) Aceeași cerință de la b) pentru $h(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Aflați $f(1)$ și $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

115. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $(f\circ f)(x)=x^2-2x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Aflați $f(1)$.

116. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică dubla inegalitate: $f(x+a)\le x^2\le f(x)+a(2x-a),\ \forall x\in\mathbb{R}$

(R. Ghenghiu, et. loc. Bihor, 1999)

117. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x^3+6x^2+12x)\le x\le f^3(x)+6f^2(x)+12f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

118. a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f^2\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)-2f\left(x^2-\dfrac{5}{4}x+1\right)+1=0$. Calculați $f(0)$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f^2\left(x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)=4f\left(x^2-3x+1\right)-4,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să se afle $f(1)$.

119. a) Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația $f(3x-2)=x+3$. Calculați $f(0)$. Aflați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)=4$.

b) Aceeași cerință pentru o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică relația: $f(x-2)=3x+1;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

120. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $2f(x)+3f(1-x)=4x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

121. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ având proprietatea : $f(1)\neq 0$ și $f(x)\cdot f(y)=f(x+y-xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

122. Să se determine funcțiile $f:R\longrightarrow R$ care verifică relația:

$$f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y \qquad (1)$$

123. a) Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să verifice relația: $f(x)+f(n-x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ astfel încât $f(x)-f(-x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$?

124. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$. Să se determine valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care $M(m+1;m)$ se află pe graficul funcției f.

125. Să se arate că nu există funcții monotone $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $(f\circ f)(x)=-x+a$, unde $a\in\mathbb{R}$ dat.

126. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+[x]$. Să se determine funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}$.

127. Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface următoarele afirmații: $f(0)=0$ și $f(x+1)=f(x)+2x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, aflați valoarea lui $f(20)$.

128. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x\cdot y)=\dfrac{f(x)}{y}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}^*$. Dacă $f(10)=45$, să se afle $f(25)$.

129. Determinați funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cu proprietățile a) $f(x)=f(x+1)+f(-2)$ b) $f(2004)=2005$.

(Olimpiada locală, Teleorman 2004)

130. Fie $f:(0,\infty)\longrightarrow R$ o funcție cu proprietatea $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right),\ (\forall)x,y\in(0,\infty)$. Să se arate că: $f(x)+f(y)+f(z)=3f\left(\dfrac{3xyz}{xy+yz+xz}\right)$.

7.5 Test de evaluare 1

1. Fie funcția $f:[-1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=2|x|+|x-1|,\ \forall x\in[-1,3]$

Să se scrie explicit funcția și să se reprezinte grafic.

2. Să se determine funcțiile f și $g,\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ care îndeplinesc condițiile:

a) $f(x-y)+2xy+a=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $\dfrac{1}{g(x-y)}+2xy+a^2=\dfrac{1}{g(x)}+\dfrac{1}{g(y)}+4xa,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2m-1)x+m-2$. Scrieți legea de corespondență în fiecare din cazurile:

a) $(-5;2)\in G_f$; b) $(8,m-1)\in G_f$; c)$(m-1;m^2+2)\in G_f, m\in\mathbb{Z}$.

4. Aflați $a,b,m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f:[a,b]\in\mathbb{R}$ și $g:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=mx+4$ și $g(x)=3x+n$ să fie egale.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x-3 & x<1\\ x-2 & x\geq 1\end{cases}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=3x-2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)$ și $(g\circ f)(x)$.

7.6 Test de evaluare 2

1. Fie $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\},\ B=\{-1,0,1,2,3\}$ și $C=\{2,3,4\}$. Să se afle:

a) $\{x\in A\mid |x|\leq 2\}\times\{y\in B\mid |y|>1\}$

b) $G\subset A\times B,\ G=\{(x,y)\mid |x+y|=1\}$

c) $G\subset A\times B,\ G=\{(x,y)$ există $z\in C$ așa încât $|x-y|=z\}$

2. Să se reprezinte în planul raportat la reperul xOy mulțimile de puncte $M(x,y)$ ale căror coordonate îndeplinesc condițiile:

a) $|x|=2$ și $y=x$

b) $|x|\leq 1$ și $y\in[-2,-1]\cup[0,1]$

c) $|x|\geq 1$ și $|y|\geq 1$

d) $x\in[-2,2]$ și $y=[-x]$.

3. Fie $A=\{1,2,3,4,5\}$ și $B=\{a,b,c,d\}$.

a) Indicați două corespondențe funcționale $f:A\to B$ așa încât $f(1)=f(2)=a$ și două corespondențe nefuncționale de la A la B.

b) Câte corespondențe funcționale $f:A\to B$ cu proprietatea că $f(1)=f(2)=a$ și $f(3)=b$ există ?

4. Care din următoarele exprimări sunt greșite și de ce:

a) $f(x)=x+1,\ f:[-1,2]\to[0,1]$ este o funcție

b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\{-1,0,1\}\\ 2x-1, & x\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$ este o funcție $f:\{-1,0,1,2,3\}\to R$

5. Pentru ce valori ale lui a,b,c funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=\begin{cases}3x+b, & x<2\\ 1, & x\geq 2\end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases}(a+3)x+b, & x<2\\ ax+c, & x\geq 2\end{cases}$ sunt egale ?

6. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$. Determinați:
$\mathrm{Im}f;\ \ f([0,2]);\ f^{-1}(\{-4,-3,1,2\});\ \ f^{-1}([0,3])$.

7.7 Test de evaluare 3

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$.

a) Să se calculeze $\underbrace{(f\circ f\circ f\ldots\circ f)}_{de\ 2004\ \ ori}(0)$

b) Pentru ce n, $\underbrace{(f\circ f\circ f\ldots\circ f)}_{de\ n\ \ ori}(1)=2005$?

c) Dacă $f(x)=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$, pentru ce a și b,
$\underbrace{(f\circ f\circ f\ldots\circ f)}_{de\ n\ \ ori}(x)=x+2n,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, ?

2. Să se determine $f\circ g$ și $g\circ f$ pentru următoarele perechi de funcții:

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1,\ g(x)=\begin{cases}1,\ x<0\\ x+2,\ x\geq 0\end{cases}$

b) a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x,\ x\leq 1\\ 2x,\ x>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0,\ x<2\\ 1,\ x\geq 2\end{cases}$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(x+5)=2x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $f(0)$; b) Aflați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)=3$;

c) Pentru ce $x\in\mathbb{R},\ f(4)=-3$? d) determinați funcția f.

4. Fie $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2,\ g(x)=3x-1,\ h(x)=\frac{1}{2}x$.

a) Determinați $h\circ f\circ g$.

b) Calculați $(g\circ f\circ h)(1)$ și $(f\circ g\circ h)(0)$.

c) Găsiți o altă funcție $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f\circ g=p\circ h$, unde $p(x)=ax+b$.

5. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$ și $g:[a,b]\to\mathbb{R},\ g(x)=2x-1$. Să se determine a și b astfel încât:

a) să existe $f\circ g$; b) să existe $g\circ f$; c) $f\circ g=g\circ f$.

7.8 Test de evaluare 4

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x+3$ și $g(x)=-x^2+3x$. Atunci valoarea lui $(f\circ g)(-1)$

A 9; B 8; C 11; D 12; E 15.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-3, & pt.\ x\leq 0\\ 5x, & pt.\ x>0\end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases}x^2, & pt.\ x\leq -2\\ 2x-1, & x>-2\end{cases}$.
Atunci valoarea lui $(g\circ f)(1)$

A 10; B 8 ; C 12 ; D 9 E 15.

3. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$, atunci soluțiile ecuației $(f\circ f)(x)=f^2(x)$ sunt:

A $\{-2\}$; B $\{-2;0\}$ C $\{-1,1\}$; D $\varnothing$; E $\{-3,0\}$.

4. Imaginea funcției $f:[2,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+2, & x\in[-2,1]\\ 3x+1, & x\in(1,3]\end{cases}$ este mulțimea:

A $[-2;10]$ B $[-2;4]$; C $[2,10]$ D $[4,10]$ E $\mathbb{R}$

5. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisface relația $f(x)+3f(-x)=4(x^2+1),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Expresia analitică a funcției f este

A $f(x)=x^2+1$; B $f(x)=x+1$; C $f(x)=1-x^2$; D $f(x)=8(x^2+1)$; E $f(x)=-2(x^2+1)$.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n\ ori}(x)=5x+1,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ este:

A $f\left(-\frac{1}{4}\right)=1$; B $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$; C $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$; D $f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$; E $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{5}$.

8 Funcţia polinomială de gradul I

Definiția 15. *Se numește funcție de gradul I orice funcție reală de variabilă reală* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, *unde* a *și* b *sunt numere reale,*$a\neq 0$.

Proprietăți ale funcției polinomiale de gradul I

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}$, este:

a) strict crescătoare dacă $a>0$; b) strict descrescătoare dacă $a<0$; c) constantă dacă $a=0$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)=ax+b$	$+\infty\ \nearrow\ -\infty$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)=ax+b$	$+\infty\ \searrow\ -\infty$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)=b$	$b\ \to\to\ b$

2. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}^*$, nu este nici pară nici impară.

3. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}^*$ este impară

4. Semnul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}$ este semnul valorilor $f(x)=ax+b$ ale funcției și este dat de tabelul:

x	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{b}{a}$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)=ax+b$	semn contrar lui a $\quad$ 0 $\quad$ semnul lui a

5. Graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}$

a) Cazul $a=0$. Graficul funcției este o dreaptă paralelă cu axa Ox și trece prin punctul $A(0,b)$

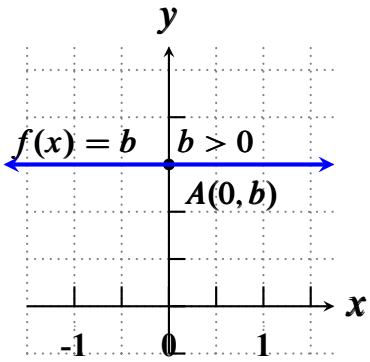


Fig. 92: $f(x)=b,\ b>0$.

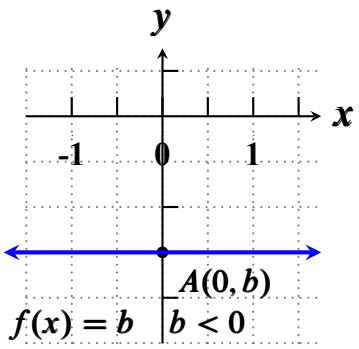


Fig. 93: $f(x)=b,\ b<0$.

b) Cazul $a\neq 0$.Graficul este dreapta de ecuație $y=ax+b$ ce trece prin punctele $A(-\frac{b}{a},0)$ și $B(0,b)$

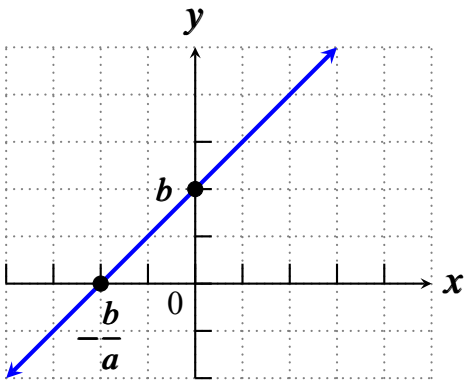


Fig. 94: $f(x)=ax+b,\ a>0,b>0$.

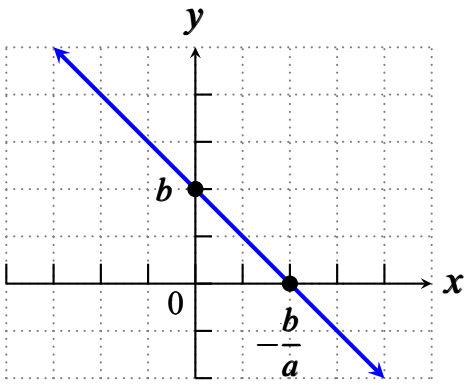


Fig. 95: $f(x)=ax+b,\ a<0,b>0$.

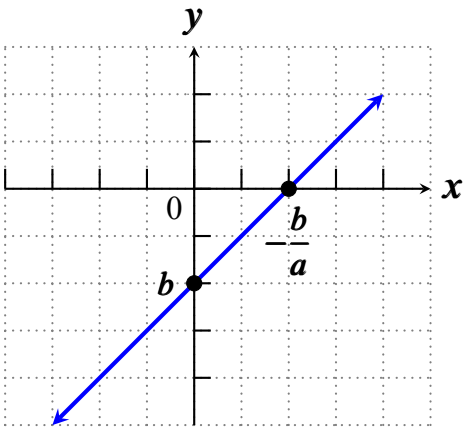


Fig. 96: $f(x) = ax + b,\ a > 0, b < 0.$

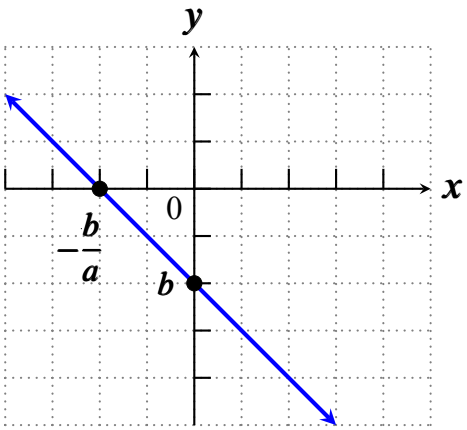


Fig. 97: $f(x) = ax + b,\ a < 0, b < 0.$

8.1 Reprezentarea grafică a funcției de gradul I

1. În sistemul ortogonal xOy trasați reprezentarea geometrică a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 4$ folosind punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.

2. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$. Determinați valorile parametrilor reali a și b știind că reprezentarea geometrică a graficului acestei funcții conține punctele $A(1, -1)$ și $B(-1, 5)$.

3. Pentru fiecare din funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 10$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x + 8$ și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 4x - 10$ să se precizeze:

a) trei puncte distincte ale graficului funcției;

b) intersecția graficului funcției cu axa Oy;

c) intersecția graficului funcției cu axa Ox;

d) monotonia funcției.

4. Pentru fiecare din funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 10$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x - 8$ și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -4x + 10$ să se precizeze:

a) trei puncte distincte ale graficului funcției;

b) intersecția graficului funcției cu axa Oy;

c) intersecția graficului funcției cu axa Ox;

d) monotonia funcției.

5. Reprezentați grafic următoarele funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilind intersecția cu axele de coordonate:

a) $f(x) = 3x$;
b) $f(x) = -3x$;
c) $f(x) = 3x - 6$;
d) $f(x) = -3x + 6$;
e) $f(x) = 0,5x - 1$;
f) $f(x) = 2x + 0,5$.

6. Aflați valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele A aparțin graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = -2x + 3,\ A(m; 2)$;
b) $f(x) = 3x + m,\ A(m; m + 3)$;
c) $f(x) = 2x - 3m,\ A(2m; 3)$;
d) $f(x) = \frac{m}{2}x - 1,\ A(\frac{5}{2}; m)$

7. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x + 9$;
b) $f(x) = -2x + 6$;
c) $f(x) = -3x - 9$;
d) $f(x) = 4x - 2$;

8. Să se determine funcția de gradul I, al cărui grafic trece prin punctele:

a) $A(1; 1)$ și $B(-2; -5)$;
b) $O(0; 0)$ și $A(1, 2)$;
c) $C(1; -2)$ și $D(-2; 1)$;
d) $M(-1, -1)$ și $N(2; 3)$.

9. Graficul unei funcții de gradul I este dreapta d de ecuație $y = 3x + 4$.

a) Să se precizeze care din punctele $(-1, 1), (2, 9), (1, 7)$ aparțin dreptei.
b) Să se găsească punctul de pe dreaptă de abscisă 3;
c) Să se găsească punctul dreptei de ordonată 7.

10. Graficele funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, intersectează axele Ox și Oy în punctul A, respectiv B. Determinați funcțiile f în următoarele cazuri:

a) $A(-2, 0)$ și $B(0, 2)$;
b) $A(4, 0)$ și $B(0, -2)$;
c) $A(-\sqrt{2}, 0)$ și $B(0, -\sqrt{3})$;
d) $A(\sqrt{5}, 0)$ și $B(0, -\sqrt{5})$

11. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ știind că graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 1 \\ cx + d & x > 1 \end{cases}$ conține punctele $A(-2; 7), B(0; 3); C(2; 3)$ și $D(3; 5)$.

12. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ știind că graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 1 \\ cx + d & x > 1 \end{cases}$ conține punctele $A(-1; -5), B(0; 3)$ și $C(\sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.

13. Din mulțimea dreptelor paralele $y = -2x + m,\ m \in \mathbb{R}$ să se găsească:

a) dreapta ce trece prin punctul $A(1, 1)$;
b) dreapta ce trece prin origine;
c) dreapta ce intersectează axa Oy în $B(0, -2)$;
d) dreapta ce intersectează axa Ox în $C(4, 0)$;

14. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + 5,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Să se precizeze un punct fix al graficului;

b) Să se determine a astfel încât graficul funcției să conțină punctul $A(-1,6)$;

c) Să se determine a astfel încât graficul funcției să fie dreapta paralelă cu prima bisectoare;

d) Există a astfel încât graficul funcției să treacă prin origine ?

15. Se dau funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+6,\ g(x)=-3x+6$. Se cere:

a) Să se reprezinte grafic pe același sistem de axe de coordonate cele două funcții;

b) Să se determine aria domeniului plan determinat de graficele celor două funcții și axa absciselor.

16. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\dfrac{m+1}{m+2}x+m+1, m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$. Aflați parametrul real m, astfel încât aria triunghiului format de originea sistemului de axe ortogonale și intersecțiile graficului cu axele sistemului să fie 6.

17. Aflați funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică următoarele relații pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

a) $2f(2x+3)-f(x+2)=3x$

b) $(f\circ f)(x)-2f(x-1)=3x$

c) $f\circ f)(x)+(f\circ f)(x+1)=2x-3$

d) $f(x-1)f(x+1)-(f\circ f)(2x-1)=4x^2+4x$

8.2 Monotonia și semnul funcției de gradul I

18. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+4,\ x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1<x_2$. Precizați semnul raportului $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ și monotonia funcției.

19. Precizați monotonia și semnul funcțiilor $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ i\in\{1,2,3,4\}$:

a) $f_1(x)=3x-9$;

b) $f_2(x)=4x+2$;

c) $f_3(x)=-2x-8$;

d) $f_4(x)=8-2x$.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=mx$. Să se determine valorile lui $m\in\mathbb{R}$, în fiecare din situațiile:

a) f strict crescătoare; b) $f\circ f=f$; c) $f\circ f\circ f=f$.

21. Se dă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2024x+4048$. Să se determine semnele numerelor:

a) $f(0)$;

b) $f(3)$;

c) $f(-1)\cdot f(-2)$;

d) $f(-2,25)\cdot f(3,75)\cdot f(100)$

Indicație: Funcția se anulează în $x=2$ și este strict crescătoare, deci $f(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,2)$ și $f(x)>0$ pentru $x\in(2,+\infty)$

22. Fie x un număr real. Să se precizeze semnul fiecăruia dintre produsele:

a) $P_1 = (2x+4)(-3x+6)$;
b) $P_2 = (-3x+9)(-2x-4)$;
c) $P_3 = (-4+x)(9-x)$;
d) $P_4 = (5x+10)(x-2)(-3x+12)$.

23. Fie x un număr real diferit de 2. Să se precizeze semnul fiecăruia dintre câturile:

a) $\dfrac{2x+8}{-3x+6}$; b) $\dfrac{-2x+8}{2-x}$; c) $\dfrac{9-3x}{5x-10}$; d) $\dfrac{-x-4}{-3x+6}$.

24. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R} \setminus 2$ funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{m+3}{m-2}x + 2m + 1$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

8.2.1 Inecuații de gradul I cu o necunoscută

25. Utilizând semnul funcției de gradul întâi, rezolvați inecuațiile:

a) $x \in \mathbb{R}$, $5x - 11 < 0$;
b) $x \in \mathbb{R}$, $3 - 2x > 0$;
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $\dfrac{3}{2x-8} > 0$.
d) $x \in (-2, 5)$, $5x + 4 \leq 0$;
e) $x \in \mathbb{R}$, $6x + 12 < 2(5x - 4)$;
f) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}$;
g) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x-3}{2} + \dfrac{x-2}{3} \geq 0$;
h) $x \in (-1, 1)$, $\dfrac{1-2x}{4} + \dfrac{3x-4}{3} < x - 1$;

26. Utilizând semnul funcției de gradul întâi, rezolvați inecuațiile:

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $\dfrac{2x+5}{x-4} \leq 0$;
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $\dfrac{2}{3x-3} + \dfrac{1}{2-x} \geq 0$;
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $\dfrac{2x(2x-5)-27}{2x+1} - 2x < 1$.

27. Să se rezolve inecuațiile:

a) $2x(2x-5) - 27 < (2x+1)^2$
b) $\dfrac{5x}{7} - \dfrac{13}{21} + \dfrac{x}{15} < \dfrac{9}{25} - \dfrac{2x}{35}$;
c) $\dfrac{x-1}{4} - \left[\dfrac{x+2}{3} - \left(\dfrac{5-x}{12} + 1\right) - 3\right] \leq 1$;
d) $3\left\{x - \dfrac{3x-1}{4} - \left[1 - 2\left(x - \dfrac{x+3}{5}\right)\right]\right\} > 5x - 2$;
e) $3\left(\dfrac{2x}{5} - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{4}{3}\left(x - \dfrac{3x-1}{6}\right) \geq \dfrac{5}{18}(x+3)$;

28. Să se determine mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{x+4}{x-5} \leq 0\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{x+4}{x-5} \leq 0\right\}$

8.2.2 Sisteme de inecuații

29. Utilizând semnul funcției de gradul întâi, rezolvați următoarele sisteme de inecuații:

a) $\begin{cases} 2x-3 \le 0 \\ 3x-2 \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+10 \ge 0 \\ -3x+9 \ge 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-2 \ge 2x-5 \\ 4x-3 \le 3x+2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x-5 \le \dfrac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3) < 5x-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

30. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 7x-14 \ge 0 \\ -6x+18 \ge 0 \\ 3x-8 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} \ge 0 \\ 2x+8 \ge 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5x-10} < 0 \\ \dfrac{x-1}{3-x} \ge 0 \end{cases}$

31. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 7x-19 \ge 0 \\ -6x+18 \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < x+3 \\ \dfrac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 45x-6 > 6x+7 \\ 4x-16 < 3x-12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7} \ge 4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x+25 \end{cases}$

32. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-6}{2x+1} > 0 \\ \dfrac{-x+8}{3x-7} \le 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(4-x)}{(x+3)(2-x)} \ge 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1} < 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} \ge 2 \\ x-2 > 2(x-5) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{(2x-1)(7x-14)}{(x+1)(x+2)} \ge 0 \\ x-2 > 2(x-5) \end{cases}$

33. Aflați valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care:

a) $\dfrac{2x+3}{4} \in \left(\dfrac{x-2}{3}, \dfrac{6x-5}{5}\right]$;

b) $\dfrac{2}{x-3} \in \left[\dfrac{5}{x-4}, \dfrac{3}{x-1}\right)$;

c) $\dfrac{2x-5}{x-2} \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{x-2}\right)$;

d) $\dfrac{3x-5}{x-2} \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3x-1}{x+2}\right]$

8.3 Aplicații diverse

34. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f:[-2,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=8-2x$;
b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=5x-10$;
c) $f:\{1,2,5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-6$;
d) $f:[0,3]\cup(4,6)\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+3$.

35. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică inegalitățile:
$f(x+1)\le x\le 1+f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

36. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(x+2)=3x-6+4f(3),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

37. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+3, & x\in\mathbb{Q}\\ -x+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. Să se afle $(f\circ f)(x)$.

38. Fie $f:[2,8]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-2|+|x-4|-|2x-6|$. Să se determine suma dintre cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției.

39. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x-4, & x\le -1\\ 3x+4, & x>-1\end{cases}$. Să se afle imaginea funcției f.

40. Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}ax-9y=3\\ x-ay=1\end{cases}$
a) are o singură soluție; b) are o infinitate de soluții; c) nu are soluții ?

41. Determinați $a\in\mathbb{R}$, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(a^2-1)x+4$ este constantă.

42. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații (discuție după parametrul real m):
a) $\begin{cases}mx-8y=6\\ 2x-my=-3\end{cases}$; b) $\begin{cases}2x+my=1\\ mx+2y=1\end{cases}$; c) $\begin{cases}x+2y=3\\ ax+6y=9\end{cases}$

43. Se dă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+4, & \text{pt. } x\in[-4,0)\\ 4, & \text{pt. } x\in(0,2)\\ -x+6 & \text{pt. } x\in[2,6]\end{cases}$
a) Să se reprezinte grafic funcția;
b) Să se determine aria domeniului plan determinat de graficul funcției și axa Ox.

44. Se dă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+6, & \text{pt. } x\in[-6,-1)\\ 5, & \text{pt. } x\in[-1,1)\\ -x+6 & \text{pt. } x\in[1,6]\end{cases}$
a) Să se reprezinte grafic funcția;
b) Să se determine aria domeniului plan determinat de graficul funcției și axa Ox.

45. Se dă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}x+5, & \text{pt. } x\in[-4,0)\\ 5, & \text{pt. } x\in(0,2)\\ -\frac{5}{2}x+10 & \text{pt. } x\in[2,4]\end{cases}$
a) Să se reprezinte grafic funcția;
b) Să se determine aria domeniului plan determinat de graficul funcției și axa Ox.

46. Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x-4, & \text{pt. } x \leq 2 \\ -x+5 & \text{pt. } x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-5, & \text{pt. } x \leq 3 \\ 2x-8 & \text{pt. } x > 3 \end{cases}$$

a) Să se reprezinte grafic cele două funcții;

b) Să se calculeze $f \circ g$ și $g \circ f$.

47. Determinați parametrul real a pentru care funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 6$, $g(x) = x + (6a - 2)$ să verifice relația $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

48. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea:
$2f(x) + f(1-x) = 2x + 11$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (1)

a) Să se determine funcția de gradul I, cu proprietatea (1);

b) Să se arate că singura funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică proprietatea (1) este funcția determinată la punctul a)

49. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, cu proprietatea $4f(x) + 3f(-x) = 5x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

50. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de gradul I, cu proprietatea $(f \circ f)(x) = 4x + 6$.

51. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x + b, b \in \mathbb{R}$. Să se determine b știind că $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

52. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{pt.} x \leq 1 \\ 3-x, & \text{pt.} x > 1. \end{cases}$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $2f(x+4) + 3f(5-x) = 7$.

53. Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ să aibă loc egalitatea

$$2f(x) + f(-x) = \begin{cases} -x-3, & \text{pt. } x \leq 1 \\ x+3, & \text{pt. } x > 1 \end{cases}.$$

54. Determinați funcția $f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface condiția:

$$3f(x) + 2f(-x) = \begin{cases} -5x+4, & \text{pt. } x \in (-\infty, 3] \\ 4x-1, & \text{pt. } x \in (3, \infty) \end{cases}.$$

(Ștefan Alexe)

55. Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ să aibă loc egalitatea

$$f(x) + 3f(-x) = \begin{cases} -x-5, & \text{pt. } x \leq 1 \\ x+4, & \text{pt. } x > 1 \end{cases}.$$

56. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$mf(x) + nf(-x) = \begin{cases} x+4, & \text{pt. } x \leq 1 \\ -x-5, & \text{pt. } x > 1 \end{cases}$$

a) Să se determine m și n știind că $f(-2) = -5$ și $f(2) = 4$

b) Pentru $m = 2$ și $n = 3$ să se determine funcția f.

57. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases} mx+3m+2, & \text{pt. } x\le 1\\ -2x+3, & \text{pt. } x>1\end{cases}$

Pentru ce valori ale parametrului real m funcția este strict monotonă pe $\mathbb{R}$?

Soluție : Pentru $x\in(1.\infty)$ funcția este strict descrescătoare. Pentru a fi descrescătoare pe $(-\infty,1)$ este necesar ca $m<0$. Pentru a fi descrescătoare pe $\mathbb{R}$ mai este necesar ca $f_1(1)\ge f_2(1)$ unde $f_1(x)=mx-m+2$ și $f_2(x)=-2x+3$. Rezultă $\begin{cases} m<0\\ 4m+2\ge 1\end{cases}\Rightarrow m\in\left[-\frac{1}{4},0\right)$

58. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & \text{pt. } x\le 1\\ mx+m-3, & \text{pt. } x>1\end{cases}$

a) Pentru ce valori ale parametrului real m funcția este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.?

b) Pentru ce valori ale lui m graficul funcției este o dreaptă ?

59. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{5m-2}{2}x-3m, & x\le 1\\ (3-m)x-\frac{3m-2}{2} & x>1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția este strict crescătoare.

60. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcție astfel încât $(f\circ f)(x)=9x+1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

a) Dați exemple de două asemenea funcții nemonotone pe nici un interval $I\subset\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuația $f(9f(x)+1)=91$.

61. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, unde $f(x)$ reprezintă distanța de la $x\in\mathbb{R}$ la cel mai apropiat punct al intervalului [1,2]. Să se reprezinte grafic funcția $f\circ f$.

Soluție:
Avem:

$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{pt. } x<1\\ 0, & \text{pt. } x\in[1,2]\\ x-2, & \text{pt. } x>2\end{cases}$ al cărui grafic este în figura 102:

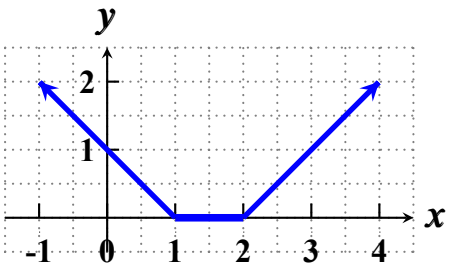


Fig. 102: *Problema* 61

$(f\circ f)(x)=\begin{cases} 1-f(x), & \text{pt. } f(x)<1\\ 0, & \text{pt. } f(x)\in[1,2]\\ f(x)-2, & \text{pt. } f(x)>2\end{cases}$ și ținând cont de grafic rezultă:

$(f\circ f)(x)=\begin{cases} 1-f(x), & \text{pt. } x\in(0,3)\\ 0, & \text{pt. } x\in[-1,0]\cup[3,4]\\ f(x)-2, & \text{pt. } x\in(-\infty,-1)\cup(4,\infty)\end{cases}$ adică

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}1-(1-x), & \text{pt. } x\in(0,1)\\ 1, & \text{pt. } x\in[1,2]\\ 1-(x-2), & \text{pt. } x\in(2,3)\\ 0, & \text{pt. } x\in[-1,0]\cup[3,4]\\ 1-x-2, & \text{pt. } x\in(-\infty,-1)\\ x-2-2, & \text{pt. } x\in(4,\infty)\end{cases}$$ sau

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{pt. } x\in(-\infty,-1)\\ 0, & \text{pt. } x\in[-1,0]\cup[3,4]\\ x, & \text{pt. } x\in(0,1)\\ 1, & \text{pt. } x\in[1,2]\\ 3-x, & \text{pt. } x\in(2,3)\\ x-4, & \text{pt. } x\in(4,\infty)\end{cases}$$

al cărui grafic este :

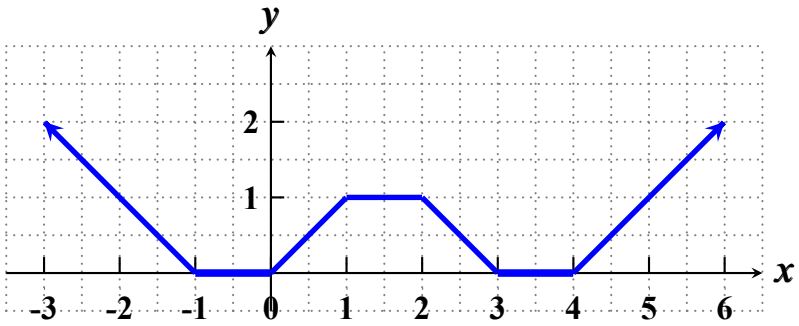


Fig. 103: *Graficul funcției* $f\circ f$

62. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+5, & \text{pt. } x\in(2,\infty)\\ ax+1, & \text{pt. } x\in[1,2]\\ 2x+1, & \text{pt. } x\in(-\infty,1)\end{cases}$.

Să se determine mulțimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

63. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+5, & x\in(-\infty,-1)\\ ax+1, & x\in[-1,2]\\ -2x+1, & x\in(2,\infty)\end{cases}$.

Să se determine mulțimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

64. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{pt. } x\le -1\\ ax+b, & \text{pt. } x\in(-1,1)\\ 2x+1 & \text{pt. } x\ge 1\end{cases}$

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția f să fie strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

65. Fie $f(x)=\begin{cases}x+a, & \text{pt. } x\le -1\\ ax+b, & \text{pt. } x>-1\end{cases}$. Să se afle $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $(b,a+1)\in G_f$, și f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

66. Fie $f(x)=\begin{cases} x+a, & \text{pt. } x\le -1 \\ ax+3, & \text{pt. } x>-1 \end{cases}$. Să se afle $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

67. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $g(x)=bx+a$. Arătați că există o infinitate de numere întregi distincte a și b astfel încât $f\circ g=g\circ f$.

68. Aflați mulțimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<1 \\ a-1, & x=1 \\ 5-4x, & x>1 \end{cases}$ admite maxim în punctul de abscisă $x=1$.

69. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\le 1 \\ 4-x, & x>1 \end{cases}$. Să se determine valorile lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care $2f(x+5)+3f(4-x)+5=0$.

70. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & x\le 0 \\ 7-x, & x>0 \end{cases}$. Să se afle $x\in\mathbb{R}$, pentru care $2f(x+4)-3f(3-x)=-11$.

71. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2-3m)x+4m$, $g(x)=(2m-8)x+2+3m$, $m\in\mathbb{R}$

a) Să se determine m astfel încât $f=g$.

b) Să se determine m astfel încât graficul funcției f să fie paralel cu axa Ox.

c) Să se determine m astfel încât punctul $A\left(\frac{1}{5},-3\right)$ să fie punctul de intersecție al graficelor celor două funcții.

d) Să se determine m astfel încât funcția g să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

9 Teste de evaluare

9.1 Test 1

1. Fie funcțiile $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = x - 2$ și $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, g(x) = 2x - 5$. Să se determine soluția reală a ecuației $2f(x) + 3g(x) = 11$.

A $x = 1$; B $x = -2$; C $x = -1$; D $x = 2$; E $x = 3$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7 - 4x$. Soluțiile inecuației f(x)+1>4x sunt:

A $x \in (-\infty, -1)$; B $x \in (-\infty, 2)$; C $x \in (2, +\infty)$; D $x \in [2, +\infty)$; E $x \in \varnothing$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Să se determine punctul care aparține graficului funcției f și are abscisa egală cu ordonata.

A $A(-1; -1)$ B $A(1; 1)$; C $A(2; 2)$; D $A(-2, -2)$; E $A(0; 0)$

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x = ax + b)$. Să se determine numerele reale a şi b știind că $3f(x) + 3x - 5 = -3x + 4$, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.

A $a = 2; b = 3$; B $a = -1, b = 2$; C $a = 3, b = 2$; D $a = 2, b = -3$; E $a = -2, b = 3$.

5. Fie funcțiile $f; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x - 6$ și $g(x) = -2x - 2$: Coordonatele punctului în care graficele celor două funcții se intersectează sunt:

A $x = 4, y = 6$; B $x = 4, y = -4$; C $x = 3, y = 9$; D $2 = 2, y = -3$ E $x = -4, y = 6$;

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ 2x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$. Soluția inecuației $(f \circ f)(x) < 0$ este :

A $-4 < x < -3$; B $-3 \leq x < -1$; C $x > -4$; D $x < -4$ E $x \in \varnothing$.

7. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gradul întâi cu proprietatea $f(x) + f(x - 1) = 4x + 6$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $k = 4f\left(\frac{1}{2}\right)$. Valoarea lui k este:

A $k = 10$; B $k = 20$ C $k = 15$; D $k = 25$; E $k = 5$.

8. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 5$. Funcția de gradul întâi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) = 4x + 7$ este:

A $g(x) = -x - 1$ B $g(x) = -2x - 1$ C $g(x) = 2x - 1$; D $g(x) = 2x + 1$; E $g(x) = -2x + 1$.

9. Mulțimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ a - 1 & x = 1 \\ 5 - 4x, & x > 1 \end{cases}$ are un punct de maxim în $x = 1$ este:

A $[1, +\infty)$; B $(-\infty, 2]$ C $(2, +\infty)$; D $[0, +\infty)$; E nu există.

9.2 Test 2

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația: $\dfrac{2x-1}{x+1} \leq \dfrac{2x-3}{x-2}$

2. Se dă $f:[-6,4]\to[0,4]$, $f(x)=\begin{cases} x+6, & \text{pt. } x\in[-6,-2) \\ 4, & \text{pt. } x\in[-2,0] \\ -x+4, & \text{pt. } x\in(0,4] \end{cases}$

a) Să se reprezinte grafic funcția;

b) Să se determine aria domeniului plan limitat de graficul funcției f și axa Ox.

3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=\dfrac{1-m}{2-m}\cdot x+2$, $m\neq 2$

a) Precizați un punct fix al graficului funcției f_m;

b) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ graficul funcției conține punctul $A(-1,2)$?

c) Pentru ce valori ale lui m funcția este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$?

d) Determinați mulțimea $A=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,f(m)\in\mathbb{Z}\}$

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-a^2, & \text{pt. } x<1 \\ ax+b, & \text{pt. } x\geq 1 \end{cases}$

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ știind că funcția este crescătoare pe $(1,\infty)$ iar punctele $A(-1,-5)$ și $B(1,-3)$ sunt situate pe graficul funcției.

b) Pentru $a=2$ și $b=-5$ să se reprezinte grafic funcția și să i se precizeze semnul.

9.3 Test 3

1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$

a) Arătați că $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2, \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

b) Arătați că $\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ecuația $f(x)=y$ are cel puțin o soluție.

c) Studiați semnul funcției f.

2. Se dau funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite astfel:

$f(x)=\begin{cases} -3x+2, & \text{pt. } x\in(-\infty,2) \\ x-1, & \text{pt. } x\in[2,\infty) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x+3, & \text{pt. } x\in(-\infty,0) \\ 2x-4, & \text{pt. } x\in[0,\infty) \end{cases}$

a) Să se reprezinte grafic funcția f;

b) Să se precizeze monotonia funcției f;

c) Să se precizeze punctele de intersecție cu axele de coordonate şi semnul funcției f;

d) Să se afle Imf;

e) Să se calculeze $(f\circ g)(x)$.

3. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietățile:

i) $f(g(x))=x^2-3x+4$

ii) $g(f(2))=2$

Calculați $f(2)$ şi $g(2)$.

4. Aflați funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a cărei reprezentare grafică este in Figura 107.

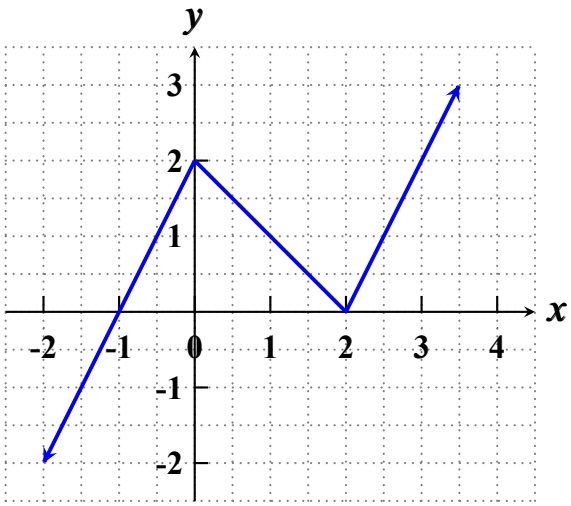


Fig. 107: *Problema 4*

10 Funcţia de gradul al II-lea

Definiția 16. *Se numește funcție de gradul al doilea orice funcție reală de variabilă reală* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, *unde* a , b *și* c *sunt numere reale,* $a\neq 0$.

Forma canonică a unei funcții de gradul al doilea este
$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}$, unde $\Delta=b^2-4ac$.

1. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărui grafic trece prin punctele:

a) $A(1,0);\ B(-1,6);\ C(2,6);$
b) $A(1,2);\ B(-1,6);C(2,3);$
c) $A(0,4);\ B(-1,1);\ C(2,4)$
d) $A(1,-1);\ B(0,2);\ C(2,0).$

2. Să se pună sub formă canonică următoarele funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x^2+x+8;$
b) $f(x)=3x^2-2x+1;$
c) $f(x)=-x^2+4x+5;$
d) $f(x)=x^2+4x+4;$
e) $f(x)=-x^2+3x;$
f) $f(x)=-x^2-5x+6.$
g) $f(x)=5x^2-\dfrac{1}{2}x+3$
h) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^2-6x+2$
i) $f(x)=-0,7x^2+x+0,4$
j) $f(x)=-x^2+0,5x+1$

10.1 Ecuația de gradul II

Ecuația atașată funcției de gradul al doilea este ecuația: $x\in\mathbb{R}$,
$ax^2+bx+c=0$, unde a,b și c reali, $a\neq 0$

Dacă $\Delta<0$, ecuația nu are rădăcini reale.

Dacă $\Delta=0$, ecuația are o rădăcină dublă $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Dacă $\Delta>0$, ecuația are două rădăcini reale diferite $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Relații între rădăcini și coeficienții ecuației de gradul al doilea (relațiile lui Viète):

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2+7x=0;$
b) $4x^2+4x+1=0;$
c) $6x^2-5x+2=0;$
d) $-2x^2+3x-1=0;$
e) $x^2-9=0;$
f) $4x^2-x-3=0;$
g) $-2x^2+x+1=0;$
h) $-3x^2+4x+5=0;$
i) $7x^2+20x=-10;$
j) $0,5x^2-x-1=0;$
k) $x^2-0,5x+2=0;$
l) $10x^2+7x+1=0.$

4. Să se precizeze numărul soluțiilor reale ale fiecăreia dintre ecuațiile:

a) $x^2 - x - 2 = 0$;
b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
c) $3x^2 - 5x + 1 = 0$;
d) $x^2 - 13x + 36 = 0$;
e) $2x^2 + 5x - 14 = 0$;
f) $-3x^2 + 2x - 4 = 0$.

5. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $\dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{x+2}{2x} = 2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$;
b) $\dfrac{x+8}{x-8} - \dfrac{24}{x-4} = 2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{4; 8\}$;
c) $\dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{x+2}{x-2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$;
d) $\dfrac{x+11}{x^2-1} - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2(x+7)}{x+1} - 4,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$;
e) $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{7}{6}$.

6. Să se determine rădăcinile reale ale ecuațiilor :

a) $x^2 - \Delta x + 5 = 0$;
b) $x^2 + 4x + 2\Delta = 0$;
c) $x^2 - \Delta x + S = 0$;
d) $\Delta x^2 - Px + S = 0$;
e) $x^2 - Px + \Delta = 0$;
f) $x^2 + Px + S + 1 = 0$.

unde Δ, S, P sunt discriminantul, suma și produsul rădăcinilor

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x-3)(x^2 - 6x + 8) = 0$;
b) $(2-x)(3 - x - 2x^2) = 0$;
c) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 5x + 6) = 0$;
d) $(4x^2 + 3x + 2)(-x^2 + 6x - 8) = 0$.

10.1.1 Ecuații reductibile la cele de gradul II.

8. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
b) $x^4 + x^2 - 2 = 0$;
c) $3x^4 + 5x^2 + 1 = 0$;
d) $17x^4 - 22x^2 + 5 = 0$.
e) $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$.
f) $3x^6 + 2x^3 - 208 = 0$.

9. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $(x^2 - 2x - 2)^2 - 3(x^2 - 2x - 2) + 2 = 0$;
b) $x^4 - x^2 + 4x - 4 = 0$;
c) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$;
d) $(x^2 - 3x)^2 + (x^2 - 3x) - 2 = 0$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $(x+3)(x-1)(x+2)(x+6)=-20$;
b) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$;
c) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$;
d) $(x-2)(x-1)(x+7)(x+8)=-8$;
e) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.

Exemplu rezolvat: Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=-15$.

Avem $(x-1)(x-7)(x-3)(x-5)=-15 \Leftrightarrow (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)=-15$. Notând $x^2-8x+7=y \Rightarrow y(y+8)=-15 \iff y^2+8y+15=0$ cu soluțiile $y_1=-3, y_2=-5$. Apoi $x^2-8x+7=-3 \Rightarrow x_1=4+\sqrt{6}, x_2=4-\sqrt{6}$ și $x^2-8x+7=-5 \Rightarrow x_3=2, x_4=6$.

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $2x^3+4x^2+3x+6=0$
b) $x^3-5x^2-2x+10=0$
c) $x^3-x^2+2x-2=0$
d) $x^3+9x^2+3x+27=0$
e) $-3x^3+15x^2-2x+10=0$
f) $6x^3-4x^2-3x+2=0$

12. Să se rezolve în $\mathbb{R}$, ecuațiile cu necunoscuta x :

a) $x^4-x^2+2mx-m^2=0,\ m\in\mathbb{R}$;
b) $x^4-4x^3+(2m+3)x^2-4mx+m^2=0,\ m\in\mathbb{R}$;
c) $x^4+x^3-2x^2+3mx-m^2=0,\ m\in\mathbb{R}$;
d) $x^4-4x^3+(2m+3)x^2-4mx+m^2=0,\ m\in\mathbb{R}$.

Indicație: Se rezolvă mai întâi ecuația în raport cu necunoscuta m. Ex. b) Ordonăm ecuația după m și obținem: $m^2+m(2x^2-4x)+x^4-4x^3+3x^2=0$ și cum $\Delta=(2x^2-4x)^2-4(x^4-4x^3+3x^2)=4x^2$ rezultă $m_1=-x^2+x$ și $m_2=-x^2+3x$ și ecuația inițială devine $(x^2-x+m)(x^2-3x+m)=0$.

10.1.2 Ecuații cu rădăcini comune

13. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele perechi de ecuații să aibă o rădăcină comună. Pentru m determinat să se indice rădăcina comună.

a) $x^2-mx+3m=0$; $x^2-(m-2)x+m=0$.
b) $x^2+mx+m+2=0$; $mx^2+(m^2-m+1)x+2m+1=0$.
c) $x^2-(m+5)x+2m+2=0$; $x^2-(m+6)x+3m+1=0$.
d) $x^2-(m+2)x+m+1=0$; $x^2-(4m+5)x+2m+4=0$.
e) $(m+1)x^2-mx-m=0$; $(m+1)x^2-(m+2)x+m=0, m\neq -1$.
f) $mx^2-(m+2)x+2=0$; $mx^2-(m+3)x+m+3=0, m\in\mathbb{R}$.

Exemplu rezolvat: b) Fie α rădăcina comună $\Rightarrow \alpha^2+m\alpha+m+2=0$; $m\alpha^2+(m^2-m+1)\alpha+2m+1=0$. Înmulțind prima ecuație cu $-m$ și adunându-le rezultă $(1-m)\alpha+1-m^2=0$ (1). Pentru $m=1$ ecuația (1) este nedeterminată și cele două ecuații sunt echivalente. Pentru $m\neq 1 \Rightarrow \alpha=-m-1$. Punând acum condiția ca α să verifice una din cele două ecuații

(de exemplu prima) rezultă $(-m-1)^2+m(-m-1)+m+2=0 \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$ și rădăcina comună $\alpha=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.

14. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele perechi de ecuații să admită aceleași rădăcini (nu neapărat reale):

a) $x^2+(2-m)x+m=0$; $\quad x^2+mx+2-m=0$.

b) $(m+5)x^2+4(4n-1)x+4=0$; $\quad (n+1)x^2+m(n-1)x+1=0$.

c) $x^2+nx+n+2=0$; $\quad nx^2+(n^2-n+1)x+2n+1=0$.

d) $(2m-1)x^2+(5+m+n)x+3=0$; $2(n+3)x^2+(2m-n+4)x+6=0$

e) $x^2-mx-m-1=0$; $\quad 2x^2-4nx+n-12=0$.

Indicație: Două ecuații polinomiale de același grad admit aceleași rădăcini dacă coeficienții corespunzători sunt proporționali.

10.1.3 Relații între rădăcini și coeficienți

Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $ax^2+bx+c=0$, între rădăcini și coeficienți există relațiile $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$ numite și relațiile lui Viète.

15. Pentru fiecare din ecuațiile următoare, fără a le rezolva, să se calculeze:
x_1+x_2; x_1x_2; $x_1^2+x_2^2$; $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; $x_1^3+x_2^3$.

a) $3x^2+2x-4=0$; $\quad$ c) $4x^2+7x=0$; $\quad$ e) $2x^2+9x+2=0$;

b) $x^2-3x-5=0$; $\quad$ d) $2x^2-x-2004=0$; $\quad$ f) $x^2-6x+1=0$.

Indicație. Notăm $x_1+x_2=S$; $x_1\cdot x_2=P \Rightarrow x_1^2+x_2^2=S^2-2P$; $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{S}{P}$ și $x_1^3+x_2^3=S(S^2-3P)$.

16. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2+x-13=0$.

a) Calculați $\frac{x_1}{x_2^2+x_2-12}+\frac{x_2}{x_1^2+x_1-12}$;

b) Calculați $\frac{x_1}{x_2^2+2x_2-13}+\frac{x_2}{x_1^2+2x_1-13}$;

c) Arătați că $S_n=x_1^n+x_2^n\in\mathbb{Z}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

17. Se dă ecuația $x^2-7x+3=0$. Să se calculeze valorile expresiilor următoare:

a) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$;

b) $\frac{x_1+2}{x_2+2}+\frac{x_2+2}{x_1+2}$;

c) $\frac{x_1+2x_2}{x_2+2x_1}+\frac{x_2+2x_1}{x_1+2x_2}$;

d) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$;

e) x_1-x_2;

f) $x_1^3-x_2^3$;

g) $\frac{x_1^2-3x_1+4}{x_2^2-3x_2+4}+\frac{x_2^2-3x_2+4}{x_1^2-3x_1+4}$

18. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, astfel încât $b^2 > 4ac$. Notăm x_1 și x_2 soluțiile ecuației $ax^2+bx+c = 0$. Arătați că $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 + 3$ dacă și numai dacă b, a, c sunt în progresie geometrică.

19. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - x + m = 0$ să verifice relația:

a) $x_1 = 2x_2$; c) $2x_1 + 3x_2 = 0$; e) $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$;
b) $x_1 = -3x_2$; d) $3x_1 + 2x_2 = 5$; f) $2(x_1 + x_2) = -x_1x_2$.

20. Se consideră funcția de gradul al doilea: $f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - (m + 9)x + 7m - 1$, $m \in \mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui m avem $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$?

a) $\{5, 6\}$; b) $\{6, 11\}$; c) $\{5, 7\}$; d) $\{7, 11\}$.

21. Să se determine pentru fiecare ecuație o relație între rădăcini independentă de parametrul real m.

a) $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$; d) $x^2 + (m^2 + m + 1)x + m = 0$;
b) $mx^2 - (m-4)x + 3m - 11 = 0$; e) $mx^2 + (m + 2)x + 2m + 1 = 0$;
c) $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$; f) $x^2 + (2m + 3)x + m^2 = 0$.

Exemplu rezolvat: a) Avem $\begin{cases} x_1 + x_2 = S = \dfrac{2m}{m-2} \\ x_1x_2 = P = \dfrac{2m-3}{m-2} \end{cases}$. Eliminând parametrul m între cele două relații (de exemplu din prima relație exprimăm parametrul m în funcție de $S, m = \dfrac{2S}{S-2}$ și îl introducem în relația a doua) obținem $4P - S - 6 = 0 \Leftrightarrow 4x_1x_2 - x_1 - x_2 - 6 = 0$.

22. Se dă ecuația: $2x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1 și x_2.

a) Să se arate că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4$;

b) Să se arate că rădăcinile reale ale ecuației aparțin intervalului $[-1, 3]$.

10.1.4 Rezolvarea sistemelor de forma $x + y = S; xy = P$

Cunoscând suma și produsul a două numere putem afla numerele, adică dacă $\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, *și dacă aceste numere există, atunci ele sunt soluțiile ecuației* $t^2 - St + P = 0$.

23. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 50 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$

Exemplu rezolvat: a) Avem $S = 15, P = 50$, deci ecuația în t asociată este $t^2 - 15t + 50 = 0$, care rezolvată conduce la $t_1 = 5, t_2 = 10$. Soluțiile sistemului sunt deci $\{(2, 3), (3, 2)\}$.

24. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemele:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=202 \\ xy=99 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+xy=47 \\ x^2+y^2=74 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=39 \\ x+y=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2y^2-x-y=31 \\ xy=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy+x+y=11 \\ xy-2(x^2+y^2)=-20 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$

Observație: În rezolvarea sistemelor de mai sus este utilă identitatea: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$, respectiv $x^3+y^3=S(S^2-3P)$

10.2 Maximul sau minimul funcției polinomiale de gradul al doilea

Dacă $a>0$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ are un minim, $-\frac{\Delta}{4a}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Dacă $a<0$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ are un maxim, $-\frac{\Delta}{4a}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

25. Să se stabilească minimul sau maximul următoarelor funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

a) $f(x)=-x^2-5x+3$;

b) $f(x)=x^2+5x-6$;

c) $f(x)=6x^2-7x+1$;

d) $f(x)=-5x^2+x$;

e) $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$

f) $f(x)=-0,2x^2+3x$

26. Să se precizeze punctul de extrem pentru următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+8x+6$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-2x-5$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+4x-4$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+6x+9$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+6x$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2-4x+6$.

27. Pentru ce valoare a lui $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(1-m)x^2+2x+m+2$ admite un maxim?

28. Pentru ce valoare a lui $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(1-m^2)x^2-2x+m+3$ admite un minim ?

29. Pentru ce valoare a lui $m\in\mathbb{R}^*$, maximul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2-x-2$ este -1 ?

30. Pentru ce valoare a lui $m\in\mathbb{R}$, minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx+3$ este 1 ?

31. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât parabola $y = x^2 + ax + b$ să își atingă extremul în :

a) $V(3,-1)$; b) $V(-2,4)$; c) $V(7,9)$.

32. Dacă (α, β) sunt coordonatele vârfurilor familiei de parabole $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1,\ m \in \mathbb{R}_+$, să se arate că $\alpha + \beta = 0$.

33. Să se determine funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ știind că valoarea maximă a funcției este 1 și trece prin $A(2,-8)$ și $B(-2,-24)$

34. Se consideră familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = 2x^2 - (2m+1)x + m - 1,\ m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că există o singură parabolă asociată familiei de funcții care are minimul egal cu -1.

b) Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $f_m(x) = 0$, aflați valoarea maximă a expresiei $E(m) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$.

10.3 Monotonia funcției de gradul al doilea

Cazul $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$-\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

35. Pentru următoarele funcții de gradul al doilea precizați punctul de extrem și intervalele de monotonie:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x - 3$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 6x - 9$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x + 4$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 6x$;
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 - 4x + 6$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 4x$.

10.4 Semnul funcției de gradul II.

1. Dacă $\Delta < 0,\ f(x)$ are același semn ca al lui a oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2+bx+c$	semnul lui a

2. Dacă $\Delta = 0$, pentru orice $x \neq -\frac{b}{2a}$, $f(x)$ are semnul lui a.

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\frac{b}{2a}$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2+bx+c$	semnul lui a $\quad 0 \quad$ semnul lui a

3. Dacă $\Delta > 0$, $f(x)$ are semn contrar lui a între rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, și același semn cu a pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$ $\qquad$ x_1 $\qquad$ x_2 $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2+bx+c$	semnul lui a $\quad 0 \quad$ $-$semnul lui a $\quad 0 \quad$ semnul lui a

36. Să se studieze semnele funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 1$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x - 1$;
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 25 - x^2$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

37. Să se rezolve inecuația $\dfrac{(x^2+6x+9)(2+x-x^2)}{(x^2-16)(-x^2+x-1)} \geq 0$.

Soluție : Se face tabelul de semne al expresiei $E(x) = \dfrac{(x^2+6x+9)(2+x-x^2)}{(x^2-16)(-x^2+x-1)}$.

x	$-\infty$		-4		-3		-1		2		4		$+\infty$
x^2+6x+9	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2+x-x^2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x^2-16	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$-x^2+x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$E(x)$	$+$	$+$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	$+$

Din tabel rezultă $x \in (-\infty, -4) \cup \{-3\} \cup [-1; 2] \cup (4, +\infty)$

38. Să se determine numerele reale x pentru care următoarele expresii sunt pozitive:

a) $E_1 = (4x-8)(x^2-6x+5)$; b) $E_2 = \dfrac{1-x^2}{x^2+x+6}$;

c) $E_3 = \dfrac{x+3}{x^2-3x+2} - 1 + \dfrac{1}{x-2}$; d) $E_4 = \dfrac{(2+x-x^2)(x^2+6x+9)}{x^2-16}$.

39. Să se rezolve inecuațiile:

a) $(x^2+2x-1)(2x^2+4x-1) < 0$;

b) $\dfrac{4(x+3)}{x^2+x-2} \geq \dfrac{-3(x+3)}{2x^2-3x-5}$;

c) $|x| + |x^2-1| > 3x$;

d) $|x^2-2x| \leq |x^2-3x+2|$;

e) $|x^2-2x| \geq 2|x^2-3x+2|$;

f) $|x^2-6x+8| < |x+2|$.

40. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, astfel încât ecuația $ax^2+bx+c=0$ nu are rădăcini reale. Dacă $a+b+c<0$, stabiliți semnul numerelor $a-b+c$ și c.

Soluție: $\Delta < 0 \Rightarrow f(x) = ax^2+bx+c$ are pe $\mathbb{R}$ același semn, și cum $a+b+c = f(1) < 0 \Rightarrow f(-1) < 0$ și $f(0) < 0$.

41. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $(2-3m)x^2 - 2mx + 1 - m = 0$

a) Să aibă rădăcini reale;

b) Să aibă rădăcini reale distincte;

c) Să aibă rădăcini egale;

d) Să aibă rădăcini reale distincte și de semne contrare.

42. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2+2mx+m^2+m=0$

a) Să aibă rădăcini reale; b) Să aibă rădăcini reale distincte;

c) Să aibă rădăcini egale; d) Să nu aibă rădăcini reale.

43. Să se discute natura rădăcinilor ecuației:

a) $x^2-mx+2m=0$;

b) $-2x^2+2mx-m-4=0$;

c) $mx^2+(m-1)x+m+1=0,\ m \in \mathbb{R}^*$;

d) $mx^2-(2m+7)x+m-1=0, m \in \mathbb{R}$.

Exemplu rezolvat: d) Pentru $m=0$ ecuația devine $-7x-1=0$ cu rădăcina reală $x=-\dfrac{1}{7}$. Pentru $m \neq 0$ ecuația este de gradul al doilea și $\Delta = (-2m-7)^2 - 4m(m-1) = 32m+49$. Pentru $m < -\dfrac{49}{32}$ ecuația nu are rădăcini reale. Pentru $m = -\dfrac{49}{32}$ ecuația are o rădăcină dublă, iar pentru $m > -\dfrac{49}{32}$ are două rădăcini reale și distincte.

44. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile reale ale ecuației $(m-3)x^2-2(m-2)x+m-1=0$ să aibă:

a) același semn;
b) semne contrare;
c) să fie ambele pozitive;
d) să fie ambele negative.

45. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuației $mx^2-(3m-2)x-m+4=0$ să aibă:

a) același semn;
b) semne contrare;
c) să fie ambele pozitive;
d) să fie ambele negative.

46. Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuațiilor:

a) $x^2-(m+2)x+m+1=0$;
b) $(m+1)x^2-(m+7)x+m=0,\ m\in\mathbb{R}$;
c) $(m+1)x^2-2(m+4)x+2m=0,\ m\in\mathbb{R}$;
d) $(m+3)x^2-2(m+3)+15=0, m\in\mathbb{R}$;
e) $(m-2)x^2-2mx+2m-3=0,\ m\in\mathbb{R}$;
f) $(2m-1)x^2+2(m+1)x-m-1=0, m\in\mathbb{R}$.

Exemplu rezolvat: e) Procedăm astfel:

1^0 Calculăm discriminantul ecuației $\Delta=-4m^2+28m-24$ și stabilim semnul lui

m	$-\infty$		1		6		$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$		

2^0 Calculăm produsul rădăcinilor $P=\dfrac{2m-3}{m-2}$ și stabilim semnul lui.

m	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
P	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$		

3^0 Calculăm suma rădăcinilor $S=\dfrac{2m}{m-2}$ și stabilim semnul ei

m	$-\infty$		0		2		∞
S	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$		

4^0 Reunim cele trei tabele în tabelul final de discuție:

m	Δ	P	S	Natura și semnele rădăcinilor
$(-\infty, 0)$	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$
$m = 0$	$-$	$+$	0	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$
$(0, 1)$	$-$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$
$m = 1$	0	$+$	$-$	$x_{1,2} \in \mathbb{R},\ x_1 = x_2 < 0$
$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$+$	$+$	$-$	$x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 < 0, x_2 < 0$
$m = \frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	$x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 = 0, x_2 < 0$
$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	$+$	$-$	$-$	$x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 < 0, x_2 > 0, \lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
$m = 2$	$+$	$\lvert$	$\lvert$	ecuația devine $-4x + 1 = 0$
$(2, 6)$	$+$	$+$	$+$	$x_{1,2} \in \mathbb{R},\ x_1 > 0, x_2 > 0$
$m = 6$	0	$+$	$+$	$x_{1,2} \in \mathbb{R},\ x_1 = x_2 > 0$
$(6, +\infty)$	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

47. Pentru ce valori reale ale parametrului m, funcția $f(x) = (m-3)x^2 + 4x + 2m - 4$ ia valori numerice negative pentru orice valoare reală a lui x ?

Soluție: Funcția are pe $\mathbb{R}$ același semn dacă $\Delta < 0$. În acest caz semnul funcției este semnul lui $m-3$. Deci $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4(m^2 - 5m + 4) < 0 \\ m - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty) \\ m \in (-\infty, 3) \end{cases} \Rightarrow m < 1.$

48. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) $(m+1)x^2 + (2m+1)x + 1 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

c) $(m+1)x^2 + (2m-1)x + m \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

d) $mx^2 - 2(m+1)x + 4m < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

e) $(m^2-1)x^2 - 2(m^2+2)x + m^2 - 4 \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

49. Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$, astfel încât:

$x^2 + y^2 + x + y + m > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluție 1. Avem $x^2 + x + y^2 + y + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta_x = 1 - 4(y^2 + y + m) = -4y^2 - 4y - 4m + 1 < 0 \forall,\ y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta_y = 16 - 16(-4m + 1) = 32 - 64m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$

Soluție 2. Avem $x^2 + y^2 + x + y + m = \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}_{ge0} - \frac{1}{2} + m > 0 \Rightarrow m - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$

$m > \frac{1}{2}.$

50. Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + m^2 + 4m + 1 > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) $4x^2 + 4my + 4x + 4y + 4m + 1 > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

c) $2(x^2 + y^2) + 2(mx + y) - 3m + 4 > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

51. Fie ecuația: $2x^2 - 2ax + a^2 - 4a + 7 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Se cere:

a) Pentru ce valori ale lui a ecuația admite rădăcini reale;

b) Să se arate că $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$ unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației;

c) Să se arate că x_1 și x_2 aparțin intervalului $[1, 3]$.

52. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq a,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Indicație: Deoarece $x^2+x+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq a,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2-a)x^2+(2-a)x+3-a \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

53. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 - 3x + 6} \geq -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

54. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât expresia:
$E(x) = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$ să aibă sens și să fie pozitivă pentru orice x real.

10.4.1 Poziția rădăcinilor funcției de gradul al II-lea față de un număr dat „α”

Fie $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ având rădăcinile reale x_1, x_2.

- Dacă $x_1 < x_2 < \alpha$, se face substituția $y = x - \alpha \Leftrightarrow x = y + \alpha$ și se impune condiția ca ecuația $f(y + \alpha) = 0$ să aibă aibă ambele rădăcini y_1, y_2 reale și negative.
- Dacă $\alpha < x_1 < x_2$, se face substituția $y = x - \alpha \Leftrightarrow x = y + \alpha$ și se impune condiția ca ecuația $f(y + \alpha) = 0$ să aibă aibă ambele rădăcini y_1, y_2 reale și pozitive.
- Dacă $x_1 < \alpha < x_2$, se face substituția $y = x - \alpha \Leftrightarrow x = y + \alpha$ și se impune condiția ca ecuația $f(y + \alpha) = 0$ să aibă aibă rădăcinile y_1, y_2 reale și de semne contrare.

Exemplu: Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuației $x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0$ să satisfacă condiția $x_1 < 1 < x_2$.

Facem substituția $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$ și ecuația în y este $(y + 1)^2 + 2m(y + 1) + 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2(m + 1)y + 4m + 4 = 0$. Această ecuație trebuie să aibă rădăcinile reale și de semne diferite ($y_1 = x_1 - 1 < 0$ și $y_2 = x_2 - 1 > 0$), deci se impun condițiile
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 4m + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \\ m \in (-\infty, -1) \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, -1)$

- Analizând tabelul

x	$-\infty$			α		x_1		β	$\frac{x_1+x_2}{2}$	x_2		γ		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a					0	$-$semnul lui a			0	semnul lui a			
$a \cdot f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$		0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

se deduc cu ușurință condițiile ce poziționează rădăcinile față de un număr sau față de două numere date:

Exp. 1. $x_1 \leq x_2 < \gamma \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \cdot f(\gamma) > 0 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \gamma \end{cases}$

Exp.2. $x_1 < \beta < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$

Exp.3. $x_1 < \beta < x_2 < \gamma \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \\ a \cdot f(\gamma) > 0 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \gamma \end{cases}$

Obs. Pentru ca o funcție de gradul doi să aibă o singură rădăcină între numerele α și β este suficientă condiția $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

55. Se consideră funcția $f(x) = (3m-2)x^2 - 2(m+4)x + m + 4 = 0, m \neq \frac{2}{3}$. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ rădăcinile reale ale ecuației $f(x) = 0$ îndeplinesc condițiile:

a) $x_1 < 2 < x_2 < 3$;

b) $x_1 < -1 < 0 < x_2$;

c) $-1 < x_1 < 1 < x_2$;

d) $0 < x_1 < x_2 < 3$.

56. Se consideră funcția $f(x) = (m+1)x^2 - (m+3)x - m + 3 = 0, m \neq -1$. Să se precizeze valorile lui m pentru care:

a) Ecuația $f(x) = 0$ admite o singură rădăcină în intervalul $(1, 2)$;

b) Ecuația are ambele rădăcini mai mici ca 1;

c) Ecuația are ambele rădăcini mai mari ca 1;

d) Ecuația are o rădăcină mai mică ca 1 și cealaltă mai mare ca 1.

57. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile ecuației $(2m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2 = 0$ să îndeplinească condițiile indicate:

a) $x_1 < 2 < x_2$;

b) $x_1 < 1 < 2 < x_2$;

c) $1 < x_1 < 2 < x_2$;

d) $1 < x_1 < x_2 < 2$.

58. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid (m-1)x^2 + (2m+1)x + 1\} \cap (-\infty, 1)$

a) are un element; b) are două elemente; c) este vidă.

59. Se consideră expresia: $E(x, m) = (m+1)\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + 2(m-3)\sqrt[3]{x^2+1} + m,\ x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Determinați $H = \{m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mid E(x, m) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

b) Determinați numărul rădăcinilor reale ale ecuației $E(x, 1) = 0$

10.5 Graficul funcției de gradul II.

Graficul funcţiei de gradul al doilea este o parabolă care intersectează axa Oy în punctul $(0, c = f(0))$, iar axa Ox în x_1 și x_2, rădăcinile ecuației atașate dacă $\Delta > 0$. Dacă $\Delta < 0$ graficul nu intersectează axa Ox. Parabola are axă de simetrie dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ și vârf $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, adică $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

60. Pentru fiecare din funcțiile următoare să se alcătuiască tabelul de variație și să se reprezinte grafic funcția:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$;
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3x - 2$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 4$;
g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$.

61. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x$.

a) Să se reprezinte grafic funcția;

b) Să se scrie restricțiile funcției f la mulțimile:

1^0 $\{-1, 0, 1, 2\}$; 2^0 $[0, 4]$; 3^0 $(-1, 1) \cup [2, 4]$ și să se reprezinte grafic.

62. Să se reprezinte grafic funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \le 1 \\ 2 + x - x^2 & x > 1 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2, & \text{pt. } x < -2 \\ x^2 + x - 6, & \text{pt. } x \ge -2 \end{cases}$; $h(x) = |x| + |x^2 - 3x|$;

63. Să se reprezinte grafic funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x-1| - |x^2 - 4x + 3|$; b) $f(x) = |x-1| + |x^2 - 4x + 3|$; c) $f(x) = |x^2 - 9| + |x^2 - 4|$;

64. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât parabola asociată funcției:

a) $f_a(x) = ax^2 - (2a + 7)x + a - 5$, $a \neq 0$;
b) $f_a(x) = (a + 1)x^2 - (2a + 3)x + a - 1$, $a \neq -1$;
c) $f_a(x) = x^2 - (2a + 3)x + 9$;
d) $f_a(x) = x^2 - (3a + 2)x + 2a - 5$;
e) $f_a(x) = 4ax^2 - 12x + 6 - a$, $a \neq 0$

să intersecteze axa Ox în două puncte distincte.

Indicație: Se pune condiția $\Delta > 0$.

65. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției :

a) $f_a(x) = (3a + 2)x^2 + (3a + 2)x + 2a + 5$, $a \neq -\frac{2}{3}$;

b) $f_a(x) = (a-1)x^2 + (a+1)x + a + 1,\ a \neq 1$;

c) $f_a(x) = (a+4)x^2 - 3ax + 4 - a,\ a \neq -4$;

d) $f_a(x) = (a+2)x^2 + 4ax + a + 2,\ a \neq -2$;

e) $f_a(x) = (a+2)x^2 - (a+1)x - 2a + 3,\ a \neq -2$

este tangent axei Ox.

Indicație: Se pune condiția $\Delta = 0$.

66. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcției:

a) $f_m(x) = (m+1)x^2 - 2(m+4)x + 2m,\ m \neq -1$;

b) $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 1,\ m \neq 0$;

c) $f_m(x) = (m-2)x^2 - x + m - 2,\ m \neq 2$

să fie situat deasupra axei Ox.

67. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcției:

a) $f_m(x) = (m-2)x^2 - (3m+2)x + m + 1,\ m \neq 2$;

b) $f_m(x) = x^2 - (3m-1)x + m(2m-1)$;

c) $f_m(x) = (m-2)x^2 - x + m - 2,\ m \neq 2$

să fie situat sub axa Ox.

68. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcției:

a) $f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m$;

b) $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1,\ m \neq 0$;

c) $f_m(x) = mx^2 - (2m+1)x + m + 1,\ m \neq 0$

să se găsească pe prima bisectoare.

69. Să se găsească locul geometric descris de vârful parabolelor:

a) $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 1,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f_m(x) = mx^2 - (2m+1)x + m + 1,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $f_m(x) = x^2 + 2(m+2)x + m^2 - 1,\ m \in \mathbb{R}$

d) $f_m(x) = x^2 + (m-4)x + 2 - m,\ m \in \mathbb{R}$

e) $f_m(x) = x^2 - (3m+2)x + 2m - 5,\ m \in \mathbb{R}$

f) $f_m(x) = 2x^2 + 2mx + m^2 + 4m + 3, m \in \mathbb{R}$

Exemplu rezolvat: e) Se știe că vârful are coordonatele $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, deci $\begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = \frac{4m^2 + 32m + 24}{4} \end{cases}$. Eliminând parametrul m între cele două relații obținem $y = 2x^2 - 8x + 3$ și deci locul geometric este tot o parabolă.

70. Să se arate că familiile de parabole asociate funcțiilor:

a) $f_m(x) = x^2 + (m-4)x + 2 - m,\ m \in \mathbb{R}$

b) $f_m(x) = (m^2-1)x^2 - 2(m^2+2)x + m^2 - 4,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

c) $f_m(x) = (m+1)x^2 - (3m+5)x + 2m + 6,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d) $f_m(x) = (m^2-m-6)x^2 - 2(m^2-3)x + m^2 + m,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

trec printr-un punct fix ale cărui coordonate se cer.

Exemplu rezolvat: d) Avem $y = (m^2-m-6)x^2 - 2(m^2-3)x + m^2 + m \Leftrightarrow m^2(x^2-2x+1) - m(x^2-1) - 6x^2 + 6x - y = 0$. Deoarece punctul este fix, relația nu trebuie să depindă de m și deci coeficienții lui x trebuie să fie nuli. Rezolvând sistemul $\begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ x^2-1=0 \\ -6x^2+6x-y=0 \end{cases} \Longrightarrow x = 1, y = 0$

Altfel: Dăm lui m două valori diferite. De exemplu $m = 0$ și $m = 1$ și obținem curbele $y = -6x^2 + 6x$, respectiv $y = -6x^2 + 4x + 2$ care se intersectează în punctul $A(1, 0)$ și arătăm că punctul de intersecție se află pe graficul tuturor curbelor $y = f_m(x)$, în cazul nostru $f_m(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m^2 - 2\left(m^2-3\right) + m - m - 6 = 0$

71. Să se calculeze $\operatorname{Im} f$ pentru:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + 8$;

b) $f : [-1, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 3$;

c) $f : [-1, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + x + 1$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{pt. } x < 4 \\ x - 4, & \text{pt. } x \geq 4 \end{cases}$

Indicație: Se pot reprezenta grafic funcțiile și se face citirea pe grafic.

72. Să se calculeze $\operatorname{Im} f$ pentru:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{-x^2 - 4x - 30}{x^2 + 4x + 10}$;

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{x^2 + 4x + 4}$;

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1}$

Exemplu rezolvat : e) Fie $\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1} = m \iff (m-1)x^2 - (m+3)x + m - 1 = 0$. Pentru ca x să fie număr real ar trebuie ca $\Delta = (m+3)^2 - 4(m-1)^2 \geq 0 \Rightarrow m \in \left[-\dfrac{1}{3}, 5\right] = \operatorname{Im} f$

73. Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 11}{x^2 + 2x + 6}$. Pentru ce valoare a lui x se atinge valoarea maximă?

74. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x + m$ și $g(x) = 2x^2 + 4x + 5$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $Imf = Img$.

75. Determinați valorile parametrului real m pentru care dubla inegalitate $-3 < \dfrac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ este satisfăcută oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$

76. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 - x + 1}$ să fie $Imf = [-3, 2]$.

77. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 - 3x + 6}$, să fie $Imf = [-1, \infty)$.

78. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2 + mx + 1}$, $m > 0$ să fie $Imf = \left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$.

79. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât imaginea funcției $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{m}\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{mx + 1}$, $m \neq 0$ să fie $Imf = (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$.

10.5.1 Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă

80. Reprezentați grafic în același sistem de axe perechile de curbe și aflați punctele lor de intersecție

a) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$

81. Se dă dreapta $y = x + 5$ și parabola $y = (m-2)x^2 - (2m-1)x + 2m + 2,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

a) Pentru ce valori ale lui m dreapta intersectează parabola în două puncte distincte ?

b) Pentru ce valori ale lui m dreapta este tangentă parabolei ? Să se afle punctul de tangență.

82. Se dă dreapta $y = -x + 2$ și parabola $y = (m-2)x^2 - (2m-3)x + 2m + 2,\ m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

a) Pentru ce valori ale lui m dreapta este tangentă parabolei ?

b) Pentru ce valori ale lui m cele două curbe nu au nici un punct comun ?

83. Se dă dreapta $y = x + 1$ și parabola $y = x^2 - (2m-1)x + 2m^2 - 4m + 1,\ m \in \mathbb{R}$

a) Pentru ce valori ale lui m dreapta intersectează parabola în două puncte distincte ?

b) Pentru ce valori ale lui m dreapta este tangentă parabolei ?

c) Pentru ce valori ale lui m cele două curbe nu au nici un punct comun ?

10.5.2 Poziția relativă a două parabole.

84. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații și interpretați geometric soluțiile găsite:

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = y \\ 2x^2 - 3x + 1 = y \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 1 \\ y = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 3x^2 - 5x - 1 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

85. Se dau parabolele: $y = ax^2 - (a+2)x - 1;\ y = x^2 - 2x - a,\ a \neq 0$

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât parabolele să se intersecteze în două puncte distincte;

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât parabolele să fie tangente;

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât parabolele să nu aibă puncte comune.

86. Se dau parabolele: $y = (a+2)x^2 - (a+2)x - 2a - 1;\ y = 2x^2 + ax - a,\ a \neq 2$

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât parabolele să se intersecteze în două puncte distincte;

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât parabolele să fie tangente;

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât parabolele să nu aibă puncte comune.

10.6 Probleme diverse

87. Determinați $a, m \in \mathbb{R}$ și rezolvați ecuația $(m^2+2a^2)x^2 - 2ax + 2 - 2am = 0$, știind că $x = 1$ este una din rădăcini.

88. Să se arate că nu există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ambele rădăcini ale ecuației $2x^2 - (m-2)x + 3m - 1 = 0$ să fie numere întregi.

89. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă soluția inecuației $4(x^2 + ax + 1) - 3(x^2 + 2x + b) > 0$ este mulțimea $S = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

90. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât soluția inecuației $(x-3)^2 + 2(x-1)^2 - ax + b \leq 0$ să fie mulțimea $S = [1; 4]$.

91. Să se găsească două numere întregi a și b, astfel încât ecuația $x^2 + ax + b = 0$ să aibă o rădăcină în intervalul $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

92. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{există } a, b \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } x^2 - ax + b = 0\}$

a) Să se verifice că $1 \in A$; b) Să se verifice că $1 + \sqrt{2} \in A$;

c) Să se arate că dacă $x_1, x_2 \in A$ atunci

$x_1^n + x_2^n = a(x_1^{n-1} + x_2^{n-2}) - b(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}), \forall n \geq 2$; d) Să se arate că $A \cap \left(0, \frac{1}{2}\right) \neq \varnothing$

93. Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$ știind că a și b reprezintă cele două rădăcini reale ale ecuației $x^2 - (2b-1)x + 3b - 4a = 0$.

94. Se consideră mulțimea de funcții $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x^2 + ax + b,\ a, b \in \{1, 2, 3\}\}$ și notăm cu S mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuațiilor de forma $f(x) = 0$, unde $f \in M$. (În cazul în care o soluție apare de mai multe ori, se consideră ca fiind un singur element al mulțimii S.)

Înscrieți în spațiul din stânga numărului de ordine din prima coloană, litera din a doua coloană care corespunde răspunsului corect.

	I	II	
– 1.	Numărul de funcții din mulțimea M	A	1
– 2.	Numărul de funcții din mulțimea M pentru care ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții reale	B	4
– 3.	Numărul de funcții din mulțimea M pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluții reale	C	5
– 4.	Numărul de funcții din mulțimea M pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluții reale și egale	D	9
– 5.	Numărul de elemente al mulțimii S	E	6
– 6.	Suma elementelor mulțimii S	F	3
		G	-3
		H	-6

95. Să se arate că dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi oarecare atunci ecuația $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ nu are rădăcini reale.

96. Fie ecuațiile $x^2 - (m + 3)x + 12m = 0,\ y^2 - (m + 1) + m^2 + 11 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, respectiv y_1, y_2. Precizați valorile parametrului real m pentru care este adevărată relația:
$\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{y_1 + y_2} \leq 2(x_1 + x_2)$

97. Fie A, B punctele de intersecție ale graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (m+1)x - m$ cu axa Ox și V vârful parabolei. Să se determine $m \in (1, \infty)$ astfel încât aria triunghiului VAB să fie egală cu 1.

98. Se dă ecuația $x^2 - a(a - 2)x - (a - 1)^2 = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că ecuația are rădăcini reale $\forall a \in \mathbb{R}$ și să se rezolve.

b) Să se determine mulțimea valorilor lui a pentru care
$2\sqrt{x_1 + x_2 - 2(a - 2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \geq 1$.

99. Se consideră ecuația $2x^2 - 4mx + 4m^2 - 8m + 1 = 0$ cu rădăcinile reale x_1, x_2.

a) Aflați o relație independentă de m între rădăcinile ecuației.

b) Între ce valori variază rădăcinile reale x_1 și x_2 ?

c) Între ce valori variază $x_1 + x_2$ dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$?

d) Între ce valori variază $x_1 \cdot x_2$ dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$?

e) Între ce valori variază $\dfrac{x_1}{x_2}$ dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$?

Soluție: a) $(x_1-2)^2+(x_1-2)^2=9$; b) $(x_1-2)^2\le 9\Rightarrow x_1\in[-1,5]$. Analog $x_2\in[-1,5]$.c) $\Delta\ge 0\Rightarrow m\in\left[\frac{4-\sqrt{14}}{2},\frac{4+\sqrt{14}}{2}\right]$ și $x_1+x_2=2m\in[4-\sqrt{14},4+\sqrt{14}]$

d) $x_1x_2=2m^2-4m+\frac{1}{2}$. Fie $g:\left[\frac{4-\sqrt{14}}{2},\frac{4+\sqrt{14}}{2}\right]\to R,\ g(m)=2m^2-4m+\frac{1}{2}$. Reprezentăm grafic funcția g și determinăm $\mathrm{Im}g=\left[-\frac{3}{2},\frac{15}{2}+2\sqrt{14}\right]\ni x_1x_2$

e) Fie $\frac{x_1}{x_2}=t\Rightarrow x_1=tx_2$. Înlocuim în relația de la punctul a) și obținem $(t^2+1)x_2^2-4(t+1)x_2-1=0$. Cum $x_2\in\mathbb{R}$ trebuie ca discriminantul acestui trinom să fie nenegativ, adică $16(t+1)^2+4(t^2+1)\ge 0\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}=t\in\mathbb{R}$.

100. Se consideră familia de parabole definite de funcția: $f(x)=2x^2+2mx+m^2+4m+3$, $m\in\mathbb{R}$, iar x_1,x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației $f(x)=0$.

a) Să se afle locul geometric descris de vârful parabolelor când m variază;

b) Să se afle mulțimea valorilor pe care le poate lua produsul x_1x_2 al rădăcinilor când m variază;

c) Să se afle o relație independentă de m între rădăcinile ecuației $f(x)=0$;

d) Să se afle mulțimea valorilor pe care le pot lua rădăcinile reale când m variază

e) Să se afle mulțimea valorilor pe care le ia raportul $\frac{x_1}{x_2}$ unde x_1,x_2 sunt reale, când m variază.

(C. Ionescu -țiu)

101. Fie ecuația $x^2-2(m+1)x+5m+1=0$. Valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care rădăcinile ecuației date sunt în intervalul (0,5) aparțin mulțimii:

a) $\left(-\frac{1}{5},0\right)\cup\left(3,\frac{16}{5}\right)$; b) $(0,5)$; c) $(0,1)\cup\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$; d) $(1,2)$.

102. Să se arate că dacă a,b,c,d verifică egalitatea $ac=2(b+d)$ atunci cel puțin una din ecuațiile $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$ are rădăcini reale.

103. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{pt. } x\in(-\infty,0)\\ ax+b, & \text{pt. } x\in[0,2]\\ x^2-4x+5 & \text{pt. } x\in(2,\infty)\end{cases}$

a) Să se determine mulțimea $B=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\mid f \text{ crescătoare pe } \mathbb{R}\}$;

b) Să se determine aria reprezentării grafice a mulțimii B. (D.M. Bătinețu)

104. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x^2+(m-1)x-m+2$, $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

a) Pentru $m=2$, rezolvați ecuația $f(x)=0$;

b) Pentru $m=0$, rezolvați inecuația $f(x)<0$;

c) Pentru ce valori ale lui m ecuația $f(x)=0$ are rădăcini reale și egale ?

d) Pentru ce valori ale lui m, $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$?

105. Se consideră ecuația $x^2+(3-m)x-m-5=0,\ m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, ecuația are rădăcini reale și distincte.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+6$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației date.

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care suma $S=x_1^2+x_2^2$ este minimă.

106. Se consideră ecuația $x^2-(m+3)\,x+m^2=0$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația să admită soluții reale.

b) Aflați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1\left(m^2-3x_1\right)+x_2\left(m^2-3x_2\right)=0$ dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației.

107. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x-6$. Să se determine:

a) Suma cuburilor ecuației $f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$

b) $f(2)+(f\circ f)(2)+(f\circ f\circ f)(2)$

c) Imaginea funcției $f\circ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

108. Fie funcția $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2-6x+9+m$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f.

c) Pentru $m=0$ să se determine valorile lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ f)(x)=0$

109. Să se arate că dacă $m\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ și $(1+m^2)x^2-2(4+3m)x+21=0$ atunci:

$x\in[2,6]; \quad mx\in[1,5]; \quad m\in\left[1-\frac{\sqrt{21}}{6}, 1+\frac{\sqrt{21}}{6}\right]$.

110. Să se arate că dacă $m\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ și $(1+m^2)x^2-2(4+3m)x+24=0$, atunci $x\in[3,5]$ și $mx\in[3,5]$

(C.Ionescu-Tiu)

111. Se dă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=(m-2)x^2-2mx+2m-3,\ m\in\mathbb{R}$

a) Pentru $m=3$ aflați punctele de intersecție ale curbelor $y=f(x)$ și $y=x-3$.

b) Aflați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile ecuației $f(x)=0$ să existe relația $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2$.

c) Ce reprezintă graficele funcțiilor pentru diferite valori reale ale lui m ?

d) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolelor se află în cadranul doi ?

e) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R},\ f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

f) Pentru $m=1$ trasați graficul funcției

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{|x+1|}+|x+2| & \text{pt. } x<-1\\ f(x) & \text{pt. } x\geq -1\end{cases}$$

112. Se dă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=(m^2-m-6)x^2-2(m^2-3)x+m^2+m, m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$

a) Pentru ce valori ale lui m, parabolele sunt tangente axei Ox ?

b) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolelor se află în cadranul patru ?

c) Să se arate că parabolele trec printr-un punct fix ale cărui coordonate se cer.

d) Pentru ce valori ale lui m, maximul funcției este $\frac{3}{2}$?

e) Pentru $m=1$ trasați graficul funcției

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{2|x-1|}-|6x+3| & \text{pt. } x<1\\ \dfrac{1}{2}f(x) & \text{pt. } x\geq 1\end{cases}.$$

113. Se dă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=(m^2-2m-3)x^2-2(m^2-m-2)x+m^2-1,\ m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$

a) Pentru ce valori ale lui m, parabolele sunt tangente axei Ox ?

b) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolelor se află în cadranul doi ?

c) Să se arate că parabolele trec printr-un punct fix ale cărui coordonate se cer.

d) Pentru ce valori ale lui m, maximul funcției este $\frac{1}{3}$?

e) Pentru $m=0$ trasați graficul funcției

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{|x-1|}+|3x+3| & \text{pt. } x<1\\ f(x) & \text{pt. } x\geq 1\end{cases}.$$

114. Se dă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=(m+1)x^2-(m^2+m+6)x+6m$

a) Să se determine $m\in Z$ astfel ca ambele rădăcini ale ecuației $f(x)=0$ să fie întregi și pozitive.

b) Dacă x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuației date să se determine m astfel încât $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{1}{18}(m+7)$

c) Pentru $m=1$ să se reprezinte grafic funcția

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{|x-1|}+|x+2| & \text{pt. } x<1\\ f(x) & \text{pt. } x\geq 1\end{cases}.$$

115. Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x)=mx^2+2(m+n)x+m+2n$, unde $m\in\mathbb{R}^*$ este variabil și $n\in\mathbb{R}$ fixat. Atunci vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $y=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$ dacă $a+b$ este egal cu:

a) n; b) $n+1$; c)$2n$; d) $n-1$

116. Se dă $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=(m-2)x^2-2(m-1)x+m+1$. Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ dreapta $y=x+4$ este tangentă parabolei $y=f(x)$.

117. Fie $f_m:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f_m(x)=mx^2-2(m-1)mx+3m-1$, unde $m\in\mathbb{R}^*$.

a) Aflați locul geometric descris de vârful parabolelor asociate funcții-lor f_m.

b) Aflați valorile lui $m\in\mathbb{R}$, pentru care funcția f_m este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,3]$.

c) Aflați valorile lui $m\in\mathbb{R}$, pentru care ecuația $f_m(x)=0$ are rădăcini reale și de semne contrare.

118. Funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ admite pentru $x = m$ un maxim egal cu $m(7 + m)$ și trece prin punctul $A(1, 9m - 1)$. Atunci $a + b + c$ este:

a) $7m - 1$; b) $8m - 1$; c) $9m - 1$; d) $10m - 1$.

119. Fie familia de funcții de gradul al doilea: $f_m : R \longrightarrow R,\ f_m(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^2$, unde $m \in R$ și $A(a, b)$ punctul fix prin care trec toate parabolele familiei. Atunci $a + b$ este:

a) -1; b) 0; c) 1; d) 2.

120. Fie familia de funcții de gradul al doilea: $f_m : R \longrightarrow R,\ f_m(x) = (m^2 + n + 1)x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^2 - n + 1$, unde $m, n \in R$ astfel încât $m^2 + n + 1 \neq 0$, și $A(a, b)$ punctul fix prin care trec toate parabolele familiei. Atunci $a + b$ este:

a) -2; b) -1; c) 0; d) 1.

121. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

122. Știind că $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2mx + m - 1 = 0\}$ să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $|A \cap (0, \infty)| = 2$;
b) $|A \cap (0, \infty)| = 1$;
c) $|A \cap (0, \infty)| = 0$;
d) b) $|A \setminus (0, \infty)| = 1$;

123. Fie familiile de parabole:

(P_1): $y = (m + 1)x^2 - 2(m + 4)x + 2m,\ m \neq -1$

(P_2): $y = (m + 3)x^2 - 2(m + 3)x + 15,\ m \neq -3$

a) Să se arate că dacă parabolele (P_1) intersectează axa Ox, atunci parabolele (P_2) nu o intersectează și reciproc.

b) Pot coincide vârfurile a două parabole din cele două familii ?

c) Ce figură geometrică se obține unind consecutiv vârfurile de coordonate întregi ale parabolelor ce corespund valorilor întregi ale lui m din familia (P_1).

10.8 Test de evaluare

1. Se considera familia de funcții de gradul al II-lea

$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = (2m+1)x^2 - (2m+5)x + 1 + m,\ m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

(a) Să se determine m știind că -1 este rădăcină a ecuației $f_m(x) = 0$

A $m = 0$; B $m = -1$; C $m = 3$; D $m = \frac{1}{2}$; E $m = -\frac{1}{2}$.

(b) Pentru $m = 1$ soluția inecuației $f_1(x) < 0$ este:

A $m \in \varnothing$; B $m \in (0;1)$; C $m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$; D $m \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$; E $m \in (2, +\infty)$.

(c) Cea mai mică valoare întreagă a lui m pentru care f admite o valoare minimă pozitivă este:

A $m = -3$; B $m = 2$; C $m = -1$; D $m = 4$; E $m = 5$.

(d) Valorile lui m pentru care ecuația $f_m(x) = 0$ admite rădăcini reale sunt:

A $m \in (0, +\infty)$; B $m \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$; C $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; D $m \in \varnothing$;
E $m \in (-5, -3)$.

(e) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolelor $y = f_m(x)$ se află pe dreapta $2x + 2y + 1 = 0$?

A $m \in \{-1, 1\}$; B $m \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$; C $m = 10$; D $m \in \{-1; 4\}$; E $m = 1$.

(f) Pentru ce valoare a lui m dreapta $x = 1$ este axă de simetrie pentru parabola $y = f_m(x)$?

A $m = 1$; B $m = \frac{5}{2}$ C $m = -\frac{3}{2}$; D $m \in \{-1; 4\}$; E $m = 1$. F $m = \frac{3}{2}$;

(g) Pentru ce valori ale lui m ecuația $f_m(x) = 0$, are rădăcini reale de același semn ?

A $m \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$; B $m \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$;
C $m \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$; D $m \in (-\infty, -1) \cup (1; +\infty)$;
E $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. F $m \in (-\infty, -2) \cup (4; +\infty)$;

(h) O relație independentă de m între rădăcinile ecuației $f_m(x) = 0$ este:

A $2(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$; B $x_1 + x_2 - 5 = 6x_1x_2$; C $x_1^2 + x_2^2 + 3 = 9x_1x_2$;
D $7x_1^2x_2^2 - 2(x_1 + x_2) = 3$. E $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = 1$; F $x_1 + x_2 + 3 = 8x_1x_2$.

(i) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ ecuația $f_m(x) = 0$ are rădăcini reale și de semne diferite?

A $m \in (0;1)$; B $m \in (-1;1)$; C $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$; D $m \in \varnothing$;
E $m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; F $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$; G $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

10.9 Test de evaluare

1. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - x + m = 0$. Pentru ce valori ale lui m între rădăcinile ecuației are loc relația $3x_1 + 2x_2 = 5$?

A $m = 10$; B $m = -2$; C $m = 12$; D $m = -12$; E $m = 1$.

2. Ecuația axei de simetrie a parabolei asociate graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$ este:

A $x = 2$; B $y = 1$; C $x = 1$; D $x = -1$; E $y = -1$.

3. Valorile parametrului real m pentru care $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt:

A $m \in (-\infty,\ 1] \cup [3,\ +\infty)$; B $m \in [1, 3]$; C $m \in (-\infty,\ 1]$; D $m \in [3,\ +\infty)$;

4. Pentru ce valori ale parametrului real m, suma pătratelor rădăcinilor ecuației $x^2 + (2-m)x - (m+3) = 0$ este minimă?

A $m = 9$; B $m = 1$; C $m = -1$; D $m = -9$; E $m \in (9, +\infty)$

5. Câte elemente are mulțimea $\{x \in \mathbb{Z} | (x^2 - 1)(6 - x^2) \geq 0\}$?

A Trei; B două; C niciunul; D patru; E o infinitate.

6. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx + m + 2 = 0$. Valoarea parametrului real m, pentru care are loc relația $2x_1x_2 = 3(x_1 + x_2)$, este:

A $m = -1$; B $m = 0$; C $m = 1$; D $m = 2$; E $m = 3$; F $m = 4$.

7. Dacă funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = x^2 - 2x + 2$, atunci mulțimea $\mathrm{Im}(f)$ este:

A $\mathrm{Im}(f) = \varnothing$; B $\mathrm{Im}(f) = \left[\frac{7}{4},\ \infty\right)$; C $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$; D $\mathrm{Im}(f) = [1,\ \infty)$;
E $\mathrm{Im}(f) = [2,\ \infty)$;

8. Știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y = x^2 + 2x + m, m \in \mathbb{R}$, la axa Ox este egală cu 1, atunci valoarea lui m este:

A $m = -1$; B $m \in \{-1; 1\}$; C $m \in \{0; 2\}$; D $m = 4$; E $m = -2$;

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - 2(a+2)x + a$, $a \in \mathbb{R}^*$. Fie $A = \{a \mid$ Vârful parabolei asociate acestei funcții f are coordonatele numere întregi $\}$ Atunci

A $A = \{-1; 1; 2\}$; B $A = \{-2, 2\}$; C $A = \{-2; -1; 1; 2\}$; D $A = \{-2; -1; 0\}$;

10.10 Test de evaluare

1. Se consideră mulțimea de funcții $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + 1,\ a, b \in \{1, 2, 3\}\}$ și notăm cu S mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuațiilor de forma $f(x) = 0$, unde $f \in M$. (În cazul în care o soluție apare de mai multe ori, se consideră ca fiind un singur element al mulțimii S.)

Înscrieți în spațiul din stânga numărului de ordine din prima coloană, litera din a doua coloană care corespunde răspunsului corect.

	I	II	
– 1.	Numărul de funcții din mulțimea M	A	1
– 2.	Numărul de funcții din mulțimea M pentru care ecuația $f(x)=0$ nu are soluții reale	B	4
– 3.	Numărul de funcții din mulțimea M pentru care ecuația $f(x)=0$ are soluții reale	C	5
– 4.	Numărul de funcții din mulțimea M pentru care ecuația $f(x)=0$ are soluții reale și egale	D	9
– 5.	Numărul de elemente al mulțimii S	E	6
– 6.	Suma elementelor mulțimii S	F	3
		G	$-\frac{3}{2}$
		H	$-\frac{9}{2}$

2. Se consideră funcția de gradul al doilea: $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - (m+9)x + 7m - 1$, $m \in \mathbb{R}$ Pentru ce valori ale lui m avem $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$?

a) $\{5, 6\}$; b) $\{6, 11\}$; c) $\{5, 7\}$; d) $\{7, 11\}$.

3. Fie familia de funcții de gradul al doilea: $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m^2+3)x^2 - 2(m^2+1)x + m^2 - 1$, unde $m \in \mathbb{R}$ și $F(a, b)$ punctul fix prin care trec toate parabolele familiei. Atunci $a + b$ este:

a) -1; b) 0; c) 1; d) 2.

10.11 Test de evaluare

1. Se dă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m-2)x^2 - 2(m-1)x + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$

a) Pentru $m = 4$ aflați punctele de intersecție ale curbelor $y = f(x)$ și $y = -x + 2$.

b) Aflați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să existe relația $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$.

c) Ce reprezintă graficele funcțiilor pentru diferite valori reale ale lui m ?

d) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolelor se află în cadranul al doilea ?

e) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Aflați o relație independentă de m între rădăcinile ecuației $f(x) = 0$

g) Pentru $m = 3$ trasați graficul funcției

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|x-2|} + |x-1| & \text{pt. } x < 2 \\ f(x) & \text{pt. } x \geq 2 \end{cases}$$

11 Vectori în plan

11.1 Segmente, semidrepte, segmente orientate, echipotență, vectori

Termeni utilizați; notații, definiții

- Segment de dreaptă închis la capete; $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$, unde $(AB) = \{M \in AB \mid M$ este situat între A și $B\}$ este segment deschis (fără capete).

  Când nu este pericol de confuzie, segmentul [AB] se notează și AB.

- Semidreaptă închisă cu originea în O care trece prin punctul A, $[OA = \{M \in OA \mid M$ și A sunt de aceeași parte față de O$\}$;

- $(OA = [OA \setminus \{O\}$– semidreaptă deschisă cu originea în O ce trece prin A.

1. Punctele A,B,C,D sunt coliniare. Reprezentați prin desen situații de alegere a celor patru puncte pe dreaptă încât să aibă loc relația:

a) $(AB) \cap (CD) = \varnothing$

b) $[AB] \cup [CD] = [CD]$

c) $[AD) \setminus (CD] = [AC]$

d) $(AB) \cap (BD) \neq \varnothing$

e) $(CD) \subset [AB]$

f) $[AB] \setminus [CD] = [AC) \cup [DB]$.

2. Punctele coliniare O, A, B, C îndeplinesc simultan condițiile:

(1) $3AB - AC + 3OB - 7OC = 8$; (2) $3AB = 2AC = 4OB = 12OC$

a) Calculați AB, AC, OB, OC; b) Care este ordinea celor patru puncte pe dreptă?

3. a) Pe dreapta OA considerăm punctele $B \in (OA$ și $C \notin (OA$, distincte unele de altele. Efectuați și reprezentați geometric fiecare din situațiile:

(1) $[OA \cap [BO$ 2) $[OB \cup [AB$ 3) $[BC \setminus [OC$ 4) $d \setminus [OA]$

b) Efectuați operațiile indicate de (1)–(4) pentru alte posibilități de alegere a punctelor B și C față de $(OA$.

- Segment orientat $\overline{AB}$, A originea B extremitatea sa
- Un segment orientat $\overline{AB}$ este caracterizat de: direcție (toate dreptele paralele cu dreapta AB); sens: de la A spre B (A originea iar B extremitatea) și modul: $|\overline{AB}|$ (lungimea segmentului) notat și simplu $|AB|$.
- Segmente orientate coliniare – segmente orientate având aceiași direcție.
- Segmente orientate echipolente: $\overline{AB}$ este echipolent cu $\overline{CD}$ și scriem $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ dacă au aceeași direcție, același sens și același modul.
- Vectorul $\overrightarrow{AB} = \{\overline{XY} \mid \overline{XY} \sim \overline{AB}\}$, notat și $\overrightarrow{v}$ – clasa de echipolență a lui $\overline{AB}$.
- Vectori coliniari – vectori care au aceeași direcție.

4. Să se reprezinte segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ caracterizate de:

a) același sens și origini diferite, coliniare sau nu;

b) sensuri contrare, același modul și aceeași origine;

c) aceeași direcție, origini diferite, sensuri opuse;

d) aceeași direcție, același sens, origini diferite, coliniare sau nu.

5. Reprezentați trei segmente orientate $\overline{AB}$,$\overline{CD}$ ș $\overline{EF}$ în condițiile:

a) aceeași direcție, neegale, același sens;

b) aceeași direcție, același sens și același modul;

c) direcții diferite și același modul;

d) aceeași direcție, $\overline{AB}$ de sens contrar cu $\overline{CD}$ și $\overline{EF}$.

6. În figura 123 este indicată o mulțime de segmente orientate, cu condiția că $\overline{A_iA_j}$ și $\overline{A_kA_l}$ au același sens dacă $(i-j)(k-l)>0$.

a) Distingeți clasele de segmente orientate echipolente (clasele de echipolență).

b) Indicați într-o figură separată, vectorii atașați claselor de echipolență găsite la pct.a).

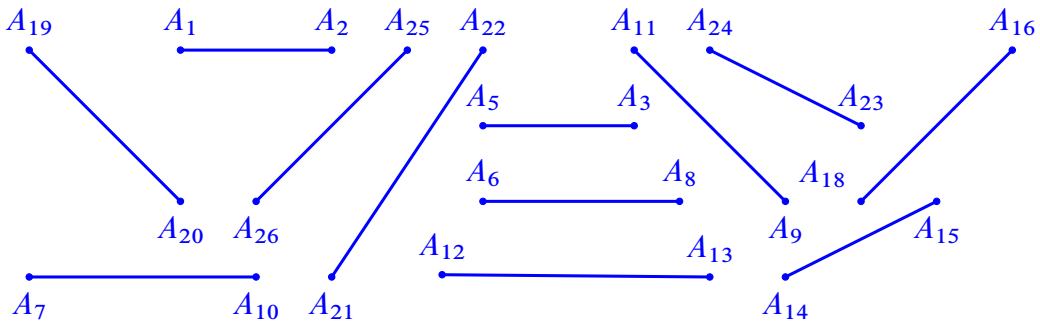


Fig. 123: *Exercițiul 6*

7. Reprezentați vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ în condițiile:

a) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}||\vec{b}$, $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au sensuri contrare;

b) $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq|\vec{c}|$, $\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}$, $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au același sens;

c) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ au aceeași direcție.

8. Fie vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, și $\vec{w}$ oarecare în plan.

a) Construiți trei vectori având aceeași origine și coliniari cu $\vec{u}$, $\vec{v}$, și $\vec{w}$;

Construiți trei vectori având aceeași origine și egali cu $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$;

b) Cu origine în O construiți vectorii $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ și $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\vec{u}\neq\vec{v}$.

Construiți paralelogramele OBMA și OBNC; Evidențiați prin săgeți vectorii egali și vectorii coliniari dar neegali.

9. Fie O un punct în plan și $\overline{AB}$ un segment orientat nenul.

a) Reprezentați mulțimea $\mathcal{L}$ a extremităților segmentelor orientate cu originea în O care au aceeași lungime cu $\overline{AB}$.

b) Reprezentați mulțimea $\mathcal{D}$ a extremităților segmentelor orientate cu originea în O care au aceeași direcție cu $\overline{AB}$.

c) Reprezentați mulțimea $\mathcal{S}$ a extremităților segmentelor orientate cu originea în O care au același sens cu $\overline{AB}$.

10. Fie hexagonul regulat ABCDEF de centru O.

a) Indicați clasa de echipolență a vectorului $\overrightarrow{BC}$.

ex: $\{\overline{BC}, \overline{OD}, \overline{AO}, \overline{FE}\}$. Analog pentru vectorii $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{DE}$, și $\overrightarrow{OA}$.

b) Precizați trei perechi de vectori caracterizați astfel:

(1) egali; (2) coliniari și neegali; (3) coliniari.

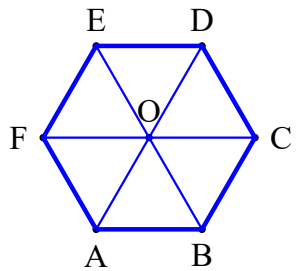


Fig. 124: *Exercițiul 10*

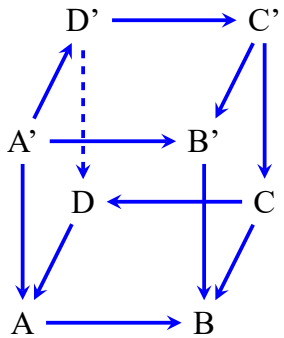


Fig. 125: *Exercițiul 11*

11. În paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ evidențiați vectorii care au:

a) aceeași direcție; b) același modul; c) același sens; d) și vectorii egali.

12. Fie ABCD un dreptunghi și $\overline{FE} \sim \overline{DC}$. Arătați că $\overline{AB} \sim \overline{FE}$.

13. Pe o dreaptă sunt situate punctele A,C,D,B în această ordine. Să se arate că există relația: $AC \cdot BD - AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

14. Să se reprezinte pe dreapta AB punctele C și D așa încât $AB = a$, $CD + DB = a + b$ și $AD = a - b$, cu $a > b$.

15. a) Pe semidreapta $(OA, C \in (OA$ și $B \in (OA$. Să se arate că B este mijlocul segmentului (AC) dacă și numai dacă $2OB = OA + OC$.

Soluție: Dacă $B \in (AC)$ și $BC = CA$, atunci după (P_1),
$OB = OC + \frac{1}{2}CA = OC + \frac{1}{2}(OA - OC) = \frac{1}{2}(OA + OC)$.
Dacă $2OB = OA + OC$, se elimină situațiile $B \in (OC)$ și $A \in (CB)$ (de ce?) rămânând $B \in (AC)$, de unde $BC = OB - OC = OA - OB = AB$.

b) Fie A,B,C trei puncte coliniare și D,E simetricele lui A față de B și respectiv C. Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor (BC) și respectiv (DE) atunci P este și mijlocul segmentului [AQ].

16. Fie A,B,C,D,E patru puncte coliniare, astfel încât B este mijlocul lui [AC], C este mijlocul lui [BD], iar D este mijlocul lui [CE].

a) Scrieți segmente orientate determinate de aceste puncte echipolente cu $\overline{BC}$, respectiv $\overline{DB}$.

b) Scrieți alți 2 reprezentanți ai vectorului $\overrightarrow{EC}$

Reguli utile în rezolvarea problemelor ?

(D_1) Definiția paralelogramului.

(P_1) Condiții suficiente ca un patrulater să fie paralelogram.

(P_2) Condiții necesare ca un patrulater să fie paralelogram.

(P_3) Condiții suficiente ca două triunghiuri să fie congruente.

(P_4) Condiții necesare ca două triunghiuri să fie congruente.

(P_5) Două unghiuri cu laturile paralele sunt congruente sau suplementare

(P_6) Proprietăți ale paralelogramelor particulare.

17. Pe o dreaptă sunt situate punctele O, A, B, C, D astfel încât $\overline{OB} \sim \overline{AC}$ și $\overline{OC} \sim \overline{AD}$. Arătați că $BC = CD$.

18. Fie punctele A, B, C, A', B', C' așa încât $\overline{AB} \sim \overline{A'B'}$ și $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

a) Comparați BB' cu CC' și BC cu $B'C'$, în cazurile:

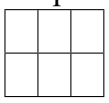
(1) A, B coliniare; (2) A, B, C necoliniare și $A' \in AB$.

(3) $A \notin BC$ și $A' \in BC$; (4) $A \notin BC$ și $A' \notin AB \cup AC$

19. Pe un cerc de centru O se consideră punctele mobile A, B, C.

a) Pentru ce poziții ale punctelor A, B, C distincte, există punctele M și N pe cerc așa încât: $\overline{AM} \sim \overline{OC}$ și $\overline{AN} \sim \overline{OB}$?

b) Indicați clase de segmente orientate echipolente . Precizați câte un vector definit de clasa respectivă.

20. Prin împărțirea unui dreptunghi în 2×3 dreptunghiuri se obține o mulțime alcătuită din cele 12 vârfuri ale acestora. 

a) Câte clase de echipolență se pot evidenția pe mulțimea segmentelor orientate ce au capetele în puncte din $\mathcal{M}$?

b) Precizați pentru fiecare clasă câte un vector definit de aceasta.

21. Fie ABC un triunghi oarecare. Paralela la AB dusă prin mijlocul E al laturii AC taie BC în D și paralela prin A la BC în F. Să se arate că $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC}$.

22. Fie ABC un triunghi, $M \in (BC)$ și $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{AC}$. Să se arate că:

a) A, Q, P coliniare. b) $QP = BC$. c) AM, CQ și BP concurente.

23. Se consideră în plan punctul O, mijlocul segmentului AB și se construiesc proiecțiile lui A și B pe două drepte d_1, d_2 ce trec prin O. Demonstrați că $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$,fig.126

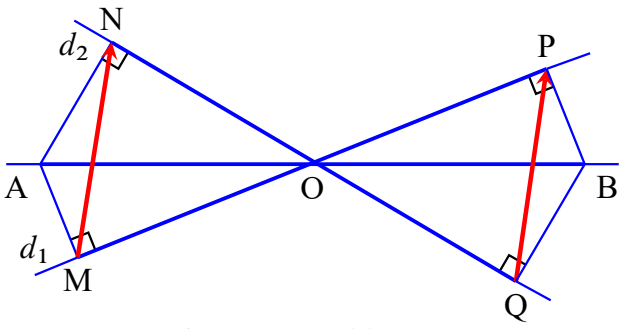


Fig. 126: *Problema 23*

11.1.1 Test de evaluare

1. Considerăm trapezul isoscel $ABCD$, de baze AB și DC. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor următoare:

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

(b) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au aceiași direcție;

(c) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

(d) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$;

(e) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$;

(f) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{FC}$;

(g) $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.

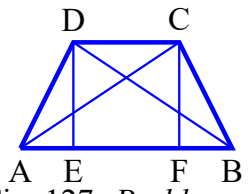


Fig. 127: *Problema 1*

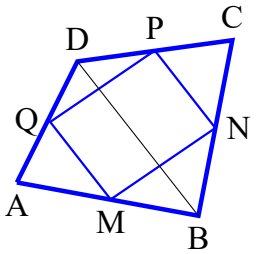


Fig. 128: *Problema 2*

2. Fie ABCD un patrulater convex și M,N,P,Q mijloacele laturilor [AB],[BC],[CD], respectiv [AD]. Demonstrați că:

a) $\overline{MN} \sim \overline{QP}$; b) MNPQ paralelogram.

3. Fie ABCD un pătrat cu latura 10 și centrul O. Aflați numărul de segmente orientate cu originea în O, cu lungimea 7 și cu vârful pe una dintre laturile pătratului.

4. Privește cu atenție pătratul ABCD din Figura 129, unde punctele M,N,P,Q sunt mijloacele laturilor.

Considerăm mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu $\overline{PN}$ care au originea pe segmentul $\overline{OQ}$. Aflați mulțimea extremităților acestor segmente orientate.

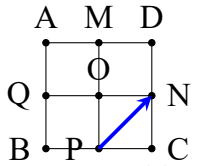


Fig. 129: *Problema 3*

5. Fie mulțimea de puncte din plan $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E\}$. Considerăm mulțimea tuturor segmentelor orientate nenule care au originea și vârful în mulțimea $\mathcal{M}$. Câte elemente are mulțimea $\mathcal{M}$?

6. Fie punctele O_1 și O_2 în plan, aflate la distanța $d > 0$ unul de celălalt. Fie numerele $R > r > 0$. Considerăm $\mathcal{A}$ mulțimea tuturor vârfurilor segmentelor orientate cu originea în punctul O_1 și cu lungimea R , respectiv $\mathcal{B}$ mulțimea tuturor vârfurilor segmentelor orientate cu originea în punctul O_2 și cu lungimea r. Aflați relația dintre d, R, r astfel încât:

a) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ are un singur element.

b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ are două elemente.

c) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$.

11.2 Adunarea vectorilor

(1) **Reguli de adunare a doi vectori**

(1.1) Dacă originea lui $\vec{v}$ coincide cu extremitatea lui $\vec{u}$, atunci vectorul sumă, $\vec{u} + \vec{v}$ va avea originea lui $\vec{u}$ și extremitatea lui $\vec{v}$.
exemplu: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$

(1.2) Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ își schimbă rolurile din (1.1), suma $\vec{v} + \vec{u}$ este egală cu $\vec{u} + \vec{v}$, **adunarea vectorilor este comutativă**.

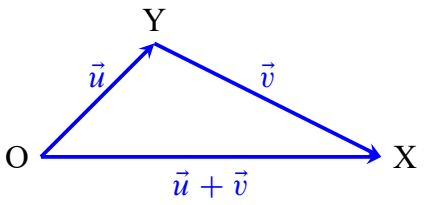


Fig. 130: *Regula triunghiului*

(1.3) Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ nu se află în situațiile (1.1) sau (1.2), se construiește un al treilea vector egal cu unul dintre ei (sau se caută în configurația problemei un astfel de vector aflat în situația (1.1) sau (1.2)) în condițiile (1.1) sau (1.2).
exemple: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$, unde $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$, sau
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FD}$, unde $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB}$.

(1.4) Pentru a scrie un vector $\overrightarrow{AB}$ ca sumă de alți doi vectori se caută în configurație, triunghiul ABM (sau se alege un punct M) și avem **relația lui Chasles**: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

(1.5) Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceeași origine, vectorul sumă se obține după **regula paralelogramului:**
exemplu: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

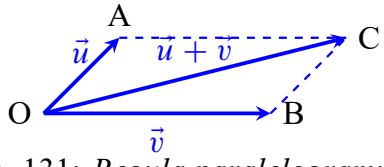


Fig. 131: *Regula paralelogramului*

1. a) Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori aflați în situațiile din Fig.132:

Construiți în fiecare caz vectorul sumă $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ după regula triunghiului și după regula paralelogramului

b) Repetați exercițiul pentru alte perechi de vectori alese de voi.

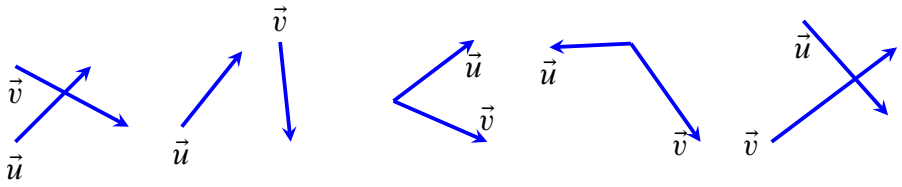


Fig. 132: *Exercițiul 1*

2. Fie ABCD un paralelogram și M,N,P,Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA și O intersecția diagonalelor . Stabiliți egalitățile:

a) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{QP}$
b) $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AO}$
c) $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{NM}$
d) $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OC}$
e) $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AO}$
f) $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PQ}$

Căutați și alte perechi de vectori din configurația exercițiului și aflați vectorul sumă după regulile (1.1)–(1.5)

3. Fie punctele A,B,C,D,E în plan. Stabiliți egalitățile:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$
c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB}$
d) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA}$
e) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA}$

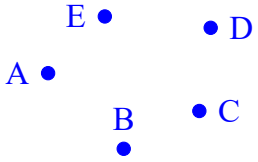


Fig. 133: *Exercițiul 3*

Exemplu rezolvat: e) Ne fixăm atenția pe cele patru puncte B,A,D,E. Cum $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{DE}$ nu se găsesc în situațiile (1.1) sau (1.2), căutăm să-l scriem pe unul dintre ei, de exemplu $\overrightarrow{BA}$, după regula (1.4): $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}$ și avem: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA}$.

4. Fie vectori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{CD}$ iar O un punct oarecare în plan, $O \notin \{A, B, C, D\}$.

a) Construiți vectorii $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{CD}$.

b) Construiți paralelogramele $OYTX$ și $OZUT$. Dovediți că $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{UX}$.

5. În figura 134, triunghiul ABC este oarecare, D mijlocul lui BC iar AE||BC, DE||AB

a) Scrieți vectorii $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AE}$ și $\overrightarrow{BA}$ ca sume de câte doi vectori din figură.
b) Exprimați printr-un singur vector din figură, sumele:
$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AB}$.
c) Alegeți în figură și alte perechi de vectori și aflați suma lor.

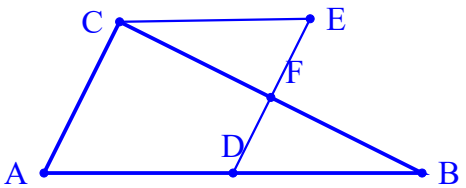


Fig. 134: *Exercițiul 5*

6. În figura 135, M,G,F sunt mijloacele laturilor BC, AB, AC și DE ∥BC.
Exprimați printr-un singur vector, sumele:

a) $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{AE}$; e) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}$; i) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CE}$;
b) $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BG}$; f) $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{MB}$; j) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}$;
c) $\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}$; g) $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{FE}$;
d) $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{MB}$; h) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EM}$; k) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MC}$.

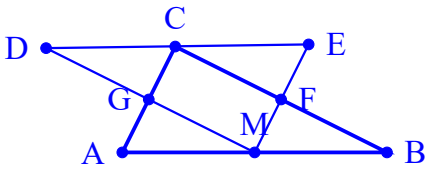


Fig. 135: *Exercițiul 6*

(2) **Adunarea vectorilor este asociativă**
$(\forall)\,\bar{a},\bar{b},\bar{c}\quad (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

(2.1) O situație de adunare a mai mulți vectori este dată de **regula poligonului**: $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots\overrightarrow{A_{k-1}A_k}=\overrightarrow{A_1A_k}$ (Chasles)

7. Fie vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ de origini diferite O_1, O_2, O_3. Să se construiască vectorul sumă $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ având originea într-un punct $O\notin\{O_1,O_2,O_3\}$, folosind odată regula triunghiului și a doua oară regula paralelogramului.

8. Fie în plan punctele distincte A,B,C,D,E,F.
Exprimați următoarele sume de vectori printr-un singur vector

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FC}$; c) $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{FD}$;
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DF}$; d) $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CE}$.

9. Fie hexagonul regulat ABCDEF și notăm $\{X\}=EF\cap DC$, $\{Y\}=FE\cap AB$ și $\{Z\}=DC\cap AB$, iar O centrul hexagonului.

Determinați vectorul sumă:
a) $\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BE}$
b) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{YA}$
c) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{XE}$
d) $\overrightarrow{YB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CX}$.

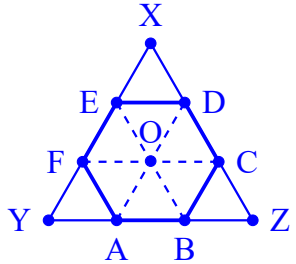


Fig. 136: *Exercițiul 9*

(3) **Opusul unui vector**

Opusul vectorului $\overrightarrow{u}$ îl notăm $-\overrightarrow{u}$ și $\forall \vec{u}\ (\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}\,)$

exemplu: opusul lui $\overrightarrow{AB}$ este $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

10. a) Căutați în figura de la exercițiul 9, perechi de vectori opuși. Scrieți apoi fiecare vector ca sumă de alți vectori și obțineți sume de vectori nule.

Exemplu rezolvat: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. Dar $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CZ}+\overrightarrow{ZB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{OF}$ iar $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DX}+\overrightarrow{XE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{FY}$; Așadar $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{FY}=\vec{0}$.

b) Arătați că :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$

$\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

$\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EO}=\vec{0}$.

(4) **Scăderea vectorilor**

Regula de scădere $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ explică situațiile:

$\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{XY}$ sau $\overrightarrow{XO}-\overrightarrow{YO}=\overrightarrow{XY}$

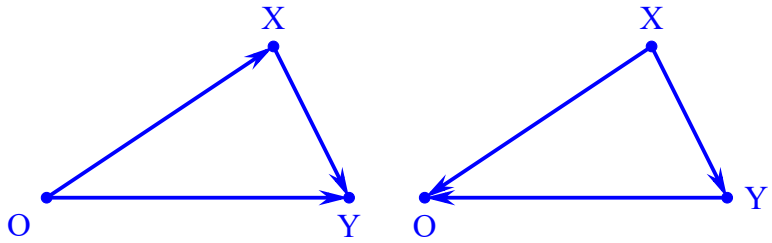


Fig. 137: *Scăderea vectorilor*

11. În configurația exercițiului 5 să se determine diferențele vectorilor:

$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FD}$.

Exemple rezolvate: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}$.

12. Să se determine diferențele de vectori ce se obțin din sumele de la exercițiul 5., înlocuind semnul $+$ cu semnul $-$.

13. Fie configurația exercițiului 9. Să se determine diferențele de vectori:

a) $(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AO})-\overrightarrow{BZ}$;
b) $(\overrightarrow{CZ}-\overrightarrow{CO})-\overrightarrow{FE}$;
c) $-\overrightarrow{YA}-\overrightarrow{CD}$;
d) $(\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{DX})-\overrightarrow{FA}$;
e) $(\overrightarrow{ZD}-\overrightarrow{ZA})-\overrightarrow{DX}$;
f) $(\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{YF})-\overrightarrow{XA}$.

Exemplu rezolvat: f) Pentru a efectua scăderea $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{YF}$ căutăm să înlocuim unul din vectori (sau ambii) cu alți vectori egali încât cei doi să aibă originea sau extremitatea comună; de exemplu $\overrightarrow{YF}=\overrightarrow{BC}$ și atunci $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{YF}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CB}=-(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XB}$, în final $\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{AB}$.

Exerciții și probleme diverse.

14. Fie $\{i, j, k, l\}$. Să se arate că $\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_lA_k} = \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_lA_j}$.

Găsiți și alte sume de vectori respectivi, egale între ele.

(5) **Proprietate:** *Condiția necesară și suficientă ca n vectori dați să aibă suma nulă este ca, pornind de la un punct oarecare al planului (spațiului) să se formeze vectorii egali cu cei dați o linie poligonală închisă.*

exercițiu: exemplificați proprietatea în cazul când poligonul închis este un triunghi sau patrulater.

15. Fie ABC un triunghi și vectorii $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{CA}$. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{QR}$ și $\overrightarrow{SM}$ formează un triunghi.

16. Fie patrulaterul ABCD. Dacă există un punct O în plan astfel încât $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ atunci ABCD este paralelogram.

17. Dați o soluție vectorială proprietății „ Dacă într-un patrulater convex, diagonalele se înjumătățesc atunci patrulaterul este paralelogram”.

18. Fie ABCD un patrulater, O un punct fixat și AODX, BOCY paralelograme. Să se arate că dacă $\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{AB}$ atunci ABCD este paralelogram.

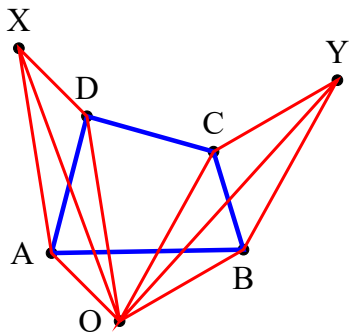


Fig. 138: *Problema 18*

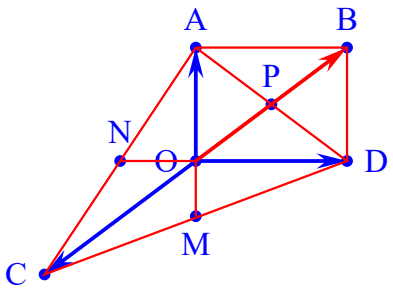


Fig. 139: *Problema 21*

19. Fie $ABCD$ un pătrat de latură $4\sqrt{2}$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

20. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $BC = 8$, iar M mijlocul ipotenuzei. Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

21. Trei vectori de aceeași origine O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ au suma vectorială nulă și modulele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$. Arătați că punctul O este centrul de greutate al triunghiului ABC.

22. Dacă într-un patrulater convex ABCD cu $\{O\} = AB \cap BD$ are loc egalitatea $\sum \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$ atunci ABCD este paralelogram. Arătați că reciproca este adevărată.

23. Fie vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ astfel încât au loc condițiile: $AB = BC = 2\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 60^0$, $CD = 2$, $\widehat{BCD} = 90^0$.

a) Să se determine modulul sumei $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ în ambele situații când D se află de aceeași parte cu fața BC și de cealaltă parte.

b) Aflați $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$

c) Aflați $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$ și $|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}|$ în ambele situații de la a).

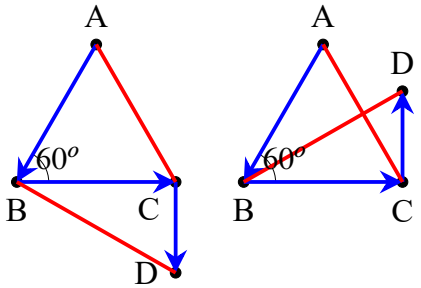


Fig. 140: *Problema 23*

11.2.1 Test de evaluare

1. Fie în plan punctele distincte: A, B, C, D, E și F.

Să se exprime printr-un singur vector suma:

a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}$'

2. Fie ABC un triunghi și M, N, P puncte arbitrare în planul său. Să se arate că se poate forma un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{CP}$ dacă și numai dacă se poate forma un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{CN}$.

3. Se consideră paralelogramul ABCD și un punct O arbitrar.

a) Să se arate că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

b) Pe semidreptele (AB, (BC, (CD și (DA se iau punctele M, N, P și Q astfel încât $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PD}$ și $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{QA}$. Să se arate că are loc relația: $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$.

4. În triunghiul ABC, AB, $\widehat{BAC}=\alpha$, $BC>AB$ și $E\in(BC$, $CE=AB$.

a) Să se evidențieze prin desen punctul D, așa încât $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CE}$. Analizați ambele situații, $E\in(BC)$ și $C\in(BE)$.

b) În fiecare din situațiile de la 4.a), determinați $|\overrightarrow{DA}-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ED})|=\frac{1}{2}BD$ și $|\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=DC$, unde O mijlocul lui (BD).

11.3 Înmulțirea cu scalari a vectorilor

(1) Produsul dintre un vector $\overrightarrow{a}$ și un scalar $\alpha\in\mathbb{R}$ este un vector notat $\alpha\overrightarrow{a}$ definit astfel:

- $\alpha\overrightarrow{a}$ are aceeași direcție cu $\overrightarrow{a}$
- $|\alpha\overrightarrow{a}|=|\alpha|\cdot|\overrightarrow{a}|$
- sensul lui $\alpha\overrightarrow{a}$ este $\begin{cases}\text{același cu al lui } \overrightarrow{a}, \text{ dacă } \alpha>0\\ \text{de sens contrar cu } \overrightarrow{a}, \text{ dacă } \alpha<0\end{cases}$

1. Pe dreapta AB determinați un punct M astfel încât:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;

b) $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$;

c) $2\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;

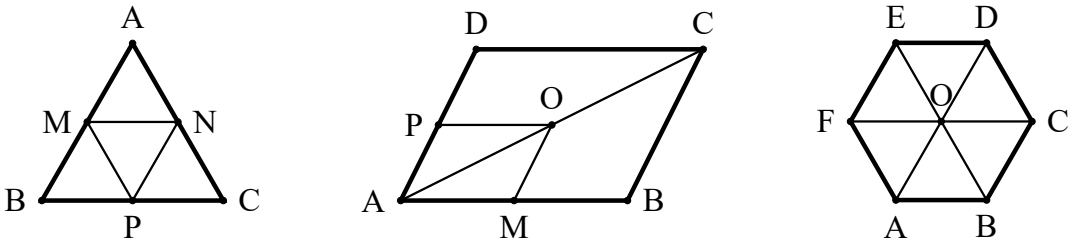
d) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$;

e) $3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{BA}$.

f) $-2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$

Exemplu rezolvat b) Stabilim sensul lui $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM}$ are același sens cu $-2\overrightarrow{AB}$, iar $-2\overrightarrow{AB}$ are același sens cu $\overrightarrow{BA}$, deci $M \in (BA$. Aflăm $|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ etc.

2. În Fig.142, evidențiați vectorii de aceeași direcție și scrieți relațiile dintre ei (condițiile din figuri se subînțeleg)



a) b) c)

Fig. 142: *Exercițiul 2 c)*

Exemplificări: a) $\overrightarrow{MN} = -CP$; b) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{PO}$; c) $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{ED}$.

(2) **Teorema lui Thales:** Pe dreptele suport ale laturilor AB și AC ale triunghiului ABC se iau punctele D și respectiv E așa încât $DE||BC$. Atunci $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

3. Demonstrați vectorial teorema lui Thales.

4. a) Fie triunghiul ABC în care $MN \,||\, BC, M \in AB, N \in AC$ astfel încât $\frac{|AM|}{|AB|} = k$. Exprimați $\overrightarrow{AM}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AM} = f(\overrightarrow{AB})$), în fiecare din cazurile: $M \in (AB)$, $B \in (AM)$, $A \in (BM)$.

b) Pentru fiecare din situațiile anterioare exprimați $\overrightarrow{MN} = f(\overrightarrow{BC})$

c) Dacă $NP \,||\, AB, N \in (AC)$, $P \in (BC)$, exprimați $\overrightarrow{NP} = f(\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{AN} = f(\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{CP} = f(\overrightarrow{BC})$

5. În figura de mai jos $AB \,||\, CD$. Exprimați $\overrightarrow{AB} = f(\overrightarrow{CD})$ și $\overrightarrow{BO} = f(\overrightarrow{OC})$ în fiecare din cazurile $\frac{AO}{OD} = k$ și $\frac{AO}{AD} = k$.

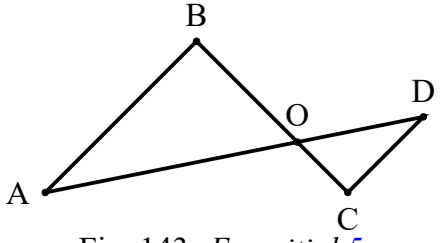


Fig. 143: *Exercițiul 5*

(3) **Proprietățile înmulțirii cu scalari a vectorilor**

(3.1) $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = (\alpha + \beta)\vec{u},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(3.2) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(3.3) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(3.4) Versorul unui vector $\overrightarrow{v}$ este $\frac{1}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v}$ și are modulul 1

6. În triunghiul ABC, $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ și $P \in (AB)$ astfel încât $3BM = MC$, $2NC = NA$ și $BP = 2AP$. Notăm $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Să se exprime $\overrightarrow{MN} = f(\vec{c}, \vec{b})$, $\overrightarrow{MP} = f(\vec{b}, \vec{a})$, $\overrightarrow{NP} = f(\vec{a}, \vec{c})$, $\overrightarrow{AN} = f(\vec{c}, \vec{b})$, $\overrightarrow{CM} = f(\vec{a}, \vec{b})$, $\overrightarrow{BP} = f(\vec{a}, \vec{c})$.

7. În figura alăturată, $EF \parallel BC$ și $DE \parallel AB$. Notăm $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\frac{AF}{AB} = p$. Exprimați:
$\overrightarrow{DF} = f(\vec{a}, \vec{c})$, $\overrightarrow{BE} = f(\vec{a}, \vec{b})$
$\overrightarrow{BF} = f(\vec{a}, \vec{c})$, $\overrightarrow{EF} = f(\overrightarrow{BC})$,
$\overrightarrow{CF} = f(\vec{b}, \vec{a})$
Exemplu rezolvat: $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$, din $\frac{AF}{AB} = p$ rezultă $\overrightarrow{AF} = p\overrightarrow{BA}$, deci $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + p\overrightarrow{BA} = \vec{b} - p\vec{c}$.

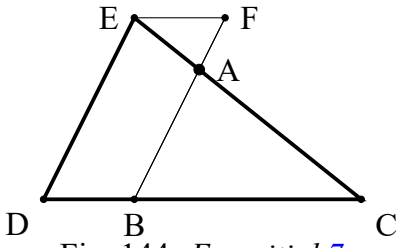


Fig. 144: *Exercițiul 7*

8. În paralelogramul ABCD se consideră punctele $M \in (BC)$ și $N \in (DC)$, așa încât $BM = mBC$ și $CN = nCD$. Notăm $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ și $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Să se exprime în funcție de $\vec{a}$ și $\vec{b}$ vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{ND}$.

9. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = c$, $AD = a$, $DC = b$, baza mică. Notăm cu $\vec{u}$ și $\vec{v}$ versorii vectorilor $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{DC}$, iar $\{O\} = AC \cap BD$, M, N mijloacele bazelor AB respectiv CD. Să se exprime în funcție de $\vec{u}$ și $\vec{v}$ vectorii: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}$.

10. a) Efectuați calculele scriind rezultatul sub forma $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

(1) $5\vec{u} - 4\vec{v} - 3\vec{u} + 3\vec{v}$

(2) $3(-2\vec{u}) - (-2\vec{u})$

(3) $4(\vec{u} - \vec{v}) - 3(\vec{u} - \vec{v})$

(4) $\frac{1}{2}(\vec{u} - 4\vec{v}) + \frac{1}{3}(3\vec{u} + 6\vec{v})$

b) Reprezentați geometric rezultatele obținute pentru doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ arbitrar aleși.

11. Fie $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Exprimați în funcție de $\vec{i}$ și $\vec{j}$ vectorii:

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ și $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(2) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$ și $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

(3) $2(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ și $2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$

(4) $-\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ și $\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Reprezentați geometric rezultatele obținute pentru $\vec{i}$ și $\vec{j}$ aleși în condițiile $\vec{i} \perp \vec{j}$ și $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

12. Fie ABC un triunghi și M, N, P puncte pe laturile BC, CA, AB așa încât $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB}$. Să se arate că se poate forma un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CP}$.

13. Fie hexagonul regulat ABCDEF cu O centrul său. Să se exprime în funcție de $\overrightarrow{AO}$ sumele: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF}$.

14. Pe o tablă sunt desenate punctele A, B, C, D. Vlad construiește punctele A', B', C', D' astfel: A' este simetricul lui A față de B, B' este simetricul B față de C, C' simetricul lui C față de D, iar D' este simetricul lui D față de A. Maria șterge de pe tablă punctele A, B, C, D. Poate Vlad să refacă pozițiile acestor puncte ? Justificați răspunsul, folosind eventual vectori

(Bogdan Enescu–etapa județeană 2003)

(4) **Vectori coliniari**

(4.1) Doi vectori de aceeași direcție se numesc coliniari

Caracterizare: $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ *coliniari* $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta\ (\vec{u} = \alpha\vec{v}$ *sau* $\vec{v} = \beta\vec{u})$

15. Să se verifice coliniaritatea vectorilor indicați scriind și relația corespunzătoare:

a) $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$

b) $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j}$ $\vec{v} = 2\vec{i} + 12\vec{j}$

c) $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ $\vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b}$

d) $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}$ $\vec{v} = \alpha\vec{a}$

16. a) Căutați în figura exercițiului 7 perechi de vectori coliniari și scrieți relațiile dintre ei.

b) Raportându-ne la exercițiul 6, exprimați vectorii următori după cum se cere: $\overrightarrow{AN} = f(\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BP} = f(\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{BM} = f(\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{AC} = f(\overrightarrow{NC})$, $\overrightarrow{CM} = f(\overrightarrow{BC})$.

17. a) Arătați că $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.

b) Arătați că $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.

c) Demonstrați sintetic inegalitatea triunghiului.

(4.2) **Vectori coliniari, puncte coliniare**

Pentru a arăta că trei puncte A, B, C sunt coliniare se caută o relație de forma $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, unde $\vec{u}, \vec{v} \in \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\}$

18. În triunghiul ABC, $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{CP}$ iar $\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Să se arate că punctele A, Q, P sunt coliniare.

19. În triunghiul ABC, $\overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ iar $5\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}$. Să se arate că punctele A, F, E sunt coliniare.

20. a) Fie AB o dreaptă, un punct $O \notin AB$ și un punct M arbitrar. Să se arate că dacă $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ atunci $M \in AB$

b) Dacă $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ determinați poziția lui M față de A și B.

21. Fie $ABCD$ un paralelogram cu M și N mijloacele laturilor BC și CD. Pe (AM) se consideră punctul P așa încât $\frac{PM}{MA} = \frac{1}{5}$. Să se arate că punctele $B,\ P,\ N$ sunt coliniare. (soluție vectorială)

22. a) Fie patrulaterul convex ABCD, O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD iar M și N mijloacele laturilor opuse AD și BC. Dacă punctele M, O, N sunt coliniare, atunci patrulaterul convex este un trapez ori un paralelogram. (soluție vectorială și soluție sintetică)

b) În planul triunghiului ABC oarecare, considerăm punctele D, M, N, P și Q astfel încât $2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC},\ 2\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NP},\ 3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MA}$ și $3\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{QA}$. Arătați că punctele M, N, Q sunt coliniare

(4.3) **Vectori coliniari. Drepte paralele**

Pentru a stabili că două drepte AB și CD sunt paralele, căutăm un $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

(4.4) *Exercițiu rezolvat*: reciproca teoremei lui Thales

Dacă $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ atunci $MN \parallel BC$. (Fig.148)

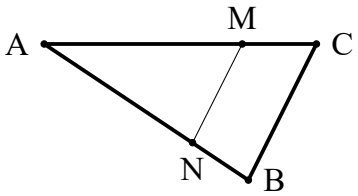


Fig. 148: $MN \parallel BC$ *(4.3)*

Vom căuta un α astfel încât $\alpha\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} = \frac{1}{k}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{k}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}) = \frac{1}{k}\overrightarrow{MN}$, unde $k = \frac{AM}{AB}$.

23. a) Demonstrați proprietățile liniei mijlocii în triunghi.

b) Arătați că mijloacele laturilor unui patrulater convex oarecare sunt vârfurile unui paralelogram. Dați o generalizare și demonstrați proprietatea enunțată. Dați soluții vectoriale și soluții sintetice.

24. În triunghiul ABC se consideră punctele E și F astfel încât

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$.

a) Arătați că $\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{EC}$, aflați α.

b) Găsiți $Q \in BF$ astfel încât: $5\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{FB} + 5\overrightarrow{CQ}$; precizați poziția dreptelor CQ și AB.

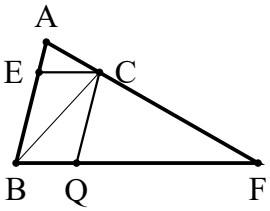


Fig. 149: *Exercițiul 24*

25. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC și E un punct fixat în planul său.

a) Construiți D și F astfel încât: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BE}$ și $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD}$.

b) Arătați că $AFEA'$ este paralelogram.

26. Fie ABCD un patrulater convex cu proprietatea că există un punct O și $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $m\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$. Arătați că ABCD este trapez.

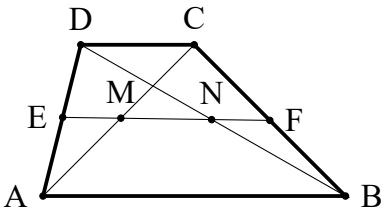
27. În patrulaterul ABCD, notăm cu E și F mijloacele laturilor AD și BC. Arătați că:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{EF}$

b) Dacă $AB + CD = 2EF$ atunci ABCD trapez (soluție vectorială și soluție sintetică pentru b))

28. În trapezul ABCD, cu AB>CD, notăm cu E și F mijloacele laturilor AD și BC și cu P, Q mijloacele diagonalelor AC, BD.

Demonstrați pe cale vectorială următoarele proprietăți cunoscute:
(1) $EF||AB$
(2) $2EF = AB + CD$
(3) $2PQ = AB - CD$ (dați și soluții sintetice)



Exerciții și probleme diverse

(5) Schema vectorului mediană
Dacă $O \notin AB$ și M este mijlocul lui (AB) atunci $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Când într-o problemă apar mijloace de laturi căutăm să recunoaștem modelul vectorului–mediană și scriem relațiile corespunzătoare.

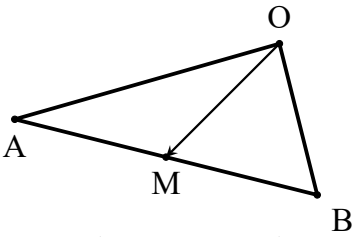


Fig. 151: *Schema vectorului mediană*

29. În patrulaterul ABCD, notăm cu E și F mijloacele diagonalelor AC și BD. Să se arate că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$

30. Fie ABCD un patrulater, M, N mijloacele laturilor AD și BC iar I mijlocul segmentului MN. Să se arate că $\sum \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$.

31. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se arate că $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

32. Să se arate că ABCD este paralelogram dacă și numai dacă:

a) Pentru orice punct M din planul său are loc relația $\sum \overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{MO}$

b) Există un punct M pentru care, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$, $\{O\} = AC \cap BD$.

33. Fie într-un cerc de centru O, două coarde perpendiculare $\{P\} = AB \cap CD$. Să se arate că au loc egalitățile:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OP}$; b) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

34. Coardele AB și CD ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, situate la distanțele 6, respectiv 8 de centrul cercului sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P. Se consideră punctele M și N mijloacele coardelor AB, respectiv CD.

a) Să se arate că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

b) Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{D}$.

35. a) Suma a trei vectori de modul egal, având același punct de aplicație este $\overrightarrow{0}$. Precizați natura poligonului determinat de extremitățile acestor vectori.

b) Suma a patru vectori de modul egal având același punct de aplicație este $\overrightarrow{0}$. Precizați natura poligonului determinat de extremitățile acestor vectori.

36. Fie ABCD un paralelogram. Să se determine toate punctele din planul său pentru care $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$

37. Pe ipotenuza (AB) a triunghiului dreptunghic OAB se consideră punctele D și E astfel încât AD<AE. Fie F proiecția punctului D pe OA și G proiecția lui D pe OB. Notăm L, M, N, P, R mijloacele segmentelor (OF), (FD), (DE), (EG) și (GO). Să se arate că $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{PL}$, și $\overrightarrow{MR}$ pot forma un triunghi.

38. Triunghiurile ABC și $A'B'c'$ au același centru de greutate G. Arătați că $|\overrightarrow{AA'}|, |\overrightarrow{BB'}|, |\overrightarrow{CC'}|$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

39. În triunghiul ABC, H este ortocentrul său, iar A' punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului. Să se arate că:

a) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}$ b) $\sum \overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{HO}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ (relația lui Sylvester)–O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

40. Stabiliți natura patrulaterului ABCD dacă:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CB}$, unde O este intersecția diagonalelor.

41. Se consideră punctele M,N, P și □ astfel încât $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}$. Demonstrați că punctele N și P coincid.

42. Să se demonstreze că dacă într-un patrulater convex, diagonalele și segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse sunt concurente, atunci patrulaterul este paralelogram.

(A.Oțet, etapa locală, Brașov, 1986)

43. Fie ABCD un patrulater fixat și M un punct variabil în plan. Stabiliți dacă vectorul $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ trece printr-un punct fix.

(etapa județeană, Alba, 2000)

44. Într-un triunghi ABC, mediana AA' este locul geometric al mijloacelor segmentelor MN cu $M\in AB$ și $N\in AC$. și $MN\|BC$ (Soluție sintetică și soluție vectorială)

11.3.1 Test de evaluare

1. Să se reprezinte în planul paralelogramului ABCD, punctele M, N, P, Q îndeplinind condițiile:

$2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CD}$; $2\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{AB}$; $4\overrightarrow{QA}=3\overrightarrow{CB}$

2. Fie punctele $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ N$ mijlocul lui $(B_1B_2),\ P$ mijlocul lui $(B_3B_4),\ R$ mijlocul lui (NP) și O un punct arbitrar.

Să se arate că:

a) $\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OB_i}=4\overrightarrow{OR}$ $\quad$ b)$3\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{RB_4}$, unde $3\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{B_3N}$

3. Pe laturile triunghiului ABC se iau punctele M, N, P astfel încât $4\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC},\ 3\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$.

Arătați că $8\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{NP}=5\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$.

4. Fie O ortocentrul triunghiului echilateral ABC.

(a) Arătați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

(b) Dacă $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$, calculați $\left|\overrightarrow{OD}\right|$, unde D este simetricul lui O față de BC.

11.4 Descompunerea unui vector după doi vectori dați necoliniari și nenuli

(1) Vectori necoliniari–caracterizare

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ de direcții diferite sunt necoliniari;

(1.1) *Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt necoliniari, condiția $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ atrage $\alpha=\beta=0$*

Exercițiu rezolvat: soluția vectorială a teoremei lui Thales (§3,(2))

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{BA}+p\overrightarrow{AC}$ și cum $DE\parallel BC$ avem $\overrightarrow{DE}=\alpha\overrightarrow{BC}=\alpha(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$, deci $k\overrightarrow{BA}+p\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{BA}+\alpha\overrightarrow{AC}$. Vectori $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari și conform cu (1.1) rezultă $k=\alpha$ și $p=\alpha$, deci $k=p$.

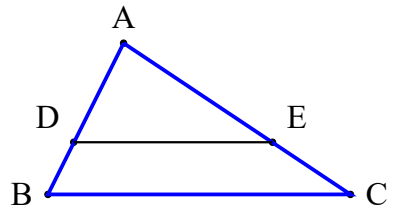


Fig. 159: *Teorema lui Thales*

1. În triunghiul $ABC,\ M$ este mijlocul lui $(AB),\ N\in AC$ și $P\in BC$ așa încât $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{CP}$ și $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$.

a) Exprimați pe $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

b) Arătați că $M,\ N,\ P$ sunt coliniare

2. Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ necoliniari și nenuli. Să se arate că:

a) Dacă $x\vec{u}+y\vec{v}=x'\vec{u}+y'\vec{v}$ atunci $x=x'$ și $y=y'$

b) Vectorii nenuli $\vec{a}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ și $\vec{b}=\alpha'\vec{u}+\beta'\vec{v}$, cu $\alpha,\alpha',\beta,\beta'\neq 0$, sunt coliniari dacă și numai dacă $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$.

3. Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori necoliniari.

a) Să se arate că vectorii $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$ și $\vec{b}=-\vec{u}+3\vec{v}$ sunt necoliniari

b) Să se arate că vectorii $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$ și $\vec{b}=\vec{u}-2\vec{v}$ și $\vec{c}=-2\vec{u}+\vec{v}$ sunt doi câte doi necoliniari și se poate forma un triunghi cu ei.

c) Găsiți o condiție necesară și suficientă ca vectorii $\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ și $\vec{b} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v}$ să fie necoliniari.

d) Propuneți și voi exemple de perechi de vectori necoliniari și rezolvați cerințele de la a) și b).

Indicatie: a) Dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ ar fi coliniari, ar exista un α astfel încât $\alpha\vec{a} = \vec{b}$, adică $\alpha(\vec{u} + 2\vec{v}) = -\vec{u} + 3\vec{v}$ sau $(\alpha + 1)\vec{u} + (2\alpha - 3)\vec{v} = \vec{0}$ de unde $\alpha + 1 = 0$ și $2\alpha - 3 = 0$ conduc la contradicție.

c) $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$ (justificați)

(2) Descompunerea unui vector după două direcții date de doi vectori necoliniari dați

$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ se numesc *componentele lui* $\vec{u}$ după direcțiile lui $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ (vezi Fig.160)

$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x\vec{a} + y\vec{b}$ este descompunerea lui $\vec{u}$ după vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, iar x și y sunt *coordonatele lui* $\vec{u}$ în raport cu vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

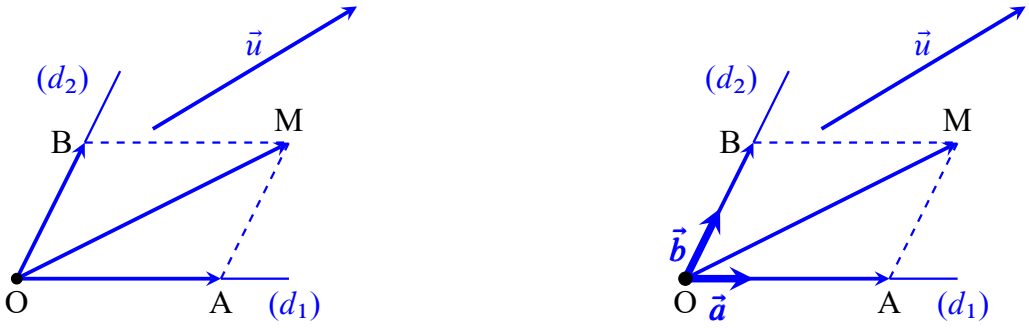


Fig. 160: *Descompunerea unui vector după două direcții*

4. Descompuneți vectorii următori, după vectorii necoliniari indicați în Fig.161

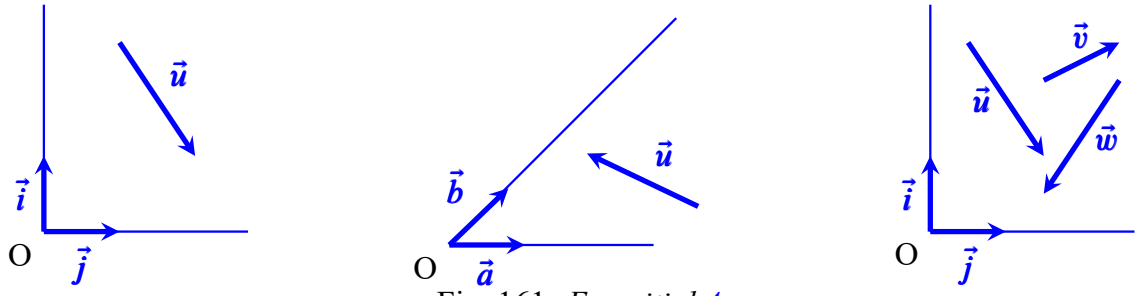


Fig. 161: *Exercițiul 4*

5. a) Fie AB o dreaptă și O$\notin$AB. Să se arate că un punct M se află pe AB dacă și numai: dacă $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:a) Fie M∈AB. Descompunem $\overrightarrow{OM}$ după vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ construind paralelogramul $OA'MB'$. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, dar $\frac{OA'}{OA} = \frac{BM}{BA} = \frac{BB'}{BO} = \alpha$, de aici $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB'} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$. Reciproc, dacă $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$ atunci $M \in AB$. În adevăr $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$, de unde $\overrightarrow{AM} = (1-\alpha)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$.

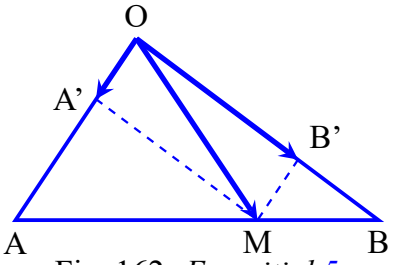


Fig. 162: *Exercițiul 5*

b) Reveniți la exercițiul 1 și descompuneți pe $\overrightarrow{BN}$ în funcție de $\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BC}$ apoi în funcție de $\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{BP}$. Utilizând proprietatea de al punctul a) stabiliți că M,N,P sunt coliniare, arătând că există α, astfel încât $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BM} + (1-\alpha)\overrightarrow{BP}$.

Rezolvare: b) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Cum $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BP} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BP} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

6. Fie ABC un triunghi și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{MA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{CN}$ și $\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$.

a) Reprezentați punctele M, N, P în plan

b) Găsiți componentele lui $\overrightarrow{BN}$ după direcțiile lui $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{BA}$.

c) Descompuneți pe $\overrightarrow{BN}$ în funcție de $\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{BP}$ și arătați că punctele M, N, P sunt coliniare.

7. a) Fie xOy un unghi și Oz bisectoarea interioară. Dacă $M \in Oz$, $A \in Ox$ și $B \in Oy$ exprimați $\overrightarrow{OM}$ în funcție de $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

Rezolvare: Descompunem $\overrightarrow{OM}$ după $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ obținând rombul $OA'MB'$ (de ce romb ?) unde $\overrightarrow{OA'} = \frac{\alpha}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB'} = \frac{\alpha}{|\overrightarrow{OB}|}\overrightarrow{OB}$ deci $\overrightarrow{OM} = \alpha\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} + \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$

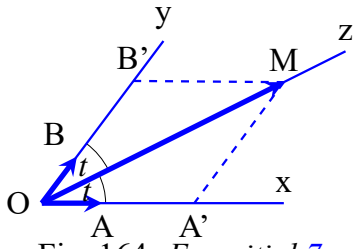


Fig. 164: *Exercițiul 7*

b) Determinați și vectorul care dă direcția bisectoarei exterioare a unghiului xOy.

8. În triunghiul ABC, G este centrul de greutate iar A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB; Găsiți α și β în fiecare din situațiile:

a) $\overrightarrow{GA} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{GA'} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{CB} + \beta\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{GB'} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{CA}$

9. În triunghiul ABC, $D \in BC$ astfel încât $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$. Aflați α și β în fiecare din descompunerile după direcțiile indicate:

a) $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AB}$

10. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = b$, $CD = a, b > a$ și notăm $\{O\} = AC \cap BD$. Aflați în funcție de a și b pe α și β în fiecare din descompunerile după vectorii indicați:

a) $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$
c) $\overrightarrow{CO} = \alpha\overrightarrow{CD} + \beta\overrightarrow{CB}$
d) $\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BC}$

11. În triunghiul dreptunghic ABC de catete $AC = b$ și $AB = c$, fie $D = pr_{BC}A$ și M mijlocul lui DC. Descompuneți $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AM}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

12. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de centru O. Determinați α și β în fiecare din descompunerile:

a) $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{OF} + \beta\overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{ED} + \beta\overrightarrow{AO}$
c) $\overrightarrow{FC} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{CA}$
d) $\overrightarrow{BC} = \alpha\overrightarrow{DE} + \beta\overrightarrow{OB}$
e) $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{OD} + \beta\overrightarrow{OF}$
f) $\overrightarrow{EA} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{CD}$

13. În paralelogramul ABCD, $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ și $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AN}$. Exprimați pe $\overrightarrow{AN}$ în funcție de $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AB}$. Aflați k astfel încât M, N, B coliniare.

14. Fie O intersectiea diagonalelor patrulaterului convex ABCD, M un punct de pe latura (AB) si N un punct de pe latura (CD). Să se arate că punctele O, M si N sunt coliniare dacă si numai dacă
$AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD$.

Exerciții și probleme diverse

15. Dacă pe laturile Ox și Oy din exercițiul 7 se consideră punctele C respectiv D așa încât $AC = BD$, să se arate că dreapta ce unește mijloacele segmentelor AB și CD este paralelă cu bisectoarea unghiului xOy.

16. Fie ABCD paralelogram și punctele M, N, P așa încât $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CP} = p\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AD}$, $n, p \neq 1$

a) Exprimați $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{NP}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.
b) Determinați relația dintre k, n, p pentru care $AM \parallel NP$.

17. În triunghiul ABC, fie $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$. Să se arate că MN trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$ (soluție vectorială)

18. Se dă triunghiul ABC. Se consideră $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Arătați că mijloacele segmentelor (AB), (AC), (DE) sunt coliniare. (soluție vectorială)

(etapa locală, Suceava, 2000)

19. Fie ABC un triunghi și M un punct în planul său astfel ca $\overline{MA}+\overline{MC}=\alpha\overline{MB}$. Determinați poziția lui M când $\alpha\in\left\{1,-1,4,-2,\frac{2}{3}\right\}$.

20. Fie xOy un unghi și $M\in Int\ \widehat{xOy}$ astfel încât $\widehat{xOM}=a$ și $\widehat{MOy}=b$. Descompuneți vectorul $\overrightarrow{OM}$ după direcțiile lui Ox și Oy.

21. a) Dacă vectorii $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ au modulele 1,2,3 și $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{w}})=(\widehat{\vec{v},\vec{w}})=120^0$, să se descompună $\vec{w}$ după direcțiile lui $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

b) Același exercițiu dacă $|\vec{u}|=|\vec{v}|=2$ și $|\vec{w}|=4$.

(3) Descompunerea unui vector în raport cu doi vectori dați necoliniari și nenuli. Coordonatele unui vector.

(3.1) *O pereche de vectori necoliniari $(\vec{i},\vec{j})$ formează o bază a planului. Vectorul $\vec{u}$ admite o descompunere unică în baza $(\vec{i},\vec{j})$; $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{u}(x,y)$ x,y coordonatele lui $\vec{u}$ în baza $(\vec{i},\vec{j})$.*

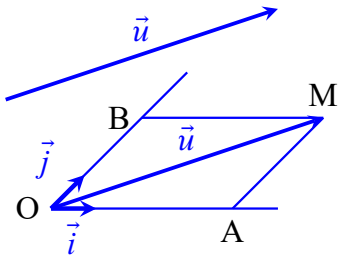


Fig. 172: *Exercițiul 21 (3.1)*

(3.2) *Dacă $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ și $\vec{u}(x,y)$ atunci $M(x,y)$ în reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$*

(3.3) *Dacă $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ și $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ atunci*:

- $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x=x'$ și $y=y'$
- $\vec{u}+\vec{v}$ $(x+x',y+y')$ și $\alpha\vec{u}$ $(\alpha x,\alpha y)$

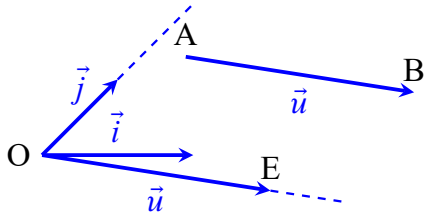


Fig. 173: *Exercițiul 21 (3.3)*

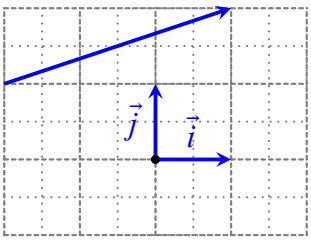


Fig. 174: *Exercițiul 21*

(3.4) *Dacă $\vec{u}$ nu are originea în O, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, unde $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ atunci $\vec{u}(x_B-x_A,y_B-y_A)$.*

22. Fixați pe foaia de pătrățele un reper ortonormat $(O,\vec{i},\vec{j})$ și determinați coordonatele unor vectori aleși de voi așa încât originea și extremitatea să fie în nodurile rețelei de pătrate.

Exemplu rezolvat: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, unde $A(-2,2)$, $B(1,3)$ Atunci $\overrightarrow{AB}(3,1)$, deci $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}$

23. a) Fie $A(2,-3)$ și $B(4,1)$. Aflați coordonatele punctului M pentru care $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Rezolvare: $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$. Condiția $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ devine $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$ de unde $(x_A - x_M, y_A - y_M) = (x_M - x_B, y_M - y_B)$ de unde $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ și $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ coordonatele mijlocului segmentului AB; în cazul dat M(3,−1)

b) Aceeași cerință pentru $C(0,-4)$ și $D(3,1)$; $E(-1,4)$ și $F(2,-3)$.

c) Dacă $A(x-2, 3+y)$ iar $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} + 2\vec{j}$ să se afle x și y știind că Q este mijlocul segmentului AB, unde $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

d) Dacă $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$ și $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ aflați simetricul lui A față de mijlocul lui BC.

24. a) Determinați coordonatele vectorilor
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ unde $A(1,-2), B(0,3), C(3,-4), D(-2,0), E(1,4), F(-3,2)$.

b) Desenați într-un reper cartezian ortonormat câte un reprezentant al fiecăruia din cei trei vectori având originea în O.

25. Fie vectorii de coordonate $\vec{a}(0,3)$, $\vec{b}(-1,2)$, $\vec{c}(5,2)$, $d(0,-4)$.

a) Descompuneți câte un reprezentant al fiecăruia dintre ei în reperul ortonormat (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) în care sunt considerați.

b) Desenați în reperul (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) câte doi reprezentanți ai fiecăruia dintre ei, unul cu originea în O, celălalt arbitrar în plan.

c) Determinați coordonatele vectorilor:
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$; $2\vec{c} + \vec{d} - \vec{a}$; $3\vec{a} + \vec{d} - 2\vec{c} + \vec{b}$

d) Scrieți fiecare vector obținut la c) sub forma $x\vec{i} + y\vec{j}$ (descompus în baza $(\vec{i}, \vec{j})$) și reprezentați-l în reperul respectiv.

(3.5) Dacă $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ și $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ condiția ca $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie coliniari se exprimă prin $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}, x' \neq 0,\ y' \neq 0$.

26. Determinați x astfel încât vectorii din fiecare pereche să fie coliniari:

a) $\vec{u}(x-1, 2)$ și $\vec{v}(3,1)$

b) $\vec{u}(3x, 2)$ și $\vec{v}\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$

c) $\vec{u}(2,-3)$ și $\vec{v}(2x-1, x)$

d) $\vec{u}(\sqrt{3}x, -1)$ și $\vec{v}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 2\right)$

27. Fie punctele $A(-1,-2)$, $B(3,1)$, $C(\alpha, 5)$

a) Să se afle α astfel încât A, B, C coliniare.

b) Pentru $\alpha = 1$, să se afle $D(x,y)$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$.

c) Să se afle coordonatele punctului E așa încât $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$.

d) Să se afle coordonatele punctului F așa încât $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{FC} = \vec{0}$.

28. Determinați numerele reale x și y, știind că vectorii $\vec{u} = (2x+1)\vec{i} + 4\vec{i}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + (y+1)\vec{j}$ sunt egali.

29. a) Se dau vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{w} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Să se arate că $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ coliniar cu $\vec{j}$

b) Dacă $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, și $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, să se determine vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ și coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

30. Să se afle α astfel încât vectorii din perechile următoare să fie coliniari:

a) $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \\ \vec{v} = (\alpha - 1)\vec{i} - \vec{j} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{u} = (\alpha - 1)\vec{i} - 3\vec{j} \\ \vec{v} = \alpha\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec{u} = (2\alpha^2 - 1)\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = 3\vec{j} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \vec{u} = -2\vec{i} \\ \vec{v} = \alpha\vec{i} + (3\alpha - 1)\vec{j} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \vec{u} = (\alpha - 1)\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} + (\alpha + 1)\vec{j} \end{cases}$

11.4.1 Test de evaluare

1. În planul raportat la reperul $(O, \bar{u}, \bar{v})$ considerăm vectorii:

$\bar{a} = (2\alpha - 1)\bar{u} + (2\beta + 1)\bar{v}$

$\bar{t} = (\alpha - 2)\bar{u} + \beta\bar{v}$

$\bar{c} = 3\alpha\bar{u} + (3\beta - 1)\bar{v}$

Să se discute după valorile lui α și β reale, coliniaritatea (necoliniaritatea) acestor vectori.

2. Fie ABC un triunghi oarecare, D mijlocul lui (BC) și $E \in (AC)$ astfel încât $2 \cdot CE = EA$. Se notează $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$

a) Să se exprime vectorul $\overrightarrow{AD}$ în funcție de $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

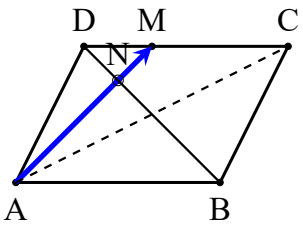
b) Să se exprime vectorul $\overrightarrow{DE}$ în funcție de $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

3. Se consideră paralelogramul ABCD și $\{O\} = AC \cap DB$. Descompuneți vectorii $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}$ după direcțiile vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

4. În paralelogramul $ABCD$ fie punctul $M \in (DC)$ și $N \in (BD)$ astfel încât $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}$ și $4\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB}$

a) Să se arate că $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3 \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}{3}$.

b) Să se exprime vectorul $\overrightarrow{AN}$ în funcție de $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB}$ și să se arate că punctele A, N, M sunt coliniare.



11.5 Vectorul de poziție al unui punct în raport cu un pol (reper)

(1) Fie O un punct în spațiu (numit și pol sau punct de reper)

Vectorul de poziție al unui punct A în raport cu reperul O este $\overrightarrow{OA}$, notat $\vec{r}_A$ sau $\vec{r}$ dacă nu există confuzie.

(1.1) Două puncte A_1 și A_2 coincid dacă și numai dacă vectorii de poziție ai lor în raport cu același pol sunt egali, $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ sau $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_{A_2}$.

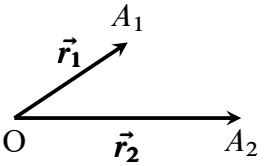


Fig. 175: *Proprietatea (1.1)*

(1.2) Vectorii $\vec{r}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ și $\vec{r}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ sunt ortogonali $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

Demonstrație. Vezi figura 175. $\vec{r}_1 \perp \vec{r}_2 \Leftrightarrow \triangle A_1OA_2$ este dreptunghic, adică $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2 = \left|\vec{r}_1\right|^2 + \left|\vec{r}_1\right|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2 = \left|\vec{r}_1\right|^2 + \left|\vec{r}_1\right|^2 \Leftrightarrow (a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

(1.3) • Dacă $O_1 \neq O_2$ sunt două repere și A un punct arbitrar atunci $\overrightarrow{O_1A} \neq \overrightarrow{O_2A}$.

• *Rezolvarea* unor probleme este facilitată de introducerea în joc a vectorilor de poziție în raport cu un reper ales convenabil. În unele probleme au fost deja utilizați

• Exercițiu: Evidențiați vectorii de poziție ce apar în problemele 26,30,32, în regula (5), din §3

1. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{N}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = m\vec{i} + (m+1)\vec{j}$ sunt ortogonali.

2. Fie o dreaptă BC, $M \in BC$ și O un punct fixat în plan. Notăm $\vec{r}_M, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ vectorii de poziție ai lui M, B, C în raport cu O. Dacă $\vec{r}_M = -2\vec{r}_B + 3\vec{r}_C$ descompuneți pe $\vec{r}_M$ după $\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{CO}$.

3. În patrulaterul ABCD, notăm cu O_1, O_2 mijloacele diagonalelor (AC) și respectiv (BD). Dacă $m \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$ pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ atunci ABCD paralelogram.

(M. Chiriță)

4. a) În triunghiul ABC se notează cu A', B', C' mijloacele laturilor BC, AC și AB. Pentru orice punct O al spațiului, rezultanta vectorilor de poziție al vârfurilor triunghiului este aceeași cu rezultanta vectorilor de poziție ai mijloacelor laturilor triunghiului ABC.

b) Arătați că $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, utilizând vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului.

5. a) Anticentrul unui patrulater inscriptibil este punctul E de concurență al dreptelor duse din mijlocul fiecărei laturi perpendiculare pe latura opusă. Arătați vectorial sau sintetic existența lui E.

b) Dacă E este anticentrul patrulaterului inscriptibil ABCD, atunci $2\vec{r}_E = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D$, punctul de reper fiind centrul cercului circumscris.

6. Anticentrul unui patrulater inscriptibil ortodiagonal coincide cu punctul de intersecție al diagonalelor sale. (soluție vectorială și soluție sintetică)

7. Segmentul (BC) este împărțit în n părți egale de punctele: $B=B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}, B_n = C$. Să se arate că $\vec{r}_B + \vec{r}_C = \vec{r}_{B_k} + \vec{r}_{B_{n-k}}$, $0 \leq k \leq n$

8. Fie MNP triunghiul median al triunghiului ABC (M,N,P mijloacele laturilor ΔABC) și $A'B'C'$ triunghiul al cărui triunghi median este ΔABC ($B'C' \parallel BC, A'C' \parallel AC,\ B'A' \parallel AB$ și $A' \in B'C', B' \in A'C', C' \in A'B'$). Să se arate că au loc egalitățile de tipul:

a) $\vec{r}_A + \vec{r}_M = \vec{r}_P + \vec{r}_N$; b) $\vec{r}_A + \vec{r}_{A'} = \vec{r}_B + \vec{r}_C$

Scrieți și celelalte egalități de tipul a) și b) analoage.

9. În planul paralelogramului ABCD se consideră punctele M, N, P, Q astfel încât $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DQ}$. Să se demonstreze că MNPQ este paralelogram.

(etapa locală, Teleorman, Sălaj,–2003)

10. Pe laturile paralelogramului ABCD se construiesc, în exterior, triunghiurile echilaterale ABM, BCN, DCP și ADQ. Dacă $G_1,\ G_2,\ G_3$, și respectiv G_4 sunt centrele lor de greutate, să se arate că:

a) $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

b) $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{CG_3} = \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{DG_4}$.

(2) Vectorul de poziție al unui punct ce împarte un segment într-un raport dat

(2.1) *Fie* $M \in (AB)$ *așa încât* $\dfrac{MA}{MB} = k$ *și* O *un punct de reper. Atunci* $\vec{r}_M = \dfrac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k}$ *sau*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k} = \frac{MB \cdot \overrightarrow{OA} + MA \cdot \overrightarrow{OB}}{AB}$$

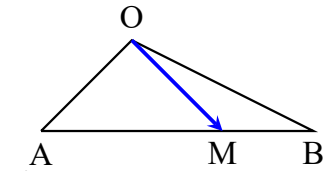


Fig. 180: *Proprietatea 2.1*

11. a) Găsiți formula analoagă lui (2.1) în cazul când $M \in AB - [AB]$.

b) Demonstrați sintetic și vectorial că pentru $M \in (AB)$, $OM < \dfrac{OA + kOB}{1+k}$

12. Fie patrulaterul ABCD în care $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{BC},\ k > 0$. Exprimați vectorul de poziție al vârfului D în funcție de vectorii de poziție ai vârfurilor A,B și C.

13. Fie M, N, P trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC și O un punct de reper arbitrar în spațiu. Să se arate că $\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C = \vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P$ dacă și numai dacă $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA} = \dfrac{AP}{PB}$.

(Papus)

14. În patrulaterul ABCD, $M \in AD,\ N \in BC$ ambele interioare sau ambele exterioare segmentelor (AD) și (BC) astfel încât $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{BN}{CN} = k$. Arătați că $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}}{1+k}$ pe două căi:

a) utilizând vectorii de poziție $\vec{r}_M$ și $\vec{r}_N$ în raport cu un pol oarecare

b) o soluție directă fără a recurge la vectori de poziție.

c) Demonstrați sintetic și vectorial inegalitatea:
$MN \leq \dfrac{AB + kDC}{1+k}$, cu egalitate dacă și numai dacă $AB \parallel DC$.

15. Notăm cu $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$ vectorii de poziție a patru puncte oarecare A,B,C,D din plan în raport cu un reper O mobil. Să se determine locul geometric al lui O pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{r}_A + k\vec{r}_B$ și $\vec{v} = \vec{r}_C + k\vec{r}_D$ sunt coliniari, $k \in \mathbb{R}^*$.

16. Se dă triunghiul ABC si punctele $E \in AB$, $F \in (AC)$ a.i. $\frac{AE}{EB} = \frac{FC}{AF} = \frac{1}{4}$ Dacă M este mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii AC iar R mijlocul segmentului EF, arătati că punctele M, R, N sunt coliniare.

Olimpiada locală, Buzău, 2013

17. Fie ABCD un trapez $AB \parallel CD$, $\{Q\} = AC \cap BD$. Paralela prin Q la AB taie AD și BC în E și F.

a) Arătați că $2\vec{r}_Q = \vec{r}_E + \vec{r}_F$ și deduceți de aici că $QF = QE$.

b) Demonstrați vectorial și sintetic că mijloacele bazelor, punctul Q și punctul de intersecție al suporturilor laturilor neparalele sunt coliniare.

18. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$ și $N \in AC$ și P mijlocul lui MN. Să se arate că dacă $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{PA}$ atunci BN și CP sunt mediane.

19. Se considera triunghiul ABC si punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (MN)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{5}$ și $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Să se calculeze $\frac{AN}{NC}$.

Etapa locală, 2013, Brașov

20. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, punctele M, N astfel încât $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{NC}$, $k > 0$, iar punctele P, Q și R mijloacele segmentelor $[AB]$, $[CD]$, respectiv $[MN]$.

a) Demonstrați că punctele P, Q și R sunt coliniare.

b) Determinați valoarea numărului real $k > 0$ astfel încât patrulaterul $MPNQ$ să fie paralelogram.

21. În triunghiul ABC, $EF \parallel BC$, $E \in AB$, $F \in AC$. Fie $M \in (EF)$ și $N \in (BC)$, așa încât $\frac{ME}{MF} = \frac{NB}{NC}$. Exprimați $\vec{r}_M = f(\vec{r}_N)$. Sunt punctele A, M, N coliniare ? (soluții vectoriale și soluții sintetice)

22. În patrulaterul ABCD se consideră punctele M,N,P,Q pe laturile AB, BC, CD, DA în condițiile: $\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC} = \alpha$ și $\frac{AQ}{QD} = \frac{BN}{NC} = \beta$. Dacă notăm $\{O\} = MP \cap QN$ să se arate că $\frac{MO}{OP} = \beta$ și $\frac{QO}{ON} = \alpha$.

23. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului ABCD se consideră punctele M, N, P, Q așa încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA}$. Să se arate că MNPQ paralelogram dacă și numai dacă ABCD paralelogram.

(3) Vectorii de poziție ai unor puncte remarcabile în triunghi

- Amintim notațiile consacrate: G – intersecția medianelor în triunghi – centrul de greutate al „ plăcii” triunghiulare; I – intersecția bisectoarelor interioare – centrul cercului înscris în triunghi; H – intersecția înălțimilor – ortocentrul triunghiului; O – intersecția mediatoarelor – centrul cercului circumscris triunghiului.
- Punctul de reper al vectorilor de poziție al punctelor respective se va nota de obicei cu O –a nu se confunda cu centrul cercului circumscris.
- Concurența liniilor importante în triunghi și formulele vectorilor de poziție al punctelor amintite le propunem cu titlu de exerciții:

(3.1) a) Demonstrați sintetic și vectorial concurența medianelor.
b) G este centrul de greutate al $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
c) Există un singur punct M în spațiu pentru care $\sum \overrightarrow{MA}=\vec{0}$
d) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, O un punct arbitrar

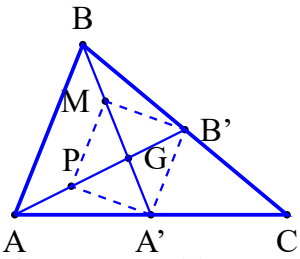


Fig. 186: *Problema 3.1*

Soluție: a) O soluție sintetică: Fie $\{G_1\}=AA'\cap BB', \{G_2\}=AA'\cap CC'$, AA', BB', CC' mediane și M, P mijloacele segmentelor AG_1, BG_1. Se obține $MPA'B'$ paralelogram, de unde $G_1M=MA$ și $G_1M=G_1A'$ deci $\frac{G_1A'}{G_1A}=\frac{1}{2}$ etc. Analog $\frac{G_1B'}{G_1B}=\frac{1}{2}$. Apoi se alege AA' și CC' și se repetă raționamentul și se obține $\frac{G_1A'}{G_1A}=\frac{G_2A'}{G_2A}=\frac{1}{2}\Rightarrow G_1=G_2$.

Pentru o soluție vectorială fie G_1 situat pe mediana AA' astfel încât $\frac{GA}{GA'}=2$, atunci $\vec{r}_{G_1}=\frac{\vec{r}_A+2\vec{r}_{A'}}{3}=\frac{\vec{r}_A+2\frac{\vec{r}_B+\vec{r}_C}{2}}{3}=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}$. Luând apoi G_2 pe mediana BB' astfel încât $\frac{GB}{GB'}=2$ se obține $\vec{r}_{G_2}=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}$ etc.

b) Dacă G este centrul de greutate avem $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}=-\overrightarrow{GA}\Rightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$.

c) Dacă M este un punct din plan pentru care $\sum\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ din $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{MA}$ obținem $3\overrightarrow{MG}+\sum\overrightarrow{GA}=\sum\overrightarrow{MA}$ și de aici $M=G$.

d) $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA'}}{3}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$

(3.2)

a) Dacă AD este bisectoarea interioară a $\widehat{BAC}$, cu $D\in(BC)$ atunci $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (t. bisectoarei); Aceeași relație are loc și pentru bisectoarea exterioară. Demonstrați sintetic și vectorial teorema bisectoarei.

b) $\overrightarrow{OD}=\frac{b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{b+c}$. c) $\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$

d) Demonstrați sintetic și vectorial concurența bisectoarelor interioare.

Soluție: a) O soluție sintetică. Ducem $CM \| AD \Rightarrow \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACM = \sphericalangle AMC \Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BMC$ și $\triangle MAC$ isoscel $(AM = AC)$. $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AM} = \dfrac{BA}{AC}$

O soluție vectorială. Notăm $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \vec{u}$ și $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \vec{v}$ versorii semidreptelor [AB și [AC, și $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Deoarece [AD este bisectoarea unghiului format de $\vec{u}$ și $\vec{v}$, rezultă că $\overrightarrow{AD}$ și $\vec{w}$ sunt coliniari, deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$. Cu notațiile obișnuite avem $\overrightarrow{AB} = c \cdot \vec{u}, \overrightarrow{AC} = b \cdot \vec{v}$ și $\overrightarrow{AD} = \alpha\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$.

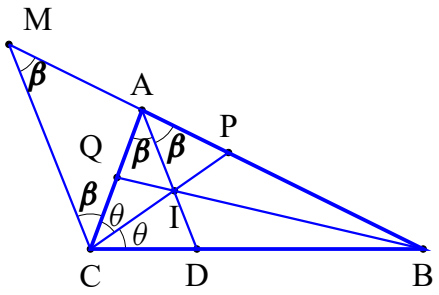


Fig. 187: *Problema 3.2*

Fie $k = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$. Din $\alpha\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha}{c} = \dfrac{1}{k+1} \\ \dfrac{\alpha}{b} = \dfrac{k}{k+1} \end{cases}$

deducem $k = \dfrac{c}{b} = \dfrac{AB}{AC}$.

b) $\dfrac{BD}{DC} = k = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1+k} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \dfrac{c}{b}\overrightarrow{OC}}{1 + \dfrac{c}{b}} = \dfrac{b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{b+c}$

c) $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \dfrac{DC}{CB} = \dfrac{b}{b+c} \Rightarrow DC = \dfrac{ab}{b+c}$; CI bisectoare în $\triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{b+c}{a} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \dfrac{b+c}{a}\overrightarrow{OD}}{1 + \dfrac{b+c}{a}} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + (b+c)\overrightarrow{OD}}{a+b+c} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + (b+c)\dfrac{b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{b+c}}{a+b+c} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$.

d) Notând cu $I_1 = AD \cap CP$ și $I_2 = CP \cap BQ$ obținem analog că vectorii de poziție $\overrightarrow{OI_1} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} = \overrightarrow{OI_2}$ de unde $I_1 = I_2$.

(3.3) Fie A', B', C' picioarele înălțimilor în triunghiul ABC

a) Arătați că $\dfrac{BA'}{A'C} \cdot \dfrac{CB'}{B'A} \cdot \dfrac{AC'}{C'B} = 1$ (soluție sintetică)

b) Demonstrați vectorial și sintetic (fără a utiliza teorema lui Ceva) concurența înălțimilor în triunghi.

Soluție: a) $\triangle ABB' \sim \triangle ACC' \Rightarrow \dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{AC}{AB}$, $\triangle ACA' \sim \triangle BCB' \Rightarrow \dfrac{CB'}{CA'} = \dfrac{BC}{AC}$, $\triangle BCC' \sim \triangle BAA' \Rightarrow \dfrac{BA'}{BC'} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{AC'}{AB'} \cdot \dfrac{CB'}{CA'} \cdot \dfrac{BA'}{BC'} = \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{BC}{AC} \cdot \dfrac{AB}{BC} = 1$.

Metoda a II-a $AB' = c\cos A$, $CB' = a\cos C$ etc.

b) O soluție sintetică:

Fie triunghiul ABC și A', B', C' - picioarele perpendicularelor vârfurilor pe laturile opuse. Prin vârfurile triunghiului ABC ducem paralele la laturile opuse, care se intersectează în punctele A'', B'', C'' ca în figura alăturată. Din construcție, $ABCB''$ și $BCAC''$ sunt paralelograme, deci $|BC| = |AC''| = |AB''|$. Pentru că $BC \| B''C''$ și $AA' \perp BC$, rezultă că $AA' \perp B''C''$. Deci AA'' este mediatoarea segmentului $B''C'$. Analog, BB' și CC' sunt mediatoarele segmentelor $A''C''$ respectiv $A''B''$. Prin urmare, conform concurenței mediatoarelor unui triunghi, rezultă că și înălțimile triunghiului ABC sunt concurente.

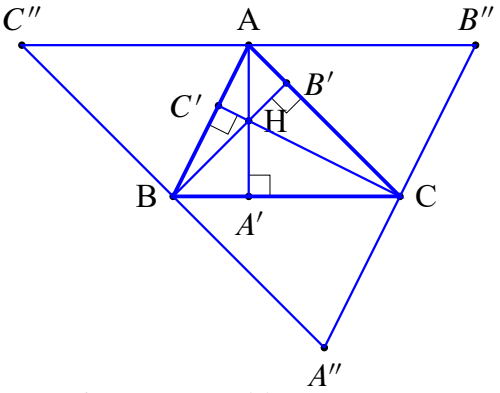


Fig. 188: *Problema 3.3*

Altă soluție sintetică

Presupunem că $AA' \cap BB' = H$ şi ne propunem să arătăm că $CH \perp AB$. Patrulaterul $AB'A'B$ este inscriptibil pentru că diagonalele lui formează unghiuri drepte cu laturile opuse. Deducem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CB'A'$ (un unghi al patrulaterului este congruent cu unghiul exterior). Patrulaterul $CB'HA'$ este şi el inscriptibil pentru că are unghiuri opuse drepte, deci suplementare. De aici $\sphericalangle CB'A' = \sphericalangle CHA'$ ca unghiuri formate de diagonale cu laturile opuse. Avem $\sphericalangle CHA' + \sphericalangle HCA' = 90^0$ sau $\sphericalangle ABC + \sphericalangle C'CB = 90^0$, deci $CH \perp AB$ şi astfel $H \in CC'$, înălțimea din C.

O soluție vectorială

Fie $m = \dfrac{AC'}{C'B}, p = \dfrac{BA'}{A'C}, n = \dfrac{CB'}{B'A}$ și $\{H\} = BB' \cap CC'$. Să arătăm că A, H, A' sunt coliniare.

Conform punctului a) $m \cdot n \cdot p = 1$ de unde $mn = \dfrac{1}{p}$.

$\dfrac{CB'}{B'A} = n \Rightarrow \dfrac{AC}{B'A} = n+1 \Rightarrow B'A = \dfrac{1}{n+1}AC$. Din $m = \dfrac{AC'}{C'B} \Rightarrow AC' = \dfrac{m}{m+1}AB$. In $\triangle ABB'$ punctele B, H, B' coliniare$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB'} + (1-\alpha)\overrightarrow{AB} = \frac{\alpha}{n+1}\overrightarrow{AC} + (1-\alpha)\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

În triunghiul ACC' punctele C, H, C' coliniare $\Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overrightarrow{AH} = \beta\overrightarrow{AC'} + (1-\beta)\overrightarrow{AC} = \frac{\beta m}{m+1}\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\overrightarrow{AC}. \quad (2)$$

Din(1) și (2) rezolvând sistemul $\begin{cases} 1-\alpha = \frac{\beta m}{m+1} \\ \frac{\alpha}{n+1} = 1-\beta \end{cases}$ obținem $\alpha = \dfrac{n+1}{mn+n+1}$, și $\beta = \dfrac{n(m+1)}{mn+n+1}$

și deci $\overrightarrow{AH} = \dfrac{mn}{mn+n+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{mn+n+1}\overrightarrow{AC} = \dfrac{mn+1}{mn+n+1}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} + \frac{1}{mn}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{1}{mn}}\right) =$

$\dfrac{p+1}{1+p+pn}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}}{1+p}\right) = \dfrac{p+1}{1+p+pn}\overrightarrow{AA'}$ și deci $\overrightarrow{AH} \| \overrightarrow{AA'} \Rightarrow H \in AA'$

Altă soluție vectorială

Fie $CC' \cap BB' = \{H_1\}$ și A_1 punctul diametral opus lui A. Avem $A_1C \perp AC, BB' \perp AB \Rightarrow A_1C \| BH_1$. De asemenea $A_1B \perp AB, CC' \perp AB \Rightarrow A_1B \| CH_1$ și deci BA_1CH_1 este paralelogram. BA_1CH_1 paralelogram $\Rightarrow \vec{r}_{H_1} + \vec{r}_{A_1} = \vec{r}_B + \vec{r}_C$ și cum $\vec{r}_{A_1} = -\vec{r}_A$ avem $\vec{r}_{H_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$. Dacă presupunem că $AA' \cap BB' = \{H_2\}$ un raționament analog ne conduce la $\vec{r}_{H_2} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ și $\vec{r}_{H_1} = \vec{r}_{H_2}$ de unde $H_1 = H_2 = H$

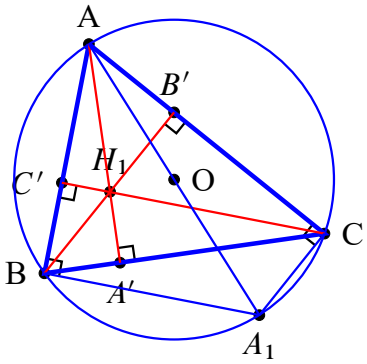


Fig. 189: *Problema 3.3*

(3.4) În orice triunghi ABC au loc:

a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$; b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$;

c) H, G, O coliniare (dreapta lui Euler), d) $HG = 2GO$.

Soluție:

a) În triunghiul $\triangle ABC$ AA', BB', CC' înălțimi, GM mediană, AA_1 diametrul cercului circumscris triunghiului. HBA_1C paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA_1} = 2\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ și cum $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HA}) \Rightarrow 2\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} \Rightarrow 3\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$

b) În triunghiul AHA_1, HO mediană $\Rightarrow 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA_1}$. Cum HBA_1C paralelogram $\overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$. În concluzie $2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$.

c) Din a) și b) rezultă $\overrightarrow{HO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG} \Rightarrow \overrightarrow{HO} \| \overrightarrow{HG} \Rightarrow$ H,G,O coliniare.

d) H,G,O coliniare$\Rightarrow HG + GO = HO \Leftrightarrow HG + GO = \frac{3}{2}HG \Leftrightarrow HG = 2GO$.

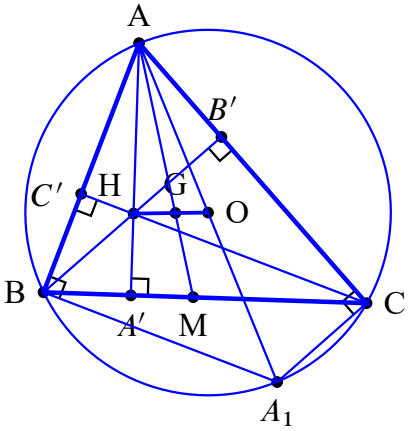


Fig. 190: *Problema 3.4*

24. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului ABCD se consideră punctele M, N, P și respectiv Q.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ coliniar cu $\overrightarrow{AC}$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicați patru puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la a) are loc.

(F.Cîrjan–etapa locală Brașov 2004)

25. Fie ABCDE un pentagon convex si punctele $P \in (DE), Q \in (CD)$ astfel încât $\frac{PL}{PD} = \frac{QC}{QD} = 2$. Dacă M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC si ABE, să se arate că $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

G. M. 3/2019

26. În plan se consideră triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ cu G_1 respectiv G_2 centre de greutate. Demonstrați că:
$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$

27. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate, dacă și numai dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

28. În triunghiul ABC, $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ și $F \in (AB)$ sunt picioarele bisectoarelor interioare. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF} = \vec{0}$.

29. Fie două triunghiuri ABC șu $A'B'C'$ care au același centru de greutate. Să se demonstreze egalitatea: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

30. Fie ABC un triunghi, G centrul de greutate al său și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Notăm G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN, CNP. Demonstrați că:

a) Triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate

b) Pentru orice punct D al planului triunghiului ABC, $3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3 < DA + DB + DC$.

(etapa județeană, 2002, Dan Marinescu și Viorel Cornea)

31. Fie ABCD un patrulater convex și $AC \cap BD = \{O\}$. Arătați că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA sunt vârfurile unui paralelogram.

(etapa locală, Brașov, 2003, Traian Duță)

32. Fie ABCD un patrulater convex și G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, CDA, DAB respectiv ABC. Demonstrați că patrulaterele ABCD și $G_1G_2G_3G_4$ sunt asemenea.

(M. Chiriță, Balcaniadă)

33. În patrulaterul convex ABCD se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD și cu H ortocentrul triunghiului ACD. Arătați că punctele A,B,G și H reprezintă în această ordine, vârfurile unui paralelogram dacă și numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD.

(etapa locală, București, 2001–M.Andronache)

34. Fie ABCD un patrulater inscriptibil și M un punct pe cercul circumscris acestuia diferit de vârfurile patrulaterului. Fie H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, MCD și respectiv MAD, iar E, F mijloacele segmentelor (AB) respectiv CD.

Demonstrați că:

a) $H_1H_2H_3H_4$ paralelogram.

b) $H_1H_3 = 2EF$

(etapa județeană, 2002–M. Mușuroia)

35. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O, si fie H, K ortocentrele triunghiurilor ACD, respectivBCD. Fie L mijlocul laturii AB. Știind că O este centrul de greutate al triunghiului HKL, arătați că $ABCD$ este trapez isoscel.

Etapa locală, Brașov 2020.

36. Se consideră punctele A,B,C,D coplanare, oricare trei necoliniare, iar H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC și ABD. Arătați că A,B,C,D sunt conciclice dacă și numai dacă $\overline{H_1H_2} = \overline{CD}$.

(etapa locală, București, 2003–M. Andronache)

37. Fie ABCD un patrulater înscris în cercul de centru O cu $AC \perp BD$. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD și ABC, arătați că $\overline{BH_2} = \overline{DH_1}$.

(etapa locală Neamț, 2003–Marius Merișan)

38. Să se construiască trei vectori $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ care au modulele egale $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$ știind că rezultanta lor este un vector dat $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Discuție.

39. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, I centrul cercului înscris și M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MI}$

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ și $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ să se arate că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari și $3|\vec{v}| = (a+b+c)|\vec{u}|$

(etapa locală, București 2000, M. Chiriță și Virgil Nicula)

40. Arătați că $a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{BI} + c\overrightarrow{CI} = \vec{0}$ dacă și numai dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

(etapa locală, 2001, Giurgiu–Șerban Olteanu)

41. Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, H și H_1 ortocentrele lor, O și O_1 centrele cercurilor circumscrise celor două triunghiuri. Arătați că dacă $\overrightarrow{HH_1} + 2\overrightarrow{OO_1} = \vec{0}$ atunci cele două triunghiuri au același centru de greutate.

(etapa locală, Constanța, 2001–Gabriela Constantinescu)

42. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele P și Q astfel încât $\frac{AP}{PB} = \frac{BC}{AC}$ și $\frac{AQ}{QC} = \frac{BC}{AB}$. Notăm cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și cu a, b și c lungimile laturilor BC, CA și AB. Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{PQ} = -\frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$;

b) Punctele P, I și Q sunt coliniare dacă și numai dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A.

43. Se consideră triunghiul ABC și punctele M,N,P,Q cu proprietățile $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{BN}$, iar $CM \cap AP = \{Q\}$. Să se determine valoarea raportului $\frac{CQ}{CM}$.

Etapa locală, Galați, 2015

44. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să se arate că dacă $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

45. Se dau punctele fixe A și B și punctul M exterior dreptei AB. Să se arate că vectorul $2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}$ trece printr-un punct fix.

46. Fie ABCD un paralelogram și Punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătați că centrul de greutate G al triunghiului MNP se află pe drepta AC.

Probleme ce caracterizează vectorial un triunghi echilateral

47. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să se arate că $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ dacă și numai dacă ABC echilateral

(Elena Irimia, etapa locală Neamț, 2002)

48. În triunghiul ABC, (AP, (BQ, (CR sunt bisectoarele interioare. Dacă $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=\vec{0}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

49. Bisectoarele unghiurilor A,B,C ale triunghiului ABC intersectează laturile acestuia în $D\in(BC), E\in(AC), F\in(AB)$. Arătați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$

(Etapa locală, Brașov, 2010)

50. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele (AP, (BQ, (CR unde P∈ (BC),Q∈ (AC), R∈ (AB). Arătați că $(b+c)\overrightarrow{AP}+(a+c)\overrightarrow{BQ}+(a+b)\overrightarrow{CR}=\vec{0}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral

51. Arătați că dacă $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OG}$ atunci triunghiul este echilateral. (Notațiile sunt cele cunoscute)

52. Arătați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\sum\overrightarrow{OA}=\vec{0}$, O centrul cercului circumscris.

53. Să se demonstreze că în orice triunghi mijloacele a doua laturi și centrul cercului înscris în triunghi sunt trei puncte necoliniare.

54. Fie triunghiul ABC şi D, E, F mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB. Notăm H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor AFE, BDF respectiv CDE şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că dacă O este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

55. Se consideră paralelogramul ABCD. O dreaptă oarecare taie dreptele AD, BD şi respectiv CD în punctele A_1, B_1 şi C_1. Arătati că dacă $\overrightarrow{DA_1}=a\cdot\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB_1}=b\cdot\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC_1}=c\cdot\overrightarrow{DC}$, atunci are loc inegalitatea $2b\le\sqrt{ac}$. Când are loc egalitate?

Etapa locală, Cluj,2014

11.5.1 Test de evaluare

1. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -4\overrightarrow{MB}$. Scrieți vectorul $\overrightarrow{AM}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

2. Fie pătratul $ABCD$, M mijlocul lui [AB] și N mijlocul lui [BC].

(a) Descompuneți $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{CM}$ după $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

(b) Se consideră vectorii $\vec{u} = 3\overrightarrow{AN} + 6\overrightarrow{CM}$ și $\vec{v} = -\overrightarrow{AD}$. Sunt cei doi vectori coliniari?

3. Fie A,B,C trei puncte necoliniare, astfel încât $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$. Dacă $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right| = 14$, aflați $\overrightarrow{AB}$.

4. În triunghiul ABC considerăm cevienele $(AA_1), (BB_1), (CC_1)$ concurente în M. Știind că $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\gamma}{\beta}, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\alpha}{\gamma}$ și $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\beta}{\alpha}$. Să se arate că:

a) $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{OM}$, pentru orice O arbitrar în planul triunghiului.

b) $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

11.6 Exerciții și probleme cu vectori în plan

11.6.1 Probleme de concurență și coliniaritate

(1) *Dacă trei ceviene împart laturile unui triunghi ABC prin punctele A', B', C' astfel că* $\frac{BA'}{A'C} = \frac{k_3}{k_2}, \frac{CB'}{B'A} = \frac{k_1}{k_3}$ *și* $\frac{AC'}{C'B} = \frac{k_2}{k_1}$, *atunci vectorul de poziție al punctului M de concurență a dreptelor AA', BB' și CC' în raport cu un punct de reper arbitrar O, este dat de formula:* $\overrightarrow{OM} = \frac{k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}}{k_1 + k_2 + k_3}$.

Rezolvare: Din (2.1) rezultă că $\overrightarrow{OB'} = \frac{k_1\overrightarrow{OA} + k_3\overrightarrow{OC}}{k_1 + k_3}$ și $\overrightarrow{OC'} = \frac{k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB}}{k_1 + k_2}$.

Scriind că M este coliniar cu C, C' și respectiv cu B, B', rezultă pentru $\overrightarrow{OM}$ expresiile $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OB} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OC} + (1-\beta)\overrightarrow{OC'}$. Alegem $O = A$ și obținem $\alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\frac{k_3\overrightarrow{AC}}{k_1 + k_3} = \beta\overrightarrow{AC} + (1-\beta)\frac{k_2\overrightarrow{AB}}{k_1 + k_2}$, cum $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt liniar independenți se obține $\alpha = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3}$ și $\beta = \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$ și apoi $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OB} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB'} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3}\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3}\right)\frac{k_1\overrightarrow{OA} + k_3\overrightarrow{OC}}{k_1 + k_3} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}}{k_1 + k_2 + k_3}$.

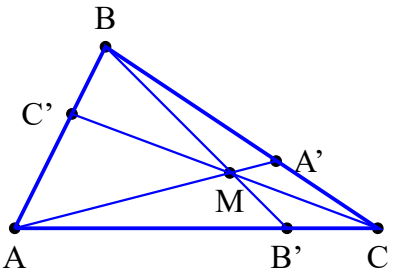


Fig. 195: *Teorema lui Ceva*

1. a) Regăsiți expresiile vectorilor de poziție ai centrului de greutate al unui triunghi și centrul cercului înscris în triunghi folosind (1.1)

b) Arătați că pentru alte puncte remarcabile într-un triunghi vectorii de poziție sunt dați de expresiile următoare:

$\vec{r}_H = \dfrac{tgA \cdot \vec{r}_A + tgB \cdot \vec{r}_B + tgC \cdot \vec{r}_C}{tgA + tgB + tgC}$ (H ortocentrul)

$\vec{r}_O = \dfrac{\sin 2A \cdot \vec{r}_A + \sin 2B \cdot \vec{r}_B + \sin 2C \cdot \vec{r}_C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$ (O centrul cercului circumscris)

$\vec{r}_\Gamma = \dfrac{(p-a)^{-1}\vec{r}_A + (p-b)^{-1}\vec{r}_B + (p-c)\vec{r}_C}{\sum (p-a)(p-b)}$ (Γ punctul lui Gregone–de intersecție a dreptelor ce unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului)

$\vec{r}_L = \dfrac{a^2 \cdot \vec{r}_A + b^2 \cdot \vec{r}_B + c^2 \cdot \vec{r}_C}{a^2 + b^2 + c^2}$ ($L-$ punctul lui Lemoine–concurența simetricelor medianelor față de bisectoare–simediane)

(2) (Teorema lui Ceva). Pentru ca trei ceviene AA', BB', CC' să fie concurente este necesar și suficient ca $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

(3) (Teorema lui Menelaus). Fie A', B', C' trei puncte situate pe dreptele BC, CA, AB. Condiția necesară și suficientă ca ele să fie coliniare este $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$. (am notat cu $\overline{AB}$– segementul orientat $A'B$)

(4) (Teorema lui Van Aubel) Fie triunghiul ABC și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă dreptele $AA', BB'CC'$ sunt concurente într-un punct M, atunci există relația $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MA'}} = \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

Indicație. Se folosește teorema lui Menelaus pentru triunghiul $AA'C$ și punctele coliniare B, M, B', apoi se aplică aceiași teoremă în triunghiul $AA'B$ și punctele coliniare C, M, C' și se adună cele două relații.

2. a) Demonstrați sintetic concurența liniilor importante în triunghi folosind teorema lui Ceva.

b) Rezolvați sintetic problemele și exercițiile: 17, 18, 19a, 20/5.3 și 15/5.5 folosind teorema lui Ceva și Menelaus

c) Comparați metoda vectorială cu cea sintetică–având drept criterii, gradul de dificultate, eleganța soluției, volumul de calcule (nu uitați de demonstrarea teoremei lui Ceva și Menelaus).

3. Demonstrați vectorial și sintetic că dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse și dreapta determinată de mijloacele diagonalelor unui patrulater convex sunt concurente.

4. Fie patrulaterul convex ABCD.

a). DacăM, N, P, Q sunt respectiv mijloacele laturilor (AB), $(BC), (CD)$ și (DA), iar punctele E si F sunt respectiv mijloacele diagonalelor $(AC)(BD)$ atunci dreptele MP, NQ șiEF sunt concurente.

b). DacăG_1, G_2, G_3, G_4 sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor

$\Delta BCD, \Delta ACD, \Delta ABD$, și ΔABC atunci dreptele AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 sunt concurente.

Etapa locală, Galati 2011

5. Dacă în patrulaterul $ABCD$, $M \in AB$ și $N \in DC$ așa încât $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = k$, atunci $MN \leq \frac{AD + kBC}{1+k}$ cu egalitate atunci și numai atunci când $AD \| BC$.

6. Pe laturile $(AB), (BC), (CA)$ ale triunghiului ABC se iau punctele M, N, respectiv P astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k$.

a) Arătați că $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

b) Arătați că $AN + BP + CM < AB + BC + CA$.

7. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A în care $AB = 4a, AC = 3a, a > 0, a \in \mathbb{R}$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC și (CD este bisectoarea $\sphericalangle ACB, D \in (AB)$, să se arate că $DG > a$.

Galați, etapa locală, 2005

8. În planul triunghiului ΔABC se consideră punctele P, Q, R, M definite astfel: $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$, $3 \cdot \overrightarrow{AQ} + 2 \cdot \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{0}$, $31 \cdot \overrightarrow{RA} + 18 \cdot \overrightarrow{RB} + 6 \cdot \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{0}$ și $AR \cap BC = \{M\}$.

a) Să se arate că punctele P, Q și R sunt coliniare.

b) Să se afle valoarea raportului $\frac{BM}{CM}$.

Galați, etapa locală, 2007.

9. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului convex ABCD se consideră punctele M, N, P, Q iar pe segmentele (QP), (AC) și (MN) punctele S, T și respectiv U așa încât să aibă loc condiția: $\frac{AM}{CN} = \frac{AQ}{CP} = \frac{QS}{SP} = \frac{MU}{UN} = \frac{AT}{TC} = k$.
Să se arate că punctele S, T, U sunt coliniare dacă și numai dacă $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$

(F.Cîrjan–Concursul Național „L.Duican”–2003)

10. Fie ABCD paralelogram, $\{O\} = AC \cap BD$ și $E \in BD, E \neq O$. Simetricul lui C față de E îl notăm cu F. Paralele prin F la AB și BC taie AD în H și AB în G. Demonstrați că punctele E,G,H sunt coliniare.

(M. Chiriță, C. Vlădăreanu–etapa locală Argeș, 2003)

11. Fie ABCD un patrulater convex și punctele $\{O\} = AC \cap BD, \{M\} = AD \cap BC$, $P \in (DC)$, $Q \in (AB)$ astfel ca $\frac{PD}{PC} = \frac{QB}{QA} = r$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$ coliniari $\iff$ $\overrightarrow{OP}$ și $\overrightarrow{OQ}$ coliniari.

b) Dacă $r = 1$, atunci $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$ coliniari $\iff$ $\overrightarrow{MO}$ și $\overrightarrow{MQ}$ coliniari sau $\overrightarrow{MP}$ și $\overrightarrow{MQ}$ coliniari sau $\overrightarrow{MP}$ și $\overrightarrow{MO}$ coliniari.

(prelucrare, F.Cârjan).

12. Fie $ABCD$ un patrulater și O intersecția diagonalelor acestuia. În exteriorul său se consideră punctele E și F astfel încât D și C sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AOE și BFO. Arătați că $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$.

13. Considerăm triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = k_1$, $\frac{AN}{NC} = k_2$. Pe semidreapta $(BN$ se consideră N' pe semidreapta $(CM$ se consideră M' astfel încât $\frac{M'M}{M'C} = l_1$, $\frac{N'N}{N'B} = l_2$. Arătați că punctele M', A, N' sunt coliniare dacă și numai dacă $l_1 l_2 = \frac{k_1 k_2}{(1+k_1)(1+k_2)}$.

14. Fie ABC un triunghi oarecare, M și N două puncte fixate în planul său, Notăm cu G, G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, MBC, MCA, respectiv MBA. Fie A', B', C' simetricele lui N față de G_A, G_B, G_C. Să se demonstreze că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente într-un punct notat P și că are loc relația: $5\overrightarrow{GP} + 3\overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{GM}$

(Daniel Văcărețu)

15. Fie un patrulater convex ABCD. Notăm cu E,F,G,H mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD), (GE) iar $\{I\} = AF \cap CE$. Să se arate că D, H, I coliniare.

(C. Ionescu-Țiu)

16. Fie triunghiul ΔABC și punctele M, N, P, Q astfel încât

$\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{CP} = \beta \cdot \overrightarrow{PA}; \overrightarrow{AQ} = r \cdot \overrightarrow{QB}; \overrightarrow{BN} = m \cdot \overrightarrow{CN}$, unde α, β, r și m sunt numere reale strict pozitive. Se cere:

a) Dacă $\alpha = \beta = r$, să se demonstreze că triunghiul ΔABC are același centru de greutate ca și triunghiul ΔMPQ.

b) Să se determine relația dintre numerele α, β, r astfel încât dreptele AM, CQ, BP să fie concurente.

c) Să se determine în funcție de m și r raportul în care dreapta NQ împarte segmentul (AC), cazul în care dreapta NQ intersectează segmentul (AC).

Galați, etapa locală, 2010

17. Fie triunghiul ABC si $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$ astfel încât AA', BB', CC' sunt concurente în punctul M.

a) Arătati că $\frac{MA}{MA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C}$.

b) Arătati că dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ atunci punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

11.6.2 Exerciții și probleme tematice

Caracterizări ale unui paralelogram soluționate pe baza unei strategii comune de rezolvare

18. În patrulaterul convex ABCD se notează cu M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA.

a) Să se arate că ABCD este paralelogram dacă și numai dacă $2(MP + NQ) = AB + BC + CD + DA$

b) $2(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

(F.Cîrjan–G.M.1/1996)

19. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale unui patrulater convex ABCD se consideră punctele P, N, Q, M astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB} = \frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Să se arate că ABCD este paralelogram dacă și numai dacă $MN + PQ = MD + BP + BN + DQ$

(F.Cîrjan–Concursul Național „ L. Duican"–1997)

20. Fie ABCD un patrulater și M, N, P, Q puncte pe laturile AB, BC, CD, DA așa încât $\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QA} = \frac{CN}{NB} = k$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AC}$

b) Dacă $(1 + k)(MP + QN) = AD + DC + k(AB + BC)$ atunci ABCD paralelogram

(F.Cîrjan)

21. În patrulaterul convex ABCD cu $AD = BC$, se consideră punctele M și N pe laturile AB, respectiv DC, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$. Să se arate că dacă $MN = AD$, atunci ABCD este paralelogram. (F.Cîrjan–G.M 11/2003)

O problemă înrudită cu problemele 11–13 după proprietatea cu rol central în rezolvare (pentru punctul a.)

22. Fie ABCD un patrulater convex și $M, P \in (AB)$, $N, Q \in (CD)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{DQ}{QC} = \frac{PB}{PA} = \frac{CN}{ND} = k$. Să se demonstreze că:

a) $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

(Gheorghe Andrei–etapa locală Constanța–2004)

23. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se determine mulțimea punctelor M din planul patrulaterului $ABCD$ cu proprietatea că modulul vectorului $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD}$ are valoare constantă.

Etapa locală, Galați,2006.

24. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu O intersecția diagonalelor, cu M mijlocul lui (AB) și N mijlocul lui (BC). Dreapta OM intersectează dreapta CD în P și dreapta ON intersectează dreapta AD în Q. Fie $a = \frac{OC}{OA}$ și $b = \frac{OD}{OB}$.

(a) Exprimați vectorii $\overrightarrow{OP}$ și $\overrightarrow{OQ}$ în funcție de numerele a, b și vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

(b) Știind că centrul de greutate al triunghiului ANP coincide cu centrul de greutate al triunghiului CMQ, demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

25. Fie M mijlocul laturii [BC] a triunghiului ABC. Pe laturile [AB] ,si [AC] fie respectiv punctele D și E astfel ca $AB = 4 \cdot AD$ și $AC = 3 \cdot AE$, iar $\{F\} = AM \cap DE$. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care $k \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

26. Să se determine mulțimea $\{M \mid \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} = k\}$ unde M și O sunt puncte remarcabile în triunghiul ABC.

Etapa locală, Constanța,2001.

11.6.3 Test de autoevaluare

1. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a+1)\vec{j}$, $\vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{w} = (2a+4)\vec{i} - 4b\vec{j}$ unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, să se calculeze $a - b$.

A -2; B 0; C -1; D 2; E 4.

2. Se consideră vectorii $\overrightarrow{PA} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{PB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{PC} = \vec{i} + a\vec{j}$. S˘a se determine valoarea lui a pentru care punctele A, B, C sunt coliniare.

A $\frac{1}{2}$; B $-\frac{1}{2}$; C $-\frac{5}{2}$; D $\frac{5}{2}$; E 2.

3. Se consideră vectorii $\vec{u} = (m+2)\vec{i} + (2m-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = (m+1)\vec{i} + (m-2)\vec{j}$. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}^*$ cei doi vectori au aceiași lungime?

A $\frac{2}{3}$; B $-\frac{2}{3}$ C $\frac{3}{2}$; D $-\frac{3}{2}$; E 3;

4. Pentru ce valori ale lui $m, n \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{a} = (n+1)\vec{i} - 4m\vec{j}$ și $\vec{b} = (m-1)\vec{i} - (2n+4)\vec{j}$ sunt egali?

A $\begin{cases} m = 0, \\ n = 2 \end{cases}$ B $\begin{cases} m = 2, \\ n = 0 \end{cases}$ C $\begin{cases} m = 0, \\ n = -2 \end{cases}$ D $\begin{cases} m = 1, \\ n = -1 \end{cases}$ E $\begin{cases} m = -1, \\ n = -1 \end{cases}$

5. Fie ABC un triunghi. Notăm cu G centrul său de greutate, cu O centrul cercului circumscris, cu H ortocentrul, cu I centrul cercului înscris. Punctul M din planul triunghiului ABC pentru care $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ este:

A G; B H; C I; D O; E A.

6. În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P și Q împart latura (BC) în trei părți egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B 2; C $\sqrt{3}$; D $2\sqrt{3}$; E $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. În pătratul ABCD de latură 6, punctele M și N aparțin laturii (BC) astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

A 12; B 13; C $8\sqrt{3}$; D $\frac{25}{2}$; E 10.

8. Fie G centrul de greutate al triunghiului neechilateral ABC, iar H ortocentrul său. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = k\overrightarrow{HG}$.

A 2; B -2; C -3; D $\frac{1}{3}$; E 3.

9. Fie M mijlocul laturii [BC] a triunghiului ABC. Pe laturile [AB] ,si [AC] fie respectiv punctele D și E astfel ca $AB = 3 \cdot AD$ și $AC = 2 \cdot AE$, iar $\{F\} = AM \cap DE$. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care $k \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

A 2; B 3; C 0; D $\frac{5}{2}$; E 5.

11.6.4 Test de evaluare

1. În sistemul de coordonate $O\vec{i}\vec{j}$ se dau punctele: $A(-1,-2)$, $B(-5,1)$, $C(7,4)$.

(a) Să se scrie vectorii de poziție ai punctelor A, B și C

(b) Să se scrie cu ajutorul versorilor $\vec{i}$, $\vec{j}$ vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BC}$.

(c) Să se afle $|\overrightarrow{AB}|$ și $|\overrightarrow{AC}|$.

(d) Să se scrie cu ajutorul versorilor $\vec{i}$, $\vec{j}$ vectorul $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{AM}$ unde M este mijlocului segmentului BC.

(e) Să se afle coordonatele punctului A_1, unde $A_1 \in BC$ este piciorul bisectoarei unghiului A.

(f) Să se afle coordonatele centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

(g) Să se afle aria triunghiului ABC.

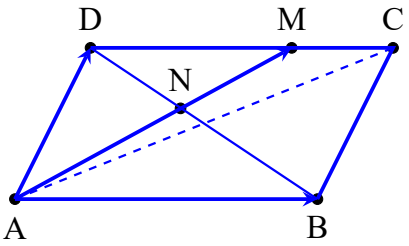
2. (a) Fie triunghiul ABC și punctele D și E, astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$. Arătați că dreptele DE și BC sunt paralele

(b) Pe laturile [AB] și [AC] ale triunghiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$.

3. În paralelogramul $ABCD$ fie punctul $M \in (DC)$ și $N \in (BD)$ astfel încât $3DM = 2MC$ și $5DN = 2NB$

a) Să se arate că $\overrightarrow{AM} = \frac{5 \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}}{5}$.

b) Să se exprime vectorul $\overrightarrow{AN}$ în funcție de $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB}$ și să se arate că punctele A, N, M sunt coliniare.



12 Elemente de trigonometrie

12.1 Cercul trigonometric

Definiția 17. *Se numește cerc trigonometric într-un plan orientat, cercul de rază 1 împreună cu reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$ fixat și cu sensurile de parcurs direct (sensul invers deplasării acelor de ceasornic) și indirect (sensul de mișcare a acelor de ceasornic) stabilite.*

Definiția 18. *Un număr $l \in [-\pi,\pi]$ se numește măsură principală a unui arc orientat de măsură x, dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = l + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

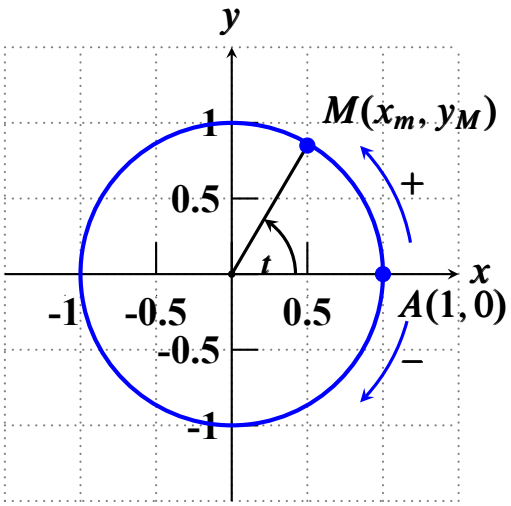


Fig. 199: *Cercul trigonometric*

Relația între măsura t în radiani și măsura α în grade sexagesimale a unui unghi este $\frac{t}{\pi} = \frac{\alpha}{180^0}$.

1. Exprimați în radiani măsurile unghiurilor de: 15^0, $22^030'$, 30^0, $37^030'$, 45^0, $67^030'$, 75^0, 105^0, 135^0, 150^0, $247^030'$, 315^0, 420^0.

Exemplu rezolvat: $\alpha = 22^030' = 22,5^0$ și $\frac{\alpha}{180^0} = \frac{t}{\pi} \Rightarrow t = \frac{\alpha\cdot\pi}{180^0} = \frac{22,5^0\cdot\pi}{180^0} = \frac{\pi}{8}$.

2. Exprimați în grade sexagesimale măsurile unghiurilor:
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{20}$, $\frac{19\pi}{30}$, $\frac{173\pi}{20}$, $\frac{397\pi}{20}$.

3. Determinați măsura principală a arcelor orientate:

a) 3933^0; b) -3183^0; c) $\frac{215\pi}{21}$; d) $-\frac{41\pi}{3}$.

Exemplu rezolvat:

a) $\frac{3933}{180} = \frac{t}{\pi} \Rightarrow t = \frac{437\pi}{20} = 2\cdot 11\pi - \frac{3\pi}{20} \Rightarrow l = -\frac{3\pi}{20}$

4. Desenați punctul M pe cercul trigonometric cunoscând măsura arcului orientat $t = m(\overset{\curvearrowright}{AM})$:

a) $t = 150^0$; b) $t = 870^0$; c) $t = \frac{9\pi}{4}$; d) $t = \frac{45\pi}{4}$; e) $t = \frac{40\pi}{3}$.

f) $t = -150^0$; g) $t = -870^0$; h) $t = -\frac{9\pi}{4}$; i) $t = -\frac{45\pi}{4}$; j) $t = -\frac{40\pi}{3}$.

5. În ce cadran se află punctul M dacă $t = m(\overset{\curvearrowright}{AM})$ este:

a) $t = 410^0$; b) $t = -410^0$; c) $t = \frac{22\pi}{3}$; d) $t = -12550^0$;

e) $t = -\frac{32\pi}{5}$; f) $t = -1748^0$; g) $t = \frac{182\pi}{15}$; h) $t = -543^0$.

6. O roată dințată are 200 de dinți. Să se exprime în radiani și în grade sexagesimale măsura unghiului de rotație al roții, dacă ea se rotește cu:

a) 50 de dinți; b) 110 de dinți.

7. Exprimați în radiani și în grade, măsura unghiului format de acele unui ceasornic:

a) la ora 5; b) la ora 5 și jumătate; c) la ora 9 și jumătate.

12.2 Funcțiile trigonometrice

Funcția sinus

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \sin x$. Periodicitate: T=$2k\pi$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

Semn $\begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$ Paritate: $f(x) = \sin x$ este impară ($f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

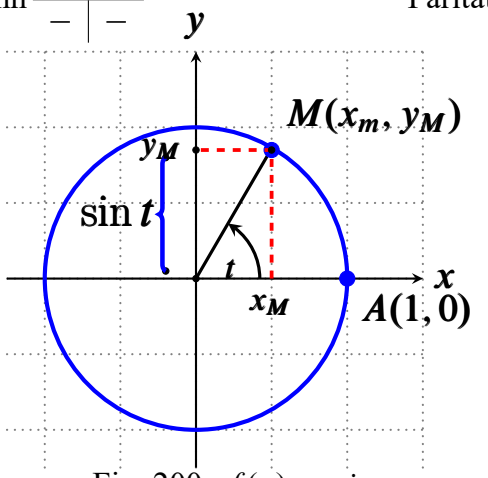


Fig. 200: $f(x) = sinx$

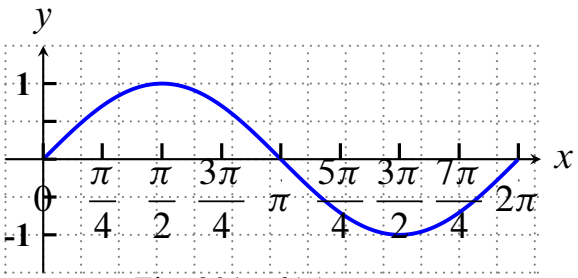


Fig. 201: $f(x) = sin\, x$

Funcția cosinus

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos x$.

Semn $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$

Periodicitate: T=$2k\pi$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

Paritate: $f(x) = \cos x$ este pară ($\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

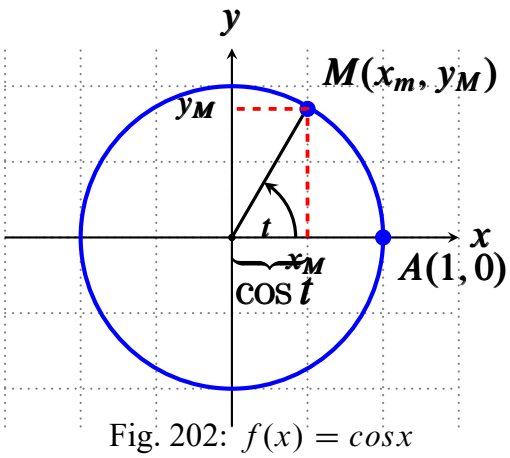


Fig. 202: $f(x) = cosx$

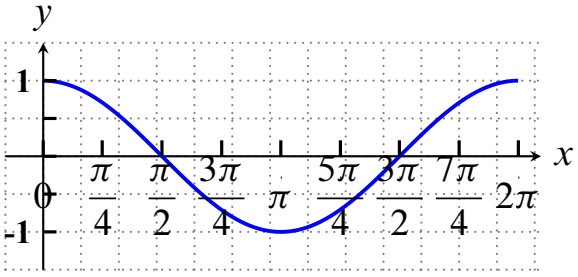


Fig. 203: $f(x) = cosx$

Funcția tangentă

$f:\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$.

Semn $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$

Periodicitate: T=π, $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x$, $\forall x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$

Paritate: $f(x)=\operatorname{tg}x$ este impară ($\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$)

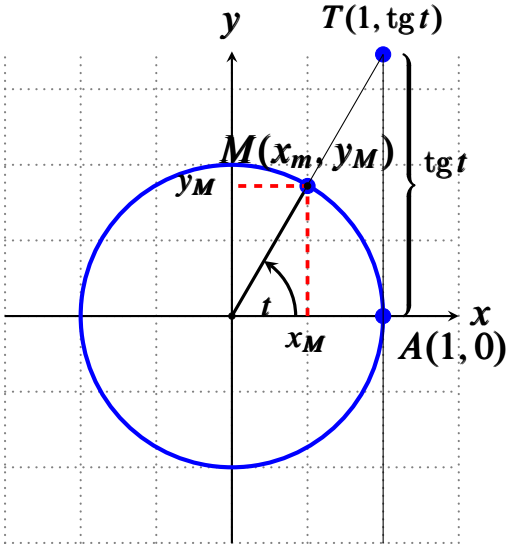


Fig. 204: $f(x)=tgx$

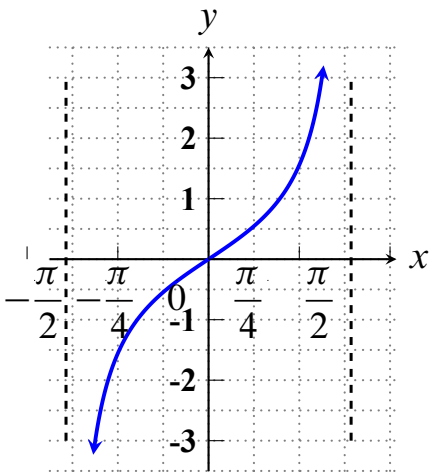


Fig. 205: $f(x)=tgx$

Funcția cotangentă

$f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg}x$.

Semn $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$

Periodicitate: T=π, $\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x$, $\forall x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$.

Paritate: $f(x)=\operatorname{ctg}x$ este impară ($\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$).

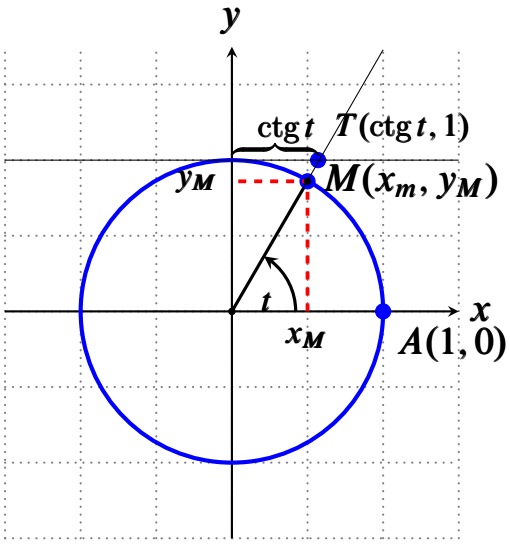


Fig. 206: $f(x)=ctgx$

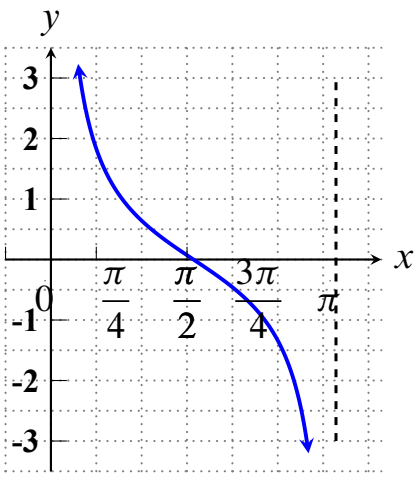
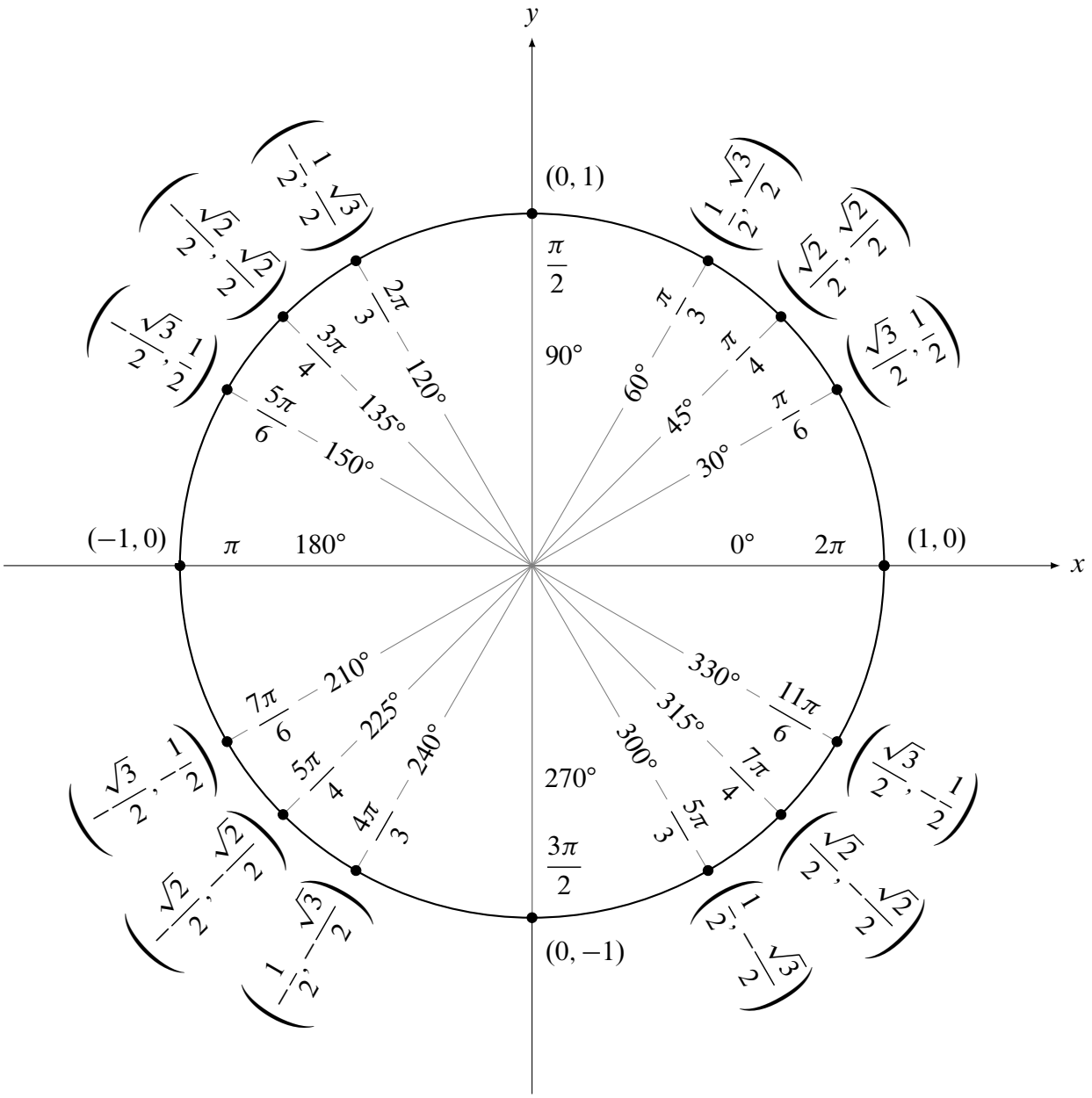


Fig. 207: $f(x)=ctgx$

12.2.1 Principalele valori ale funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$



1. Să se construiască cu rigla și compasul unghiurile x pentru care:

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x = \dfrac{3}{5}$

d) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

e) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\operatorname{tg} x = -3$

g) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

h) $\sin x = \dfrac{4}{5}$

i) $\operatorname{ctg} x = 2$

2. Să se determine domeniul de definiție pentru funcțiile:

a) $f_1(x) = x + \sin x$

b) $f_2(x) = \dfrac{\cos x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 3x}$

c) $f_3(x) = \dfrac{x\operatorname{tg}(2x+1)}{\sin x}$

d) $f_4(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

Exemplu rezolvat:

b) Pentru a exista funcția $\operatorname{tg} x$ trebuie ca $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, pentru a exista $\operatorname{ctg} 3x$ trebuie ca $3x \neq k\pi$, iar pentru ca fracția să aibă sens trebuie ca $\operatorname{ctg} 3x \neq 0$. În concluzie trebuie îndeplinite simultan condițiile: $\begin{cases} x & \neq & (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 3x & \neq & k\pi \\ \operatorname{ctg} 3x & \neq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & \neq & (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ x & \neq & k\frac{\pi}{3} \\ 3x & \neq & (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & \neq & (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ x & \neq & k\frac{\pi}{3} \\ x & \neq & (2k+1)\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \in$

$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in Z} \{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k\frac{\pi}{3}; (2k+1)\frac{\pi}{6}\}$

3. Să se determine domeniile de definiție ale funcțiilor:

a) $f(x) = 5\sin 5x + 2\cos 7x$

b) $f(x) = \sin x + 2\operatorname{tg} 3x$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}{\cos x}$

d) $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x$

e) $f(x) = \sqrt{-\sin^2 x}$

f) $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$

g) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{1 - \sin 4x}$

h) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}{1 + \sin 4x}$

4. a) Stabiliți semnul funcției $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$ în fiecare din cele patru cadrane.

b) Ce semne pot avea funcțiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi ?

5. Să se stabilească semnul următoarelor produse:

a) $P_1 = (\sin 35^0 - \sin 34^0)(\sin 115^0 - \sin 122^0)(\cos 35^0 - \cos 34^0)$.

b) $P_2 = (\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{7\pi}{8})(\cos\frac{8\pi}{7} - \cos\frac{9\pi}{7})(\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3})$.

Soluție:

a) $34^0 < 35^0$ și $115^0 < 122^0$ și cum funcția sinus este strict crescătoare în primul cadran și descrescătoare în cadranul al doilea, iar funcția cosinus este descrescătoare în primul cadran (vezi graficul, fig. 208)

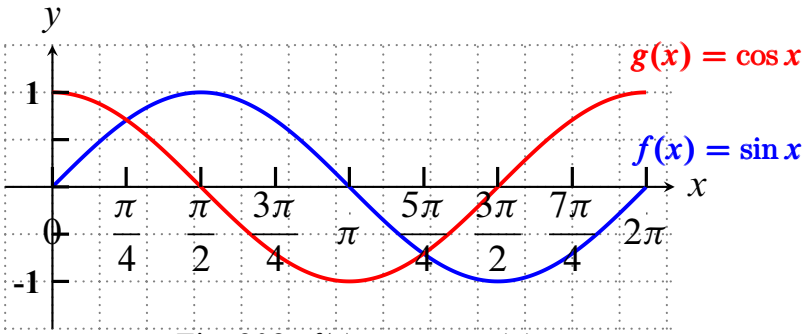


Fig. 208: $f(x)$=sin x *și* $g(x) = \cos x$

rezultă: $\sin 34^0 < \sin 35^0; \sin 115^0 > \sin 122^0$ și $\cos 35^0 < \cos 34^0$ de unde deducem $P_1 < 0$.

b)Avem $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ și $\cos\frac{7\pi}{8} < 0$ și deci $\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{7\pi}{8} > 0$; $\pi < \frac{8\pi}{7} < \frac{9\pi}{7} < \frac{3\pi}{2}$ și deci $\cos\frac{8\pi}{7} > \cos\frac{9\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi$ și deci $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} < 0$ și cum $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} > 0$ avem $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} < 0$ și deci $P_2 < 0$.

6. Ce semn au expresiile:

a) $\cos 0,9\pi$ b) $\sin 3$ c) $\operatorname{tg} 4$ d) $\cos 284^0 \cdot \operatorname{tg} 92^0$

e) $(\sin 1 - \cos 1)(\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 3)$ f) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}}$ g) $\dfrac{(\sin 3,2 - \sin 3,3)(\cos 3,2 - \cos 3,3)}{\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{7pi}{6}\right)}$

7. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{3}$ și $\beta = \frac{\pi}{6}$ să se verifice egalitățile:

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta}$

Indicație : Se fac înlocuirile și se ține cont de valorile numerice ale funcțiilor trigonometrice.

8. Să se determine perioadele principale ale funcțiilor:

a) $f_1(x) = \sin(2x + 3)$ c) $f_3(x) = \cos x \cdot ctgx$

b) $f_2(x) = \sin 3x - \operatorname{tg} 12x$ d) $f_4(x) = \sin 20x \cdot \cos 30x$

Indicație: Perioadele principale T_i se determină din condițiile $f_i(x+T_i) = f_i(x)$, $i = \overline{1,4}$, ținând seama de faptul că perioadele principale ale funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă sunt $2\pi, 2\pi, \pi$ respectiv π.

9. Să se afle perioadele funcțiilor:

a) $f(x) = \sin 3x$

b) $f(x) = \sin\frac{x}{5}$

c) $f(x) = \sin(ax + b)$

d) $f(x) = \cos 7x$

e) $f(x) = 3\cos\frac{x}{4}$

f) $f(x) = \cos(mx + n)$

g) $f(x) = tg\frac{x}{4}$

h) $f(x) = \operatorname{ctg}(2x + 3)$

i) $f(x) = \operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{4})$

j) $f(x) = \operatorname{ctg}(5x + \frac{\pi}{6})$

10. Să se afle perioadele funcțiilor:

a) $f(x) = \cos x + \sin^2 x$

b) $f(x) = \sin x \operatorname{tg} x$

c) $f(x) = \sin 3x + 2\cos 5x$

d) $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{4}$

e) $f(x) = \operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} 3x$

f) $f(x) = \sin x \cos x$

11. Să se arate că următoarele funcții nu sunt periodice:

a) $f(x)=x+\sin x$ b) $f(x)=x+\cos^2 x$ c) $f(x)=3\sin(x\sqrt{2})+2\cos(x\sqrt{7})$

12. Să se cerceteze dacă următoarele funcții sunt pare sau impare:

a) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x+\sin^3 x$
b) $f(x)=|x|+\cos^2 x$
c) $f(x)=x+\cos x$
d) $f(x)=\sqrt{tg^2 x}$
e) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin^2 x}$
f) $f(x)=|\sin x+\operatorname{tg} x|$
g) $f(x)=x^2+\cos x$

13. Între ce limite poate varia fiecare din următoarele funcții:

a) $f_1(x)=2-3\cdot\sin x$
b) $f_2(x)=3+2\cdot\cos x$
c) $f_3(x)=2+3\cdot\operatorname{tg} x$
d) $f_4(x)=4+5\cdot\cos^2 x$
e) $f_5(x)=2\cdot tg^2 x$
f) $f_6(x)=4-5\cdot\sin^2 x$
g) $f_7(x)=3\sin^2 x+4\cos^2 x$
h) $f_8(x)=4\sin^2 x+3\cos^2 x$

14. Să se traseze graficele următoarelor funcții trigonometrice precizându-se în fiecare caz perioada principală.

a) $f(x)=|\sin x|$
b) $f(x)=\sin 4x$
c) $f(x)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
d) $f(x)=\sin x-|\sin x|$

Soluție: a) Avem $|\sin x|=\begin{cases}\sin x & \text{pentru } x\in\{x|\sin x\geq 0\}\\ -\sin x & \text{pentru } x\in\{x|\sin x<0\}\end{cases}\Rightarrow$

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x & \text{pentru } x\in[2k\pi,\pi+2k\pi]\\ -\sin x & \text{pentru } x\in(-\pi+2k\pi,2k\pi)\end{cases}\quad k\in Z.$$

De aici rezultă graficul funcției.

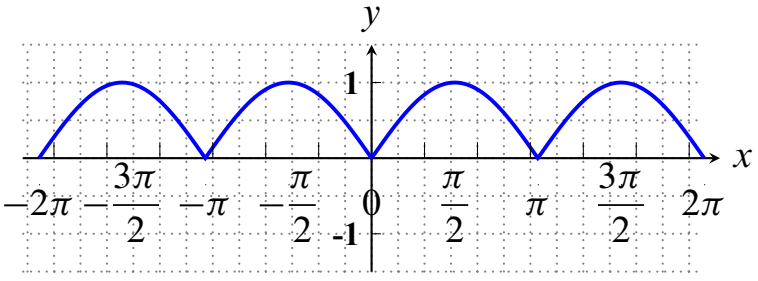


Fig. 209: *f(x)*=$|\sin x|$

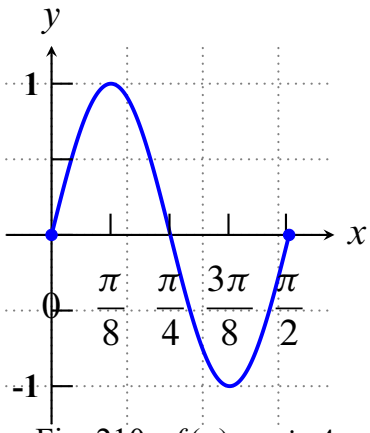


Fig. 210: $f(x)=\sin 4x$

Din grafic rezultă $T=\pi$.

b) $f(x+T)=f(x) \Rightarrow \sin(4x+4T)=\sin 4x \Rightarrow 4T=2\pi \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$. Cu ajutorul tabelului

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin 4x$	0	1	0	-1	0

se poate construi graficul în intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ de lungime egală cu perioada sa.

c) Perioada principală este 4π și cu ajutorul tabelului

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$f(x)$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$

se poate construi graficul pe intervalul $[0.4\pi]$ de lungime egală cu perioada funcției.

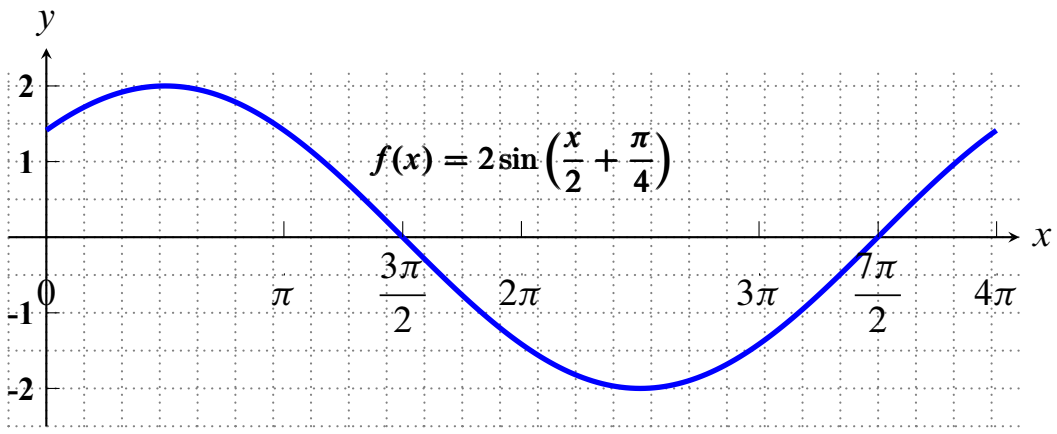


Fig. 211: *Graficul funcției* $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

d) Explicitând modulul (vezi pct.a) funcția se poate scrie

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pentru } x\in[2k\pi,\pi+2k\pi] \\ 2\sin x & \text{pentru } x\in(-\pi+2k\pi,2k\pi) \end{cases}$$ de unde se obține graficul.

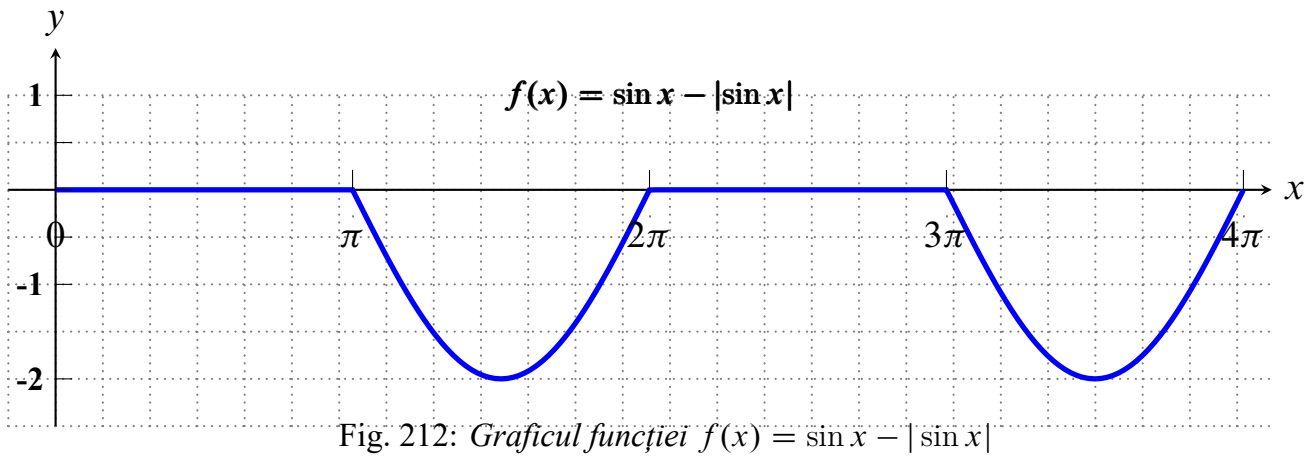


Fig. 212: *Graficul funcției* $f(x)=\sin x-|\sin x|$

Din grafic rezultă $T=2\pi$.

15. Să se reprezinte grafic funcțiile următoare și în fiecare caz să se precizeze perioada principală:

a) $f(x)=2\sin x$

b) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{3}$

d) $f(x)=\operatorname{ctg}2x$

e) $f(x)=2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

f) $f(x)=|\cos x|$

g) $f(x)=\cos x-|\cos x|$

h) $f(x)=\cos x+|\cos x|$

i) $f(x)=|\operatorname{ctg}x|$

16. Se dă $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

a) Să se arate că $f(x)\geq 10$.

b) Să se arate că $x=\dfrac{\pi}{4}$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f.

c) Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

12.2.2 Reducerea la primul cadran

1. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E=\frac{\operatorname{tg}(-150^0)\cdot\cos(-210^0)\cdot\cos(-60^0)}{\operatorname{ctg}(-240^0)\cdot\sin(-330^0)}$$

Soluție: Ținând cont de paritatea funcțiilor expresia devine $E=\dfrac{-\operatorname{tg}150^0\cdot\cos210^0\cdot\cos60^0}{\operatorname{ctg}240^0\cdot\sin330^0}=$
$\dfrac{-\operatorname{tg}(180^0-30^0)\cos(180^0+30^0)\cos60^0}{\operatorname{ctg}(270^0-30^0)\sin(270^0+60^0)}=-\dfrac{-\operatorname{tg}30^0(-\cos30^0)\cos60^0}{\operatorname{tg}30^0(-\cos60^0)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Să se reducă la primul cadran:

a) $\sin2503^0$;

b) $\cos7507^0$;

c) $\operatorname{tg}3757^0$;

d) $\sin(-7575)$;

e) $\cos(-1750^0)$;

f) $\operatorname{tg}(-2795^0)$;

g) $\sin1275\pi$;

h) $\cos(-275\pi)$;

i) $\operatorname{tg}(867,7\pi)$;

j) $\operatorname{ctg}4957^0$;

k) $\operatorname{ctg}(-736^0)$;

l) $\operatorname{ctg}(893,2\pi)$.

3. Calculați:

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $tg\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ pentru $\alpha\in\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{6}\right\}$;

b) $\sin(\pi\pm\alpha)$, $\cos(\pi\pm\alpha)$, $tg(\pi\pm\alpha)$ pentru $\alpha\in\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{6}\right\}$;

c) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $tg\left(\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$ pentru $\alpha\in\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{6}\right\}$;

d) $\sin(2\pi\pm\alpha)$, $\cos(2\pi\pm\alpha)$, $tg(2\pi\pm\alpha)$ pentru $\alpha\in\left\{\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

4. Să se calculeze valorile expresiilor:

$E_1=1+\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{2\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{3\pi}{4}+\sin\dfrac{4\pi}{4}$;

$E_2=1+\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{2\pi}{4}+\cos\dfrac{3\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}$.

5. Să se calculeze valorile expresiilor:

$A = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3}$;

$B = 1 + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{4\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}$;

$C = 1 + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{6} + \cos\frac{4\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{6}$.

Înlocuiți *cos* prin *sin* și calculați valorile expresiilor A,B și C astfel obținute.

6. Să se simplifice expresiile următoare în ipoteza $\sin\alpha \neq 0, \cos\alpha \neq 0$

a) $\frac{\sin(90^0+\alpha)\cdot\cos 180^0\cdot\cos(180^0+\alpha)\cdot\sin(360-\alpha)}{\cos(270^0-\alpha)\cdot\sin 90^0\cdot\cos(360^0+\alpha)\cdot\sin(180-\alpha)}$; b) $\frac{\sin 480^0\cdot\cos 540^0\cdot\sin(180+\alpha)}{\cos(180-\alpha)\cdot\sin 495^0\cdot\cos 570^0}$;

c) $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$; d) $\frac{\sin 135^0\cdot\sin 225^0\cdot\sin 405^0}{\cos 135^0\cdot\cos 225^0\cdot\cos 315^0}$.

7. Restrângeți expresiile:

a) $a\cos 3\pi + 2b\sin\frac{3\pi}{2} - 7a\cos\pi + 3b\sin\frac{\pi}{2}$;

b) $\sqrt{3}a\cos\frac{5\pi}{6} + b\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} - b\cos\frac{2\pi}{3} + a\sin\frac{7\pi}{6}$.

8. Să se determine valoarea expresiilor:

a) $E_1 = \frac{\sin 1950^0\cos(-3810^0)\operatorname{tg}(-1320^0)\sin(-870^0)}{\cos 780^0\operatorname{ctg}(-1830^0)\operatorname{tg}3840^0\cos 1140^0}$;

b) $E_2 = \frac{\operatorname{tg}(-765^0)+\sin(-2115^0)-2\operatorname{ctg}1215^0}{\sec 2025^0-\operatorname{tg}1800^0+\sin 855^0}$;

c) $E_3 = \frac{\sin(90^0-x)\cdot\operatorname{tg}132^0\cdot\operatorname{cosec}222^0\cdot\sin 90^0}{\cos(180^0+x)\cdot\sec 312^0\cdot\operatorname{tg}48^0\cdot\cos 180^0}$;

d) $E_4 = \frac{\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{2})[\sin(x-\frac{3\pi}{2})-\sin(x-\pi)]}{\operatorname{tg}(x+\pi)[\cos(x+2\pi)+\sin(x-2\pi)]}$.

9. Într-un triunghi ABC ($\hat{A}=90^0$) cu catetele b și c, se cunosc:

ipotenuza a=17 cm și perimetrul P=40 cm. Se cere:

A) Să se calculeze :

a) Suma sinusurilor unghiurilor ascuțite.

b) Produsul cosinusurilor unghiurilor ascuțite.

c) Suma tangentelor unghiurilor ascuțite.

B) Să se arate că:

a) $\sin 5A = \frac{\sin(A+B)-\sin(2A-C)}{\cos(4A-B)+\cos(A+C)}$.

b) $\operatorname{ctg}(A-B)+\operatorname{ctg}(A+B-C)+\operatorname{ctg}(A+B)+\operatorname{ctg}(B+C)+\operatorname{ctg}(A-B+C)=\operatorname{tg}(A+B+C)+\operatorname{ctg}(B+C)$.

10. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\quad f(x)=2+\cos\pi x$.

11. Se dau funcțiile $f_1(x)=\sin x,\quad f_2(x)=\cos x$ și $f_3(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) Trasând graficele funcțiilor f_1 și f_2 pe același sistem de axe să se deducă graficul funcției $g(x)=\max\limits_{x\in[0,2\pi]}\{f_1(x),f_2(x)\}$.

b) Să se traseze graficul funcției $h(x)=\max\limits_{x\in[0,2\pi]}\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$.

12.2.3 Relații de bază

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{6}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \tag{7}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha;\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha \tag{8}$$

12.2.4 Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele

Funcția	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	
$\sec\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$

Observație. Semnul + sau –, pus înaintea radicalului, este în funcție de semnul funcției trigonometrice în cadranul în care se afle unghiul α.

12. Știind că $\sin x=\dfrac{3}{5}$ și $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ să se găsească: $\cos x,\operatorname{tg}x$ și $\operatorname{ctg}x$.

Soluție: Aplicăm formula $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ și cum unghiul se găsește în cadranul II, în fața radicalului se ia semnul minus deoarece cosinusul este negativ în acest cadran. Deci: $\cos x = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{25-9}{25}} = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{4}{3}$

13. Fiind dat $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ să se găsească $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$.

Soluție: Se știe că $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ și $\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ și ținând cont de cadranul în care se află unghiul obținem: $\sin\alpha = \frac{\frac{4}{3}}{-\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{4}{5}$ *și* $\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = -\frac{3}{5}$.

14. Să se calculeze celelalte funcții trigonometrice ale unghiului α dacă:

a) $\sin\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

c) $\operatorname{tg}\alpha = 2-\sqrt{3}$, $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

e) $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

f) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{15}{8}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;

g) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

15. Fiind dat $\alpha \in (180^0, 270^0)$ să se calculeze:

a) $\sin\alpha$ știind că $\operatorname{ctg}\alpha = 2$

b) $\cos\alpha$ știind că $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{ctg}\alpha$ știind că $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

d) $\cos\alpha$ știind că $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$

e) $\sin\alpha$ știind că $\cos\alpha = -\sqrt{1-a^2}$. Cum trebuie să fie a în acest caz ?

16. Aflați $\cos x$ știind că:

a) $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ și $\sin x = -\frac{1}{2}$

b) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ și $\sin x = -\frac{1}{4}$

c) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ și $|\sin x| = \frac{1}{5}$

d) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ și $\sin^2 x = \frac{1}{9}$

17. Aflați $\sin x$ știind că:

a) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ și $\cos x = -\frac{1}{5}$

b) $\pi < x < 2\pi$ și $|\cos x| = \frac{1}{3}$

c) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ și $\cos^2 x = \frac{1}{16}$

d) $0 < x < \pi$ și $4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$.

18. Calculați $\cos a$ și $\sin b$ știind că $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$ și

a) $\left(\sin a - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\cos b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

b) $\left|\cos b - \frac{1}{3}\right| + \left|\sin a \cdot \cos b - 2\cos^2 b\right| = 0$

19. Știind că $\sin a = \frac{3}{5}$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ calculați:

a) $\sin(a - 10\pi)$;

b) $\sin(a + 80\pi)$;

c) $\cos(a - 6\pi)$;

d) $2\cos^2(-a) + \sin(-a)$

e) $3\cos(-a) + 5\sin(-a)$

f) $\sin^2(-a) + \operatorname{tg}(-a)$

20. Să se determine valoarea expresiei $E = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ dacă $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

21. Să se determine valoarea expresiei $F = \frac{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}$ dacă $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

22. Să se arate că expresia:

$$E = \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}}\right]$$

este independentă de α.

23. Se dă expresia:

$$E(x) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} - \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = E(x)$.

Soluție: b) Știind că $-1 \le \sin x \le 1; -1 \le \cos x \le 1$, putem aplica regulile de operații cu radicali: $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Avem $E = \frac{\sqrt{(1-\sin x)^2} - \sqrt{(1+\sin x)^2}}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\cos x)^2} - \sqrt{(1+\cos x)^2}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} =$

$\frac{|1-\sin x| - |1+\sin x|}{\sqrt{\cos^2 x}} \cdot \frac{|1-\cos x| - |1+\cos x|}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{1-\sin x - 1 - \sin x}{|\cos x|} \cdot \frac{1-\cos x - 1 - \cos x}{|\sin x|} =$

$$\frac{4\cdot\sin x\cdot\cos x}{|\sin x|\cdot|\cos x|} = \begin{cases} 4 & \text{pt. } x \in (2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \\ -4 & \text{pt. } x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

b) Graficul arată astfel:

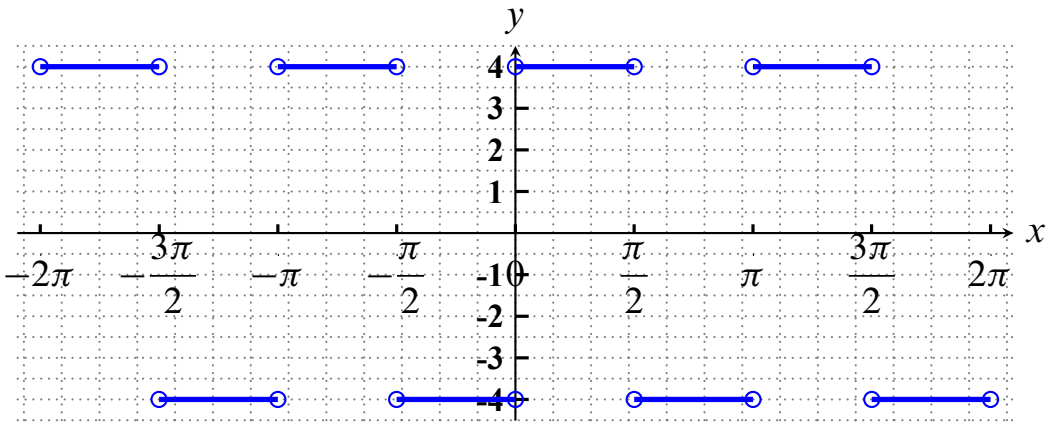


Fig. 216: *Graficul funcției* $f(x) = E(x)$

24. Se dă expresia:

$$E(x) = \sin^3 x(1 + \operatorname{tg} x) - \cos^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) \quad x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

a) Să se arate că $E(x) = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2(\sin x - \cos x)}{\sin x \cdot \cos x}$

b) Dacă $\sin x - \cos x = p$ să se calculeze în funcție de p expresia $E(x)$.

25. Fie funcția $f : R \longrightarrow R$ astfel încât $3f(x) + f(-x) = 4\sin x \cdot \cos x$.

a) Să se găsească funcția f.

b) știind că $f(x_0) = \dfrac{4}{5}$, $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ să se calculeze $E(x_0) = \sin^3 x_0(1 + \operatorname{tg} x_0) - \cos^3 x_0(1 + \operatorname{ctg} x_0)$.

Soluție: a) Domeniul de definiție al funcției fiind $\mathbb{R}$ rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $-x \in \mathbb{R}$ și deci au loc relațiile

$3f(x) + f(-x) = 4\sin x \cos x$; $\quad 3f(-x) + f(x) = -4\sin x \cos x$

de unde rezolvând sistemul în raport cu necunoscutele $f(x)$ și $f(-x)$ rezultă $f(x) = 2\sin x \cos x$

b) Expresia $E(x_0)$ se mai poate scrie : $E(x_0) = \dfrac{(1 + 2\sin x_0 \cos x_0)(\sin x_0 - \cos x_0)}{\sin x_0 \cos x_0}$. Fie $d = \sin x_0 - \cos x_0$. Rezultă $d^2 = 1 - 2\sin x_0 \cos x_0 = 1 - 2 \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}$ deoarece din $f(x_0) = \dfrac{4}{5}$ rezultă $\sin x_0 \cos x_0 = \dfrac{2}{5}$. Deci $d = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ și cum $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ avem $\sin x_0 < \cos x_0$ (vezi graficul) și deci convine numai $d = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ și $E(x_0) = \dfrac{(1 + \frac{4}{5})(-\frac{\sqrt{5}}{5})}{\frac{2}{5}} = -\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$.

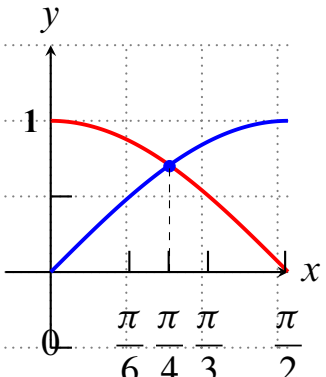


Fig. 217: *Graficul funcțiilor sin x și* **cos x**

26. Se notează cu x_1, x_2 rădăcinile ecuației :

$2x^2 - 2(\sin\alpha + \cos\alpha)x + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0.$

Să se arate că $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = 2\sin\alpha$.

27. Să se aducă la forma cea mai simplă

a) $E_1 = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\operatorname{ctg}(\pi - x)}$

b) $E_2 = \dfrac{\sin^4(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos^4(\frac{3\pi}{2} + x) + 2\sin^2(\frac{\pi}{2} + x)\cos^2(\frac{\pi}{2} + x)}{2\left[\sin^4(\pi + x) + \cos^4(\pi + x) + \sin^2(\pi + x)\cos^2(\pi + x)\right]^2 - \left[\sin^8(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos^8(\frac{3\pi}{2} - x)\right]}$

28. Să se arate că următoarele expresii nu depind de α:

a) $E_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

b) $E_2 = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{(1 - \sin\alpha)(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

c) $E_3 = \dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}$

d) $E_4 = \sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$

e) $E_5 = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha - 2(1 - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2$

f) $E_6 = \dfrac{1 + \sin^2\alpha}{2 + \operatorname{ctg}^2\alpha} + \dfrac{1 + \cos^2\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

29. Să se afle valoarea numerică a expresiei $E = \dfrac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)}$ știind că $f(x) = \cos(90^0 - x)$; $g(x) = -\cos(180^0 - x)$ și $\operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{5}$.

30. Să se calculeze valoarea expresiei $f(x) = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ știind că $\operatorname{tg} x = 2$.

31. Să se verifice următoarele identități:

a) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$

b) $(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2(1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$

c) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$

d) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$

e) $\sin^2\alpha \operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$

32. Să se elimine x din relațiile: $\begin{cases} \sin x + \cos x = a \\ \sin^3 x + \cos^3 x = b \end{cases}$

33. Se consideră trinomul $x^2 - 2x\cos a \cos b + \cos^2 a - \sin^2 b = 0$ unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că trinomul are rădăcini reale pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Să se afle rădăcinile ecuației.

34. Să se arate că dacă $x\cos a + y \sin a = m$ unde a este o constantă iar m este un parametru real, atunci $x^2 + y^2 \geq m^2$

35. Se dă $\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{5}$; $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Să se calculeze:

a) $\sin x + \cos x$ și $\sin x - \cos x$ b) $\sin^{10} x + \cos^{10} x$;

36. Știind că $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{25}{12}$ să se calculeze $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

37. Să se arate că $\operatorname{tg} 1^0 \cdot \operatorname{tg} 2^0 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 89^0 = 1$.

38. Se dă expresia $E(x) = (\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 1)\cos^4 x$.

a) Să se arate că $E(x) = (2\cos^2 x - 1)^2$.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$.

39. Se dă $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m$. Să se exprime în funcție de m expresia $E = 2\sin x \cos x$ când $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

40. Să se arate că funcția $f(x) = \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\cos x - \operatorname{ctg} x}$ este pozitivă pentru toate valorile lui x pentru care are sens.

41. Se dă

$$f(x) = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)\sin(\pi - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} - x)} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + x) - \sin(\pi + x)}{\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x)\operatorname{tg} x - 1}$$

.

a) Să se aducă f la forma cea mai simplă.

b) Să se afle domeniul maxim de definiție al funcției f.

c) Dacă forma cea mai simplă a funcției o notăm cu m să se afle în funcție de m expresia $E = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \cos x}{\sin x + \cos x}$.

d) Fie $E(m)$ valoarea expresiei de la punctul c). Să se afle maximul funcției $F(m) = \frac{(E(m) - 1)m(m^2 - 1)}{m^2 + 1}$ știind că $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

e) Există valori întregi ale lui m pentru care $E(m)$ este un număr întreg ?

12.2.5 Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\ \beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma - 1}$$

42. Să se calculeze $\sin 75^0$ și $\operatorname{tg} 15^0$

Soluție :

Avem: $\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ și $\operatorname{tg} 15^0 = \operatorname{tg}(45^0 - 30^0) = \frac{\operatorname{tg}45^0 - \operatorname{tg}30^0}{1 + \operatorname{tg}45^0\cdot\operatorname{tg}30^0} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$

43. Să se calculeze:

a) $\sin 15^0$ c) $\sin 135^0$ e) $\cos 15^0$

b) $\cos 105^0$ d) $\cos 135^0$ f) $\operatorname{tg} 105^0$

44. Să se calculeze:

a) $\sin 17^0 \cos 13^0 + \cos 17^0 \sin 13^0$; b) $\cos 73^0 \cos 17^0 - \sin 73^0 \sin 17^0$;

c) $\frac{\operatorname{tg}31^0 + \operatorname{tg}14^0}{1 - \operatorname{tg}31^0\operatorname{tg}14^0}$; d) $\frac{\operatorname{tg}74^0 - \operatorname{tg}14^0}{1 + \operatorname{tg}74^0\operatorname{tg}14^0}$;

e) $\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{3}$; f) $\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{9}$.

45. Să se demonstreze egalitățile:

a) $\frac{\sin 57^0\cos 12^0 - \cos 57^0 \sin 12^0}{\cos 35^0\cos 10^0 - \sin 35^0 \sin 10^0} = 1$;

b) $\frac{\sin 49^0\cos 11^0 + \cos 49^0 \sin 11^0}{\cos 104^0\cos 74^0 + \sin 104^0 \sin 74^0} = 1$;

c) $\dfrac{\sin 34^0 \sin 146^0 + \sin 236^0 \sin 304^0}{\cos 32^0 \cos 28^0 - \cos 302^0 \sin 152^0} = 2$

d) $\dfrac{\sin\alpha \sin(180^0 - \alpha) + \sin(270^0 - \alpha)\sin(270^0 + \alpha)}{\sin 105^0 \cos 75^0 - \cos 105^0 \sin 75^0} = 2$

46. Dacă $\sin a = \dfrac{5}{13}$, $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$; $\cos b = \dfrac{3}{5}$, $b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\sin(a+b)$, $\cos(a-b)$ și $\cos(a+b)$.

Soluție:

Avem: $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\sqrt{1 - \dfrac{25}{169}} = -\dfrac{12}{13}$ și $\sin b = \sqrt{1-\cos^2 b} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$.

Deci $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5} \cdot (-\dfrac{12}{13}) = -\dfrac{33}{65}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = -\dfrac{12}{13} \cdot \dfrac{3}{5} - \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{56}{65}$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = -\dfrac{12}{13} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{16}{65}$

47. Fiind date $\cos\alpha = \dfrac{1}{7}$ și $\cos\beta = \dfrac{13}{14}$ $\alpha, \beta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ să se arate că $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{3}$

48. Fiind date: $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}, \sin\beta = -\dfrac{3}{5}$, $\alpha, \beta \in (\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi)$ să se calculeze $\cos(\alpha+\beta)$

49. Dacă $\sin x > 0$, $\cos y < 0, \cos x = -\dfrac{3}{5}$, $\sin y = \dfrac{5}{13}$ să se calculeze $\cos(x-y)$

50. Se dă $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ și $\cos\beta = -\dfrac{1}{4}$ unde $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$. Să se calculeze $\sin(\alpha+\beta)$; $\cos(\alpha+\beta)$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ și $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

51. Se dă $\operatorname{tg}\alpha = 2,3$ și $\operatorname{tg}\beta = -1,8$. Să se calculeze $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ și $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

52. Se dă $\cos A = \dfrac{12}{13}$, $\sin B = \dfrac{3}{5}$. Să se calculeze:

a) $\operatorname{tg}(A+B)$ și $\operatorname{tg}(A-B)$ știind că $A \in (0, 90^0)$ și $B \in (90^0, 180^0)$;

b) $\cos(A+B)$ și $\cos(A-B)$ știind că $A \in (270^0, 360^0)$ și $B \in (0, 90^0)$

53. Să se calculeze $\sin\alpha$ Știind că $\cos(60^o - \alpha) = \dfrac{1}{3}$, α fiind un unghi în cadranul II.

Soluție:

Metoda I

$\cos(60^o - \alpha) \Leftrightarrow \cos 60^o \cos\alpha + \sin 60^o \sin\alpha = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos\alpha = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$. Prin ridicare la pătrat a ultimei relații rezultă: $\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha = \dfrac{1}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \dfrac{3}{4}\sin^2\alpha \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(1-\sin^2\alpha) = \dfrac{1}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha + \dfrac{3}{4}\sin^2\alpha \Leftrightarrow 36\sin^2\alpha - 12\sqrt{3}\sin\alpha - 5 = 0$ de unde $(\sin\alpha)_{1,2} =$

$\frac{6\sqrt{3}\pm\sqrt{108+180}}{36}=\frac{6\sqrt{3}\pm 12\sqrt{2}}{36}=\frac{\sqrt{3}\pm 2\sqrt{2}}{6}$. Unghiul α fiind în cadranul II convine $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$

Metoda II

Deoarece $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\cos(60^o-\alpha)=\frac{1}{3}>0$ rezultă $0<\alpha-60^o<90^o$ și deci $-\sin(60^0-\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(60^0-\alpha)}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ și $\sin(60^0-\alpha)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Deci $\sin(60^0-\alpha)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos(60^0-\alpha)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sin 60^0\cos\alpha-\sin\alpha\cos 60^0=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ și $\cos 60^0\cos\alpha+\sin 60^0\sin\alpha=\frac{1}{3}$ sau $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ și $\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Aceste două relații pot fi privite ca un sistem liniar cu necunoscutele $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$. Prin rezolvare rezultă $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$

54. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$ știind că $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)=3$.

55. Să se calculeze $\sin\alpha$ știind că $\cos(\alpha-30^0)=\frac{1}{6}$, α fiind un unghi în cadranul II.

56. Să se calculeze $\cos\alpha$ știind că $\sin(\alpha-60^0)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, α fiind un unghi în cadranul II.

57. Se dau $\operatorname{tg}x=\frac{2m-1}{\sqrt{3}}$ și $\operatorname{tg}y=\frac{2-m}{m\sqrt{3}}$, $m\neq 0$. Să se calculeze $x+y$.

58. Să se arate că expresia: $E=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$ nu depinde de α.

59. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$$

60. Să se arate că dacă $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ atunci $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

Soluție :

Metoda I

Din relația de condiție avem $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)$ și înlocuind rezultă $tg(\pi-(\beta+\gamma))+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=tg(\pi-(\beta+\gamma))\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\Leftrightarrow -tg(\beta+\gamma)+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=-tg(\beta+\gamma)\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\Leftrightarrow -\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\Leftrightarrow(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)\left(\frac{-1}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}+1\right)=\frac{-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}\Leftrightarrow\frac{-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\frac{-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$

Metoda II

Din relația de condiție avem $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ de unde $tg(\alpha+\beta)=tg(\pi-\gamma)\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\rightarrow\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$

Metoda III

$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Leftrightarrow tg(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}\pi \Leftrightarrow \dfrac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha tg\beta tg\gamma}{1-tg\alpha tg\beta-tg\beta tg\gamma-tg\alpha tg\gamma}=0 \Leftrightarrow$
$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha tg\beta tg\gamma=0 \Leftrightarrow tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma$

61. Să se arate că dacă $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ atunci :

a) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1$

b) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

62. Știind că $\alpha+\beta=\gamma$ să se arate că $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

63. Știind că $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ să se arate că : $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

64. Să se calculeze $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ știind că $\sin\alpha_1=\dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha_3=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ unde $\dfrac{\pi}{2}<\alpha_1<\pi<\alpha_2<\dfrac{3\pi}{2}<\alpha_3<2\pi$.

Rezolvare:

Avem $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$ și $\cos\alpha_1=-\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}=-\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{3}{5}$ $\sin\alpha_2=-\sqrt{1-\cos^2\alpha_2}=-\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ și $\cos\alpha_3=\sqrt{1-\dfrac{9}{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Deci $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(-\dfrac{3}{5}\right)\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(-\dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)=-\dfrac{31\sqrt{50}}{250}$.

65. Să se calculeze $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ și $\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$ știind că $\cos\alpha_1=-\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha_2=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha_3=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ și $\dfrac{\pi}{2}<\alpha_1<\pi$; $\pi<\alpha_2<\dfrac{3\pi}{2}<\alpha_3<2\pi$.

66. Să se demonstreze că dacă α,β,γ sunt unghiuri ascuțite și $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{8}$ atunci $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$

67. Să se demonstreze că dacă α și β sunt unghiuri ascuțite și $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ iar $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$ atunci $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$

68. Să se demonstreze identitățile: a) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

b) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha$

c) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos\alpha$

d) $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$

e) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=1-\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

69. Să se verifice identitățile:

a) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$

b) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$

d) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$.

70. Să se demonstreze identitățile

a) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$

c) $\operatorname{ctg}\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}a=\dfrac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{ctg}a}$

d) $\dfrac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)$.

71. Să se calculeze suma:

$$S=\frac{\sin 1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\ldots+\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cdot\cos n}$$

Indicație: Avem $\dfrac{\sin 1}{\cos(k-1)\cdot\cos k}=\dfrac{\sin(k-(k-1))}{\cos(k-1)\cdot\cos k}=\dfrac{\sin k}{\cos k}-\dfrac{\sin(k-1)}{\cos(k-1)}$ și însumând după k obținem $S=\operatorname{tg}n$

72. Să se demonstreze identitatea: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos(k-1)\alpha\cdot\cos k\alpha}=\frac{\operatorname{tg}n\alpha}{\sin\alpha}$, unde n este număr natural, $\alpha\neq 0$.

(Grecu I. Eftimie)

73. Să se calculeze suma: $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos(\alpha+(k-1)\beta)\cdot\cos(\alpha+k\beta)}$

12.2.6 Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;

$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\quad\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$;

$\sin 3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$; $\quad\cos 3\alpha=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)$;

$\operatorname{tg}3\alpha=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\quad\operatorname{ctg}3\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$.

74. Cunoscând $\cos\alpha=\dfrac{7}{8}$ unde $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ să se calculeze $\cos 2\alpha$; $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ și $\operatorname{ctg}2\alpha$.

75. Fiind dat $\sin\alpha=\dfrac{4}{7}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ să se calculeze $2\cos\alpha$ și $\cos 2\alpha$; $2\sin\alpha$ și $\sin 2\alpha$; $2\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg}2\alpha$.

76. Știind că $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ și apoi $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, și $\operatorname{tg}4\alpha$.

77. Să se scrie expresia $E = 1+\sin^2 x\cos^2 x+m(\sin^4 x+\cos^4 x)-3m(\sin^6 x+\cos^6 x)$ în funcție de $u = \sin 2x$, apoi să se determine parametrul m astfel încât E să nu depindă de x.

78. Să se arate că:

a) $\dfrac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} x$;

b) $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x$

c) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

d) $\operatorname{tg}(30^0+\alpha)\operatorname{tg}(30^0-\alpha) = \dfrac{2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}$

79. Dacă $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ și $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4}$ să se calculeze $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)$.

80. Dacă $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$ și $\cos\beta = -\dfrac{4}{5}$ unde $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ să se calculeze $\sin(2\alpha+\beta)$ și $\cos(2\alpha-\beta)$.

81. Să se demonstreze identitățile :

a) $\sin 3a+\sin a = \dfrac{4\sin a}{1+tg^2 a}$

b) $\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x = -\dfrac{\sin 4x}{4}$

c) $\dfrac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}+\dfrac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x} = 3$

d) $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha-4\operatorname{ctg} 4\alpha$.

82. Se dă $\sin\alpha = 0,3$. Să se calculeze $\sin 3\alpha$.

83. Se dă $\cos 2\alpha = \dfrac{2}{5}$ și $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

84. Se dă $\cos\alpha = -\dfrac{2}{5}$. Să se calculeze $\cos 3\alpha$.

85. Se dă $\sin a = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$. Calculând $\sin 2a$ să se determine unghiul a.

Soluție:

Avem $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$ și $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1}{2}$ și deci $2a = \dfrac{\pi}{6}$ iar $a = \dfrac{\pi}{12}$.

86. Să se arate că $\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x = \cos^3 2x$.

12.2.7 Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Pentru funcțiile $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ și $\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2}$ se folosesc uneori și formulele

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

De asemenea sunt utile și formulele

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

87. Să se calculeze $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ și $\operatorname{tg}\alpha$ Știind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{7}$, $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Indicație: Avem $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{24}{25}$.

88. Să se calculeze $\sin 22^0 30'$, $\cos 22^0 30'$, $\operatorname{tg} 22^0 30'$.

Exemplu rezolvat: $\sin 22^0 30'=\sin\frac{45^0}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^0}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

89. Știind că $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

90. Să se arate că: $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

Soluție:

Avem $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\Longrightarrow\cos^4\frac{\pi}{8}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{3+\sqrt{2}}{8}$.

$\cos^2\frac{3\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Longrightarrow\cos^4\frac{3\pi}{8}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{3-\sqrt{2}}{8}$.

Analog $\cos^4\frac{5\pi}{8}=\frac{3-\sqrt{2}}{8}$ și $\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3-\sqrt{2}}{8}$.

91. Să se calculeze valoarea expresiei:

$E=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$.

92. Să se calculeze valoarea expresiei E=$\operatorname{tg}4\alpha+4\operatorname{tg}2\alpha-2a$ Știind că $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=a$.

Soluție:

Avem $a=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{tg^2\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{-2(1-tg^2\alpha)}{2\operatorname{tg}\alpha}=-2\operatorname{ctg}2\alpha=-\frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}$ de unde rezultă că $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{2}{a}$ și $\operatorname{tg}4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-tg^2 2\alpha}=\frac{-\frac{4}{a}}{1-\frac{4}{a^2}}=\frac{4a}{4-a^2}$. Deci E=$\frac{4a}{4-a^2}-\frac{8}{a}+2a=\frac{2(a^2-2)(a^2-8)}{a(a^2-4)}$.

93. Să se calculeze $\cos\frac{\alpha}{2}$ și $\sin 2\alpha$ știind că $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{24}$ și $450^0 < \alpha < 540^0$.

94. știind că $\sin\alpha + \sin\beta = m$ și $\cos\alpha + \cos\beta = n$, calculați în funcție de m și n, $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

95. a) Să se verifice identitatea $(1-\cos a\cos b)^2 - \sin^2 a\sin^2 b = (\cos a - \cos b)^2$ apoi să se rezolve ecuația $x^2\sin^2 b - 2x(1-\cos a\cos b) + \sin^2 a = 0$.

b) x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației de mai sus să se calculeze E=$\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$ dacă $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Rezolvare:

a) Avem $(1-\cos a\cos b)^2 - \sin^2 a\sin^2 b = 1 - 2\cos a\cos b + \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b = 1 - 2\cos a\cos b + \cos^2 a\cos^2 b - (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) = 1 - 2\cos a\cos b + \cos^2 a\cos^2 b - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a\cos^2 b = (\cos a - \cos b)^2$ și

$x_{1,2} = \frac{1-\cos a\cos b \pm \sqrt{(1-\cos a\cos b)^2 - \sin^2 a\sin^2 b}}{\sin^2 b}$ ținând seama de identitatea de la a) rezultă $x_{1,2} = \frac{1-\cos a\cos b \pm (\cos a - \cos b}{\sin^2 b}$. Rădăcinile găsite se mai pot scrie

$$x_1 = \frac{1-\cos a\cos b + \cos a - \cos b}{\sin^2 b} = \frac{(1-\cos b)(1-\cos a)}{\sin^2 b} = \frac{2\sin^2\frac{b}{2}\cdot 2\sin^2\frac{a}{2}}{4\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{b}{2}} = \frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{b}{2}}.$$

Analog $x_2 = \frac{(1+\cos b)(1-\cos a)}{\sin^2 b} = \frac{4\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}}{4\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{b}{2}} = \frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{b}{2}}$

b) În urma rezultatelor obținute la pct.a) putem scrie E=$\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} = \left(\frac{|\cos\frac{a}{2}|}{|\cos\frac{b}{2}|} - \frac{|\sin\frac{a}{2}|}{|\sin\frac{b}{2}|}\right) : \left(\frac{|\cos\frac{a}{2}|}{|\cos\frac{b}{2}|} + \frac{|\sin\frac{a}{2}|}{|\sin\frac{b}{2}|}\right) = \left(\frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}} - \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\right) : \left(\frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}} + \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\right) = \frac{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}} = \frac{\sin\frac{b-a}{2}}{\sin\frac{b+a}{2}}$

96. Știind că $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{2}; \cos\frac{\alpha}{2}; \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

97. Știind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2+\sqrt{3}$ să se calculeze $\sin\alpha; \sin 2\alpha; \cos\alpha; \cos 2\alpha; \operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg} 2\alpha$.

98. Știind că $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ și $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ se cere:

a) Să se arate că $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ b) Să se calculeze $\operatorname{tg} 4\beta$.

99. Să se verifice identitățile:

a) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$

c) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

d) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{1}{2}(1+\operatorname{tg}\alpha)^2$

e) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg} 3\alpha$

100. Se dau $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ și $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Să se calculeze :

$\cos\dfrac{\pi}{8}$; $\sin\dfrac{\pi}{8}$; $\cos\dfrac{\pi}{16}$; $\sin\dfrac{\pi}{16}$; $\cos\dfrac{\pi}{32}$; $\sin\dfrac{\pi}{32}$.

101. Să se calculeze în funcție de p expresia

$E(x) = \dfrac{\sin^2 2x + 2\sin 2x + 2}{\sin 2x + 1}$ dacă $p = \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

102. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

103. Se dă expresia $E(\alpha) = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} + \dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

a) Să se afle domeniul maxim de definiție al expresiei.

b) Să se arate că $E(\alpha) = \dfrac{1+tg^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

c) Să se afle $\operatorname{tg}\alpha$ știind că $E(\alpha) = \dfrac{5}{3}$.

d) Dacă $\operatorname{tg} x = 2$ și $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ să se afle $\sin 4x$ și $\cos\dfrac{x}{2}$.

104. Se dă funcția: $f(x) = \dfrac{2\sin\left(\dfrac{307\pi}{18}+x\right)\sin\left(\dfrac{122\pi}{9}+x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{9}-x\right)}{2\sin^2\left(\dfrac{41\pi}{9}+x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{9}-x\right) - 1}$.

a) Să se aducă funcția la forma cea mai simplă.

b) Pentru ce valori reale ale lui x funcția nu este definită și care este perioada ?

c) Determinați semnul expresiei $E = f\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + f\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$.

12.2.8 Exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unghiului α cu ajutorul $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ (formulele universale)

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \operatorname{ctg} a = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

105. Să se calculeze $E = 4\sin a + 3\cos a - 5$ dacă $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{3}{2}$.

106. Dacă $E = 4\sin a + 3\cos a - 5 = 0$, să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

107. Calculați $E = \frac{2\sin x - 3\cos x}{\sin x + 2\cos x}$ dacă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

108. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha, \operatorname{tg} 4\alpha$ dacă $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

109. Se dă $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{3}$. Se cere:

a) $\sin(\alpha+\beta)$; b) $\sin(\alpha-\beta)$; c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

110. Se dă $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{7}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$ și $\operatorname{tg} 4\alpha$.

111. Să se verifice identitățile:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha$

c) $\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) : \left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right) = 1$

Soluție:

a) Avem $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-tg^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.

c) Se aplică formulele $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \frac{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

112. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ Știind că $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ și că unghiul $\alpha \in (0, 45^0)$.

Soluție:

Notăm $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$ și atunci $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Înlocuind în relația dată obținem: $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{7}{5}$ sau $6t^2 - 5t + 1 = 0$ de unde $t_1 = \frac{1}{3}$ și $t_2 = \frac{1}{2}$. Expresia $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ar putea

avea deci valorile $\frac{1}{3}$ sau $\frac{1}{2}$. Cum $0 < \alpha < 45^0$ avem $0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} 22^0 30'$. Cum $\operatorname{tg} 22^0 30' = \sqrt{2} - 1 \cong 0,414\ldots$ și $\frac{1}{3} \cong 0,5$ iar $\frac{1}{2} = 0,5$ convine $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

113. Găsiți $\operatorname{tg}\frac{a}{2} > 0$ știind că $\sin a + \cos a = \frac{1}{5}$.

12.2.9 Transformarea unor sume și diferențe de funcții trigonometrice în produs.

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \qquad 1 + \cos\beta = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

114. Să se transforme în produs:

a) $\sin 75^0 + \sin 15^0$;
b) $\sin 75^0 - \sin 15^0$;
c) $\cos 75^0 + \cos 15^0$;
d) $\cos 75^0 - \cos 15^0$;
e) $\cos 48^0 - \sin 78^0$;
f) $\sin 48^0 + \cos 78^0$.

Exemple rezolvate:

a) $\sin 75^0 + \sin 15^0 = 2\sin\frac{75^0 + 15^0}{2}\cos\frac{75^0 - 15^0}{2} = 2\sin 45^0\cos 30^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

f) $\sin 48^0 + \cos 78^0 = \sin 48^0 + \sin 12^0 = \cos 18^0$.

115. Să se demonstreze identitatea $\sin 15^0 + \cos 15^0 = \sqrt{3}(\cos 15^0 - \sin 15^0)$.

116. Să se arate că: $\operatorname{tg} 9^0 - \operatorname{tg} 27^0 - \operatorname{tg} 63^0 + \operatorname{tg} 81^0 = 4$.

117. Să se arate că: $\sin\frac{5\pi}{24} + \cos\frac{11\pi}{24} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}}{2}$.

118. Să se transforme în produs expresiile:

a) $E_1 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$
b) $E_2 = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha$
c) $E_3 = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha$
d) $E_4 = 1 - \sin\alpha + \cos\alpha$.

Exemplu rezolvat :

b)$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ și deci $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$. Atunci: $E_2=\cos\alpha+2\cos^2\alpha=2\cos\alpha\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=2\cos\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\right)=4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

119. Să se transforme în produs $E=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

120. Să se transforme în produs expresia: $E=\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}+\sin\frac{\pi}{8}$.

121. Să se arate că expresia $E=\cos^2 6x+\sin^2 5x+\sin x\sin 11x$ nu depinde de x.

122. Să se arate că expresia $E(x,y)=\cos^2(x-y)+\cos^2(x+y)-\cos 2x\cos 2y$ nu depinde de x și y.

123. Dacă $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ să se transforme în produs expresia $E=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$.

Soluție:

Deoarece $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ rezultă că $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ și $E=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ și cum $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ avem $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$ și deci $E=4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

124. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin 25^0}{\cos 30^0\cdot\cos 35^0}+\frac{\sin 30^0}{\cos 25^0\cdot\cos 35^0}+\frac{\sin 35^0}{\cos 25^0\cdot\cos 30^0}=2.$$

125. Să se simplifice fracția: $E=\frac{(\sin A-\sin B)^2+(\cos A-\cos B)^2}{(\sin A+\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2}$.

Soluție: *Metoda I*. Efectuând ridicările la pătrat avem succesiv

$$E=\frac{\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B+\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B}{\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B+\cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B}=$$

$$\frac{2-2(\sin A\sin B+\cos A\cos B)}{2+2(\sin A\sin B+\cos A\cos B)}=\frac{2(1-\cos(A-B))}{2(1+\cos(A+B))}=\frac{2\sin^2\frac{A-B}{2}}{2\cos^2\frac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{A-B}{2}$$

Metoda II. În fiecare paranteză se transformă diferențele respectiv sumele în produse și se obține succesiv:

$$E=\frac{\left(2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)^2+\left(-2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\right)^2}{\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)^2}=$$

$$\frac{4\sin^2\frac{A-B}{2}\left(\sin^2\frac{A+B}{2}+\cos^2\frac{A+B}{2}\right)}{4\cos^2\frac{A-B}{2}\left(\sin^2\frac{A+B}{2}+\cos^2\frac{A+B}{2}\right)}=\operatorname{tg}^2\frac{A-B}{2}$$

.

126. Să se transforme în produs suma:

$S = \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 3x.$

127. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y) = \sin 2x \sin 2y.$$

128. Să se verifice identitatea: $\dfrac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a - \sin^2 x} = \operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x).$

129. Să se verifice identitățile:

a) $\sin 2a + \sin 4a + \sin 6a = 4\cos a \cos 2a \sin 3a$

b) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \dfrac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$

c) $\dfrac{k + \sin a + k\cos a}{1 + k\sin a - \cos a} = \operatorname{ctg}\dfrac{a}{2}$

d) $\dfrac{\sin a + \sin 5a + \sin 9a}{\cos a + \cos 5a + \cos 9a} = \operatorname{tg} 5a$

e) $\dfrac{\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b)}{\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b)} = \operatorname{tg}(a+b).$

130. Să se simplifice fracțiile:

a) $E_1 = \dfrac{2\sin a + \cos 3a - \cos 5a}{2\cos a + \sin 3a + \sin 5a}$

b) $E_2 = \dfrac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x}$

c) $E_3 = \dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}$

d) $E_4 = \dfrac{\sin^2 8a - \sin^2 4a}{\cos^2 7a - \cos^2 5a}$

e) $E_5 = \dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a}$

f) $E_6 = \dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha};$

g) $E_7 = \dfrac{\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta)}{\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta)}$

131. Să se simplifice fracțiile:

a) $E = \dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) + \cos 3x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 5x\right)}{\sin 3x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin 5x}$

b) $F = \dfrac{\sin 5x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3x\right) + \sin x}{\sin\left(\dfrac{9\pi}{2} + x\right) + \cos 5x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3x\right)}.$

132. Să se arate că:

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

133. Să se arate că dacă: $A + B + C = 180^0$ atunci:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

b) $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\sin C$

d) $\operatorname{tg} nA+\operatorname{tg} nB+\operatorname{tg} nC=\operatorname{tg} nA\operatorname{tg} nB\operatorname{tg} nC$

e) $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

134. Să se arate că dacă $A+B+C=\pi$ atunci:

a) $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$;

b) $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

135. Se consideră funcția $f:(0,2\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sin x+\sin 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}}+\frac{\cos x-\cos 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$.

a) Să se arate că $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\\ 2\sqrt{2}\sin 2x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ -2\sqrt{2}\sin 2x, & x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$

b) Să se reprezinte grafic funcția.

12.2.10 Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice în sume:

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$

136. Se dă $\cos a=\frac{3}{4}$ și $0^0<a<90^0$. Să se calculeze expresia

$E=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{5a}{2}$

137. Transformați produsele în sume:

a) $\sin 72^0\cos 12^0$;

b) $\sin 22^0\sin 12^0$;

c) $\cos 20^0\cos 40^0$;

d) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}$;

e) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}$;

f) $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8}$.

138. Să se transforme în sumă produsul $P=8\cos 10^0\cos 20^0\cos 40^0\cos 60^0$.

Soluție:

Avem $P = 8\cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 = 4\cos 10^0(\cos 20^0 \cos 40^0)$
$= 4\cos 10^0\left(\frac{\cos 60^0 + \cos 20^0}{2}\right) = 2\cos 10^0\left(\frac{1}{2} + \cos 20^0\right) = \cos 10^0 + 2\cos 10^0 \cos 20^0 =$
$\cos 10^0 + \cos 30^0 + \cos 10^0 = 2\cos 10^0 + \cos 30^0 = 2\cos 10^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

139. Să se demonstreze identitățile:

a) $\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 60^0 \sin 80^0 = \frac{3}{16}$

b) $\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 \cos 80^0 = \frac{1}{16}$

140. Transformați produsele în sume:

a) $4\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 5\alpha$;

b) $4\cos\alpha \cos 3\alpha \cos 5\alpha$;

c) $4\sin\alpha \cos 3\alpha \sin 5\alpha$;

d) $4\sin\alpha \cos 3\alpha \cos 5\alpha$.

141. Să se arate că:

a) $4\sin a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \sin 3a$;

b) $4\cos a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \cos 3a$;

c) $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \operatorname{tg} 3a$;

d) $16 \cdot \cos 6^0 \cdot \cos 42^0 \cdot \cos 66^0 \cdot \cos 78^0 = 1$;

e) $16 \cdot \sin 6^0 \cdot \sin 42^0 \cdot \sin 66^0 \cdot \sin 78^0 = 1$;

f) $\operatorname{tg} 20^0 \cdot \operatorname{tg} 40^2 \cdot \operatorname{tg} 60^0 \cdot \operatorname{tg} 80^0 = 3$.

142. Să se transforme în produs suma de sinusuri a n unghiuri în progresie aritmetică, adică:

$$S = \sin\alpha + \sin(\alpha + h) + \sin(\alpha + 2h) + \cdots + \sin(\alpha + (n-1)h)$$

Soluție:

Înmulțind cu $2\sin\frac{h}{2}$ ambii membrii ai sumei, avem: $2S\sin\frac{h}{2} = 2\sin\alpha \sin\frac{h}{2} + 2\sin(\alpha+h)\sin\frac{h}{2} +$ $\cdots + 2\sin(\alpha + (n-1)h)\sin\frac{h}{2}$. Fiecare produs de sinusuri se poate înlocui prin diferența a două cosinusuri, adică:

$$2\sin\alpha \sin\frac{h}{2} = \cos\left(\alpha - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{h}{2}\right)$$

$$2\sin(\alpha + h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3h}{2}\right)$$

$$2\sin(\alpha + 2h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{3h}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{5h}{2}\right)$$

. . . . . .

$2\sin(\alpha+(n-1)h)\sin\frac{h}{2}=\cos\left(\alpha+\frac{(2n-3)h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{(2n-1)h}{2}\right)$ Adunând membru cu membru aceste relații obținem:

$2S\sin\frac{h}{2}=\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{(2n-1)h}{2}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)h}{2}\right)\sin\frac{nh}{2}$ de unde

$$S=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)h}{2}\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

143. Să se calculeze sumele:

a) $S_1=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha$

b) $S_2=\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cos(\alpha+2h)+\cdots+\cos(\alpha+(n-1)h)$

144. Să se arate că:

a) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\frac{1}{2}=0$

b) $\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}-\frac{1}{2}=0$

c) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

d) $\cos\frac{\pi}{4n+3}+\cos\frac{3\pi}{4n+3}+\cos\frac{(5\pi)}{4n+3}+\ldots+\cos\frac{(4n+1)\pi}{4n+3}=\frac{1}{2}$

145. Să se arate că:

$$\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{19}+\cos\frac{4\pi}{19}+\cos\frac{6\pi}{19}+\cos\frac{8\pi}{19}=\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}+\cos\frac{9\pi}{19}$$

146. Să se verifice identitatea:

a) $\sin 5a\sin a-\sin 7a\sin 3a=\sin^2 3a-\sin^2 5a$;

b) $\cos 2a\cos a-\sin 4a\sin a=\cos 3a\cos a$

147. Să se simplifice fracția: $E=\dfrac{\sin x\sin z+\sin(x+z)\sin 2(x+z)}{\cos x\sin z+\sin(x+z)\cos 2(x+z)}$

12.3 Transformarea expresiei $a\sin\alpha\pm b\cos\alpha$ în produs

Dând pe a factor și notând $\frac{b}{a}=tg\varphi$, obținem:

$a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=a(\sin\alpha\pm\frac{b}{a}\cos\alpha)=a(\sin\alpha\pm\operatorname{tg}\varphi\cos\beta=$

$a(\sin\alpha\pm\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha)=\frac{a}{\cos\varphi}(\sin\alpha\cos\varphi\pm\sin\varphi\cos\alpha)=\frac{a\sin(\alpha\pm\varphi)}{\cos\varphi}$

148. Să se afle maximul funcției $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$

Soluție:

Metoda I

Notând $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și ținând cont că $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ obținem $y = f(t) = \frac{-3t^2+4t+3}{1+t^2}$. Deoarece $x \in \mathbb{R}$ rezultă $t \in \mathbb{R}$ și deci $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Egalitatea $y = \frac{-3t^2+4t+3}{1+t^2}$ are loc pentru $t \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}$. Ea este echivalentă cu $t^2(y+3) - 4t + y - 3 = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Rezultă $\Delta = 16 - 4(y+3)(y-3) \geq 0 \Longrightarrow 4 - y^2 + 9 \geq 0 \Longrightarrow y^2 - 13 \leq 0 \Longrightarrow y \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]$ și deci maximul funcției este $y = f(x) = \sqrt{13}$.

Metoda a II-a

Dacă punem $\frac{3}{2} = \operatorname{tg}\varphi$, atunci $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ și $y = 2(\sin x + \frac{3}{2}\cos x) = 2(\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x) = 2(\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x) = 2\left(\frac{\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x}{\cos\varphi}\right) = \frac{2\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi} = \sqrt{13}\sin(x+\varphi)$. Valoarea maximă a lui y are loc când $\sin(x+\varphi)$ este maxim, adică 1. Deci $y_{max} = \sqrt{13}$.

149. Să se arate că $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ unde $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Soluție: Avem : $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right)$ $= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$.

150. Să se determine extremele funcției:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 9\sin x + 12\cos x$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 4\sin 3x + 3\cos 3x$

d) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = 12\sin 2x - 5\cos 2x$

Exemplu rezolvat:

d) $u(x) = \sqrt{12^2+5^2}\sin(2x-\varphi) = 13\sin(2x-\varphi)$ (vezi exercițiul 149) și cum $\sin(2x-\varphi) \in [-1,1]$, rezultă $u(x) \in [-13,13]$ și deci $u_{minim} = -13$ și $u_{maxim} = 13$

12.4 Aplicații diverse

151. Folosind o substituție trigonometrică convenabilă, să se afle extremele funcției $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

152. Folosind o substituție trigonometrică convenabilă, să se afle extremele funcției $f(x) = \frac{1+x^4}{(x^2+1)^2}$.

153. Să se elimine θ între relațiile: $\begin{cases} x = a\cos\theta\cos 2\theta \\ y = b\sin\theta\sin 2\theta \end{cases}$

Soluție:

Avem $\begin{cases} x = a\dfrac{\cos\theta+\cos 3\theta}{2} \\ y = b\dfrac{\cos\theta-\cos 3\theta}{2} \end{cases}$ care dau $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \\ \cos 3\theta = \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} \end{cases}$

ținând cont că $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ rezultă $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} = 4\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^3 - 3\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)$.

154. Să se elimine φ între relațiile: $\sin\varphi+\sin 2\varphi = a$, $\cos\varphi+\cos 2\varphi = b$

Indicație : Se ridică ambele relații la pătrat și se adună, apoi se folosește relația a doua.

155. Să se elimine α între relațiile $\begin{cases} m\cos\alpha + n\sin\alpha = a \\ n\cos\alpha + m\sin\alpha = b \end{cases}$.

156. Să se demonstreze inegalitatea $\left|\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right| \le \sqrt{2}$

157. Să se elimine φ între relațiile $x = a\cos\varphi\cos 2\varphi$, $y = b\sin\varphi\sin 2\varphi$.

158. Să se demonstreze că: $\dfrac{\sin x-1}{\sin x-2}+\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{2-\sin x}{3-\sin x}$, $\forall x \in R$

159. Știind că $A+B+C=\pi$ să se demonstreze inegalitatea $8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le 1$

Soluție:

ținând cont că $2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{A-B}{2} - \cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}) = \cos\dfrac{A-B}{2} - \sin\dfrac{C}{2}$ relația $8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le 1$ este echivalentă cu $4\sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}-\sin\dfrac{C}{2}\right)-1 \le 0$ sau $4\sin^2\dfrac{C}{2} - 4\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+1 \ge 0$ și cum $1 = \cos^2\dfrac{A-B}{2}+\sin^2\dfrac{A-B}{2}$ avem $4\sin^2\dfrac{C}{2} - 4\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos^2\dfrac{A-B}{2}+\sin^2\dfrac{A-B}{2} \ge 0$ sau $\left(2\sin\dfrac{C}{2}-\cos\dfrac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\dfrac{A-B}{2} \ge 0$. Ultima inegalitate fiind evidentă rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

Obs. Are loc egalitate numai dacă $A=B=C=60^0$

160. a) Să se determine funcțiile reale de variabilă reală f și g care verifică relația $f(x+y)+g(x-y) = 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ știind că f este impară iar g este funcție pară.

b) Fie $F(x) = \dfrac{f(5x)-f(3x)}{\sqrt{1-g(2x)}} - \dfrac{g(5x)+g(3x)}{\sqrt{1+g(2x)}}$ unde și sunt funcțiile de la punctul a). Să se aducă funcția la forma cea mai simplă iar pentru $x \in (0,2\pi)\bigcap E_{max}$ unde E_{max} este domeniul maxim de definiție al funcției , să se construiască graficul funcției F.

Soluție:

Relația fiind adevărată pentru orice $x, y \in R$ punând $y = 0$, obținem $f(x) + g(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ (1)

Punând apoi $x = 0$ și $y = -x$ și ținând cont de paritatea funcțiilor obținem: $-f(x) + g(x) = -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$ (2)

Prin însumarea membru cu membru a relațiilor (1) și (2) și transformarea diferenței de sinusuri în produs, obținem $g(x) = \cos x$

Prin diferența relațiilor (1) și (2) și transformarea sumei de sinusuri în produs, obținem: $f(x) = \sin x$

b) Avem $F(x) = \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}} - \dfrac{\cos 5x + cos3x}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \dfrac{2\sin x \cos 4x}{\sqrt{2\sin^2 x}} - \dfrac{2\cos x \cos 4x}{\sqrt{2\cos^2 x}} = \dfrac{2\sin x \cos 4x}{\sqrt{2}|\sin x|} - \dfrac{2\cos 4x \cos x}{\sqrt{2}|\cos x|}$

Cum $\begin{cases} \sin x & \neq & 0 \\ \cos x & \neq & 0 \end{cases} \Longrightarrow E_{max} = R - \{k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$.

Pentru $x \in E_{max} \bigcap (0, 2\pi)$ avem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ 2\sqrt{2}\cos 4x & \text{pentru} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ -2\sqrt{2}\cos 4x & \text{pentru} \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \end{cases}$$

iar graficul arată astfel:

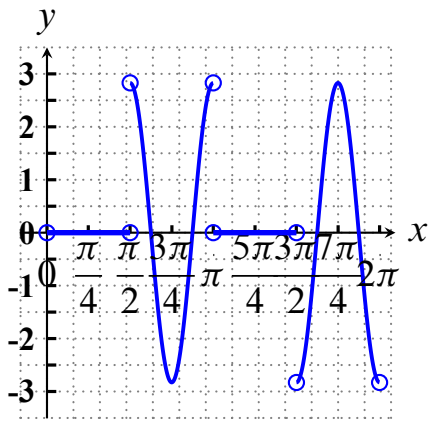


Fig. 218: *Graficul funcției F(x)*

161. a) Fie suma $S(x) = \sum_{p=1}^{n} 2^n \cos(p\alpha + x)$. știind că $S(k\pi) = 0$ și $S(k\frac{\pi}{2}) = 0$ să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care $S(x) = 0$.

b) Să se arate că $\cos^2(x - y) \leq 4(1 - \sin x \cos y)(1 - \cos x \sin y)$.

162. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(x) + 3f(-x) = 4(\cos 2x - \sin x), \forall x \in \mathbb{R}$

a) Să se determine f.

b) Să se determine mulțimea valorilor funcției .

163. Să se verifice identitatea $\dfrac{\sin\alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos\alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \dfrac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$.

164. Să se arate că dacă $A + B + C = 180^0$ și $\frac{1}{2}(\sin A + \sin C) = \sin B$ atunci $\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

165. Se dă $\cos(x + y) = \dfrac{21}{221}$ și $\cos(x - y) = \dfrac{171}{221}$ și $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se cere $\cos x$ și $\cos y$.

166. Se consideră funcția $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2} + \sqrt{-\sin^2 \pi x}$. Se cere:

a) Domeniul maxim de definiție E.

b) Mulțimea valorilor funcției.

c) Să se arate că funcția f este impară.

167. Se dă expresia: $E = \cos 1 + \cos 2 + \cos 3 + \cdots + \cos 100$.

a) Să se arate că: $E = \dfrac{\sin 50 \cos \dfrac{101}{2}}{\sin \dfrac{1}{2}}$.

b) Să se determine semnul lui E.

168. Să se arate că dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi atunci:

$$\sin B \sin C \cos A \geq -\frac{1}{8}.$$

169. Să se arate că dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi ce satisfac relația: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ triunghiul este dreptunghic.

170. Să se arate că oricare ar fi α și β avem:

$$\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta \leq \frac{3}{2}.$$

171. Să se arate că oricare ar fi α și x două numere reale oarecare este satisfăcută inegalitatea:

$(3 + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha)x^2 - 2x(\cos\alpha + \sin\alpha) + 1 \geq 0$.

172. Se dă $\sin x + m \cos x = n$ unde $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze în funcție de m și n valoarea expresiei E^2 unde $E = m \sin x - \cos x$.

b) Să se arate că $\sin x + m \cos x = n$ devine: $(1 + m^2)t^2 - 2nt + n^2 - m^2 = 0$ dacă $\sin x = t$.

173. Să se arate că $\sin y = \lambda \sin(2x + y) \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \operatorname{tg} x$.

174. Se notează: $\sin a + \cos a = x$, $a \in R$.

a) Să se arate că $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

b) Să se exprime în funcție de „x” expresia $E = 1 + \sin 2a - 2\sin a - 2\cos a$ și apoi să se afle între ce limite ia valori expresia .

175. Demonstrați că, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{2}$.

176. Să se demonstreze că: $(1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{13})\cos\dfrac{3\pi}{13} = \dfrac{1}{4}\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{26}$.

177. Fie o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \sin^2 x + \sin x \sin 3x$. Să se arate că: $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

12.5 Test de autoevaluare

1. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ are valoarea:

A $2-\sqrt{3}$; B $\sqrt{3}-2$; C $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; D $\frac{\sqrt{3}}{6}$; E $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Perioada principală a funcției $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos 2x$ este:

A $T=2\pi$ B $T=3\pi$; C $T=4\pi$; D $T=\frac{\pi}{2}$; E $T=\sqrt{2}\pi$.

3. Fie $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ cu proprietatea $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. Atunci perechea $(\sin x,\cos x)$ este:

A $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; B $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; C $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$; D $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ E $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

4. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ $E=\cos^2(a+b)+\cos^2(a-b)-\cos 2a\cdot\cos 2b$ atunci, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ are loc egalitatea:

A $2E=1$; B $E=1$; C $E=0$; D $2E=-1$; E $E=1$.

5. Dacă se notează $t=\sin 2x$, exprimată în funcție de t expresia $E=\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x$ este:

A t^2+1; B $\frac{1}{t^2}$; C $2t^2$; D $\frac{1}{1+t^2}$; E $\frac{4}{t^2}-2$.

6. Valoarea expresiei $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ este:

A 0; B $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; C $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; D $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; E -1.

7. Fie a și b numere reale astfel încât $\sin a+\sin b=1$ și $\cos a+\cos b=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

A $\frac{3}{8}$; B $\frac{1}{2}$; C $\frac{1}{8}$; D $-\frac{3}{8}$; E $-\frac{1}{8}$.

8. Să se determine valoarea maximă a funcției $f(x)=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$ A 2;

B $\sqrt{3}$; C $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$; D 1; E $\frac{3}{2}$.

9. Să se calculeze $\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{16}\right)$.

12.5.1 Test de evaluare

Numărul 1.

1. Se dă funcția: $f(x)=\frac{\sin x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-1}$.

a) Aflați domeniul maxim de definiție;

b) Cercetați dacă funcția este pară sau impară;

c) Calculați: $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ și $f(420^0)$.

2. Ce semn are expresia: $E = \sin 4,1 - \sin 4,2$?

3. Se dă $F(x) = \frac{\cos x(1+\cos(2\pi+x))}{\sec x + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)} - \frac{(1+\cos(\pi+x))\cos x}{\sec x + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă;

b) Aflați valoarea lui F știind că $\sin 2x = \frac{1}{4}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Să se reducă la primul cadran
$E(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Se dă expresia $E(x) = \frac{\sin 3x + 2\sin 4x + \sin 5x}{\cos 3x + 2\cos 4x + \cos 5x}$.

a) Să se afle domeniul maxim de definiție al expresiei;

b) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă;

c) Să se afle $E\left(\frac{\pi}{48}\right)$.

Numărul 2

1. Se dă funcția: $f(x) = \frac{\operatorname{cosec} x + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{ctg} x}$.

a) Aflați domeniul maxim de definiție;

b) Cercetați dacă funcția este pară sau impară;

c) Calculați $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ și $f(510^0)$.

2. Ce semn are $E = \cos 4,1 - \cos 4,2$?

3. Se dă:

$$F(x) = \frac{\sin^2(\pi - x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} - \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}^2(2\pi - x) - 1}.$$

a) Să aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Aflați valoarea lui F știind că $\sin 2x = \frac{3}{5}$ știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Să reducă la primul cadran $E(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Se dă expresia $E(x) = \frac{\cos 6x + 2\cos 8x + \cos 10x}{\sin 6x + 2\sin 8x + \sin 10x}$

a) Să se afle domeniul maxim de definiție al expresiei;

b) Să aducă expresia la forma cea mai simplă;

c) Să se calculeze $E\left(\frac{\pi}{48}\right)$.

12.5.2 Test de evaluare

Numărul 1

1. Fiind date $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\sin\beta = -\frac{3}{5}$, $\alpha, \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ să se calculeze: $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin 2\beta$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$

2. Să se simplifice fracția: $F(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\cos 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)}{\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin 5x}$

3. Se dau $E(x) = 2\cos 5x\cos x + 1$ și $f(x) = \dfrac{E(x)-\cos 4x+(3+2m)\cos 2x-1}{E(x)-\cos 6x+m}$.

Să se arate că $f(x)$ nu depinde de m.

4. Să se arate că: $E = \sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

5. Să se arate că dacă $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ atunci $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}+\dfrac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}+\dfrac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha} = 1$

6. Se dă: $f(x) = \dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}-\dfrac{\cos 3x+\cos x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$

a) Să se afle domeniul maxim de definiție E.

b) Pentru $x \in [0,2\pi]\bigcap E$ aduceți expresia la forma cea mai simplă și apoi reprezentați grafic funcția f.

Numărul 2

1. Fiind date $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ și $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze: $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ și să se arate că $\alpha+2\beta = \frac{\pi}{4}$.

2. Să se simplifice fracția: $F(x) = \dfrac{\sin 5x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)+\sin x}{\sin\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)+\cos 5x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)}$

3. Se dau: $E(x) = \cos 2x$ și $f(x) = \dfrac{E(x)-(m-1)E(2x)+m}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+m\sin^2 x}$. Să se arate că $f(x)$ nu depinde de m.

4. Să se arate că: $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

5. Să se arate că dacă $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ atunci $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin\beta}{\sin^2\frac{\beta}{2}}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} = 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

6. Se dă: $f(x)=\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}}+\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

a) Să se afle domeniul maxim de definiție E.

b) Pentru $x\in[0,2\pi]\bigcap E$ aduceți expresia la forma cea mai simplă și apoi reprezentați grafic funcția f.

13 Aplicaţii ale trigonometriei și ale produsului scalar

13.1 Produsul scalar a doi vectori cu aplicații în geometrie

- dacă $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ și $pr_dAB=A'B'$, atunci $pr_d\vec{v}=\overrightarrow{v'}$, $\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{A'B'}$
- Proiecția sumei mai multor vectori, pe o dreaptă este egală cu suma proiecțiilor vectorilor termeni pe aceeași dreaptă.
- Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cos\alpha$, unde $a=|\vec{a}|$, $b=|\vec{b}|$, $\alpha=\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$; $\cos\alpha=\dfrac{1}{ab}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$; $a=|\vec{a}|$; $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$;
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ sau $\vec{a}=0$ sau $\vec{b}=0$ (condiție de perpendicularitate)
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (comutativitate)
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (distributivitate fată de adunare)
- $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$
- Dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt vectori raportați la un sistem cartezian ortogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ în care $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ și $\vec{b}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ atunci $\vec{a}\cdot\vec{b}=xx'+yy'$.

1. Demonstrați formulele:

a) $(\vec{a}+\vec{b})^2=a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$;

b) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=a^2+b^2+c^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}\vec{a}$;

c) $\vec{a}\cdot(m\vec{b}+n\vec{c})=m\vec{a}\vec{b}+n\vec{a}\vec{c}$, $m,n\in\mathbb{R}$;

d) $pr_d(m\vec{b}+n\vec{c})=m\cdot pr_d\vec{a}+n\cdot pr_d\vec{b}=m\overrightarrow{a'}+n\overrightarrow{b'}$, unde $\overrightarrow{a'}=pr_d\vec{a}$, $\overrightarrow{b'}=pr_d\vec{b}$.

Exemplu rezolvat: d) Fie $A'B'=pr_dAB$. Atunci $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$, dacă cu notatia $\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{A'B'}$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, avem :$m\overrightarrow{a'}=m\cdot pr_d\vec{a}=pr_dm\vec{a}$ etc.

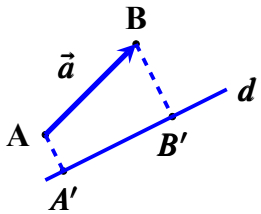


Fig. 222: *E. 1*

2. Să se afle produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ știind că $a=3$ și $b=4$, iar unghiul α dintre ei este:

(a) 45^0; (b) 60^0; (c) $\dfrac{\pi}{6}$; (d) $\dfrac{\pi}{2}$; (e) 120^0; (f) $\dfrac{5\pi}{6}$; (g) 0^0; (h) 180^0.

3. Se dă hexagonul regulat $OABCDE$, cu $OA = 2$. Să se calculeze următoarele produse scalare:
(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; (2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$; (3) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$
(4) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE}$; (5) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$; (6) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DC}$;
(7) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DE}$; (8) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$.
Exemple rezolvate: (1) $OB = 2\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cos 30^0 = 6$.
(2): $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 = 4$
(7): $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE'} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^0 = -2$.

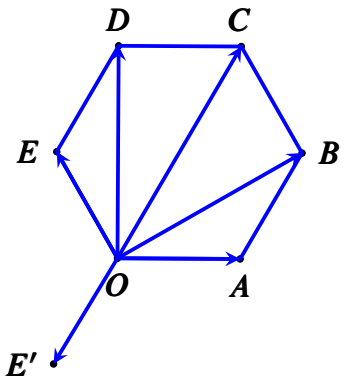


Fig. 223: *Problema 3*

4. Se dă pătratul MNPQ și octogonul OABCDEFG. Să se calculeze produsele scalare:
$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{RP}$; $\overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{QM}$; $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{QR}$; $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QC}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FO})$; $\overrightarrow{FC} \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE})$.
Indicaţie: $m(\widehat{OAB}) = 135^0$; $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COE}) = m(\widehat{EOG}) = 45^0$.

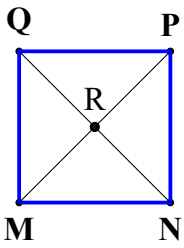


Fig. 224: *Exerciţiul 4*

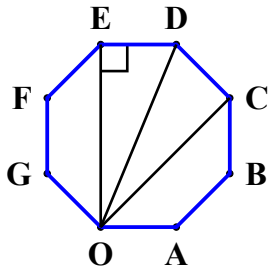


Fig. 225: *Exerciţiul 4*

5. Fiind dat cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a să se calculeze următoare-le produse scalare:
(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; (2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; (3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$; (4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'}$; (5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$; (6) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C'}$; (7) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'}$; (8) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'D}$.
Indicaţie: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC'} = a^2$.

6. Se consideră vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ care au proprietăţile: $a = 2$, $b = c = 1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$ şi $m(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \alpha$ unde $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$. Aflaţi produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, unde $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ şi $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

7. a) Să se determine unghiul α al vectorilor $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ şi $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, unde $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$; $|\vec{b}| = 1$.
b) Să se calculeze: $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v})$; $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u} + \vec{v})$; $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$.

8. a) Să se arate că vectorul $\vec{u} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{c}$.
b) Dacă $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0, \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^0$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = 120^0$ să se calculeze: $\left(\sum \vec{a}\vec{b}\right)$; $\sum \vec{a}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$;, $\left(\sum \vec{a}\right)^2$, unde $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

9. Să se arate că dacă $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, atunci $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|=|\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}|\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

10. Care este unghiul α al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ dacă:

a) $(\vec{a}+2\vec{b})^2+(2\vec{a}+\vec{b})^2=79$, iar $|\vec{a}|=\sqrt{2},\ |\vec{b}|=3$.

b) $(\vec{a}+2\vec{b})^2+(2\vec{a}+\vec{b})^2=11$, dacă $|\vec{a}|=\sqrt{3},\ |\vec{b}|=2$.

11. Având patru puncte O, M, N, P în spațiu avem relația: $\overrightarrow{0M}\cdot\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{0N}\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{0P}\cdot\overrightarrow{MN}=0$, cunoscută și sub numele de relația lui Euler.

Soluție: $\overrightarrow{0M}\cdot\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{0N}\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{0P}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{0M}\cdot(\overrightarrow{0P}-\overrightarrow{0N})+\overrightarrow{0N}\cdot(\overrightarrow{0M}-\overrightarrow{0P})+\overrightarrow{0P}\cdot(\overrightarrow{0N}-\overrightarrow{0M})=\overrightarrow{0M}\cdot\overrightarrow{0P}-\overrightarrow{0P}\cdot\overrightarrow{0N}+\overrightarrow{0N}\cdot\overrightarrow{0M}-\overrightarrow{0N}\cdot\overrightarrow{0P}+\overrightarrow{0P}\cdot\overrightarrow{0N}-\overrightarrow{0P}\cdot\overrightarrow{0M}=0$.

12. Într-un reper cartezian ortonormat $(O,\vec{i},\vec{j})$ considerăm punctele: $A(2,2)$ și $B(3,1)$. Arătați că $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$; calculați $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$; $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA})$; calculați distantele OA, AB pe baza produsului scalar a doi vectori. *Indicație*: Dacă $A(x_A,y_A)$ și $B(x_B,y_B)$ atunci $AB=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2}=\sqrt{|(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}|}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

13. a) În planul raportat la reperul ortonormat $(O,\vec{i},\vec{j})$ se dau punctele $A(2,1)$, $B(3,3)$ și $C(5,2)$. Determinați $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ și $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

b) Dacă $\overrightarrow{OM}=8\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{ON}=6\vec{i}+8\vec{j}$, calculați $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ și $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$.

c) Aceleași cerințe ca la punctul a) când $A(1,3)$, $B(-3,6)$ și $C(9,4)$.

Aplicații în triunghiul dreptunghic

14. Demonstrați vectorial

teoremele lui Pitagora, catetei și înălțimii în triunghiul dreptunghic

Exemplu rezolvat: Teorema catetei:

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=BD\cdot BC\cos 0^0=BD\cdot BC$

Dar $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=BA^2+\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}}_{=0}=BA^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=BA^2$

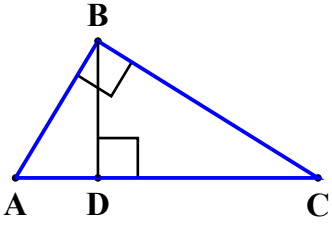


Fig. 226: *Exercițiul 14*

15. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC, $\widehat{A}=90^0$, $AB=AC=a$, se consideră medianele BB', $B'\in AC$ și CC', $C'\in AB$. Să se determine cosinusurile unghiurilor $\sphericalangle(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'})$, $\sphericalangle(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{AC})$, $\sphericalangle(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{AB})$.

16. Fie vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ care verifică relațiile:

(1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ și (2) $a=5,\ b=3,\ c=4$.

a) Calculați $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$; $(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})^2$

b) Dacă $a=\sqrt{2},\ b=1=c$ și (1) se păstrează, să se afle α astfel încât $(\alpha\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=8$

17. Demonstrați că în triunghiul ABC : $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AC^2 + AB^2 - BC^2 = b^2 + c^2 - a^2$.

18. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și D piciorul înălțimii din A pe ipotenuză. Să se exprime $\overrightarrow{AD}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

19. În triunghiul oarecare ABC, H este ortocentrul său, iar $\overrightarrow{AB} = 2\bar{a} + \bar{b}$ și $\overrightarrow{AC} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$, unde $\bar{a} \perp \bar{b}$, $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$. Să se determine expresia lui $\overrightarrow{AH}$ în funcție de $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

20. În reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ considerăm punctele A,B,C așa încât $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + \vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + x\vec{j}$. Aflați x așa încât triunghiul ABC să fie dreptunghic în $\sphericalangle B$.

Aplicații în triunghiul oarecare

• Teorema cosinusului: În triunghiul ABC, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ și analoagele.

21. Să se demonstreze vectorial:

a) teorema cosinusului

b) formula medianei $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

c) în orice triunghi ABC, dacă M este mijlocul lui BC atunci $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}^2 - \dfrac{a^2}{4}$

Soluție: a) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) Fie $\vec{m}$ vectorul mediană: $2\vec{m} = \vec{b} + \vec{c}$ iar $\vec{m}\cdot\vec{m} = \left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{b^2+c^2}{4} + \dfrac{2\vec{b}\vec{c}}{4}$ de unde folosind teorema cosinusului înlocuim $\vec{b}\cdot\vec{c}$ și obținem formula medianei

c) Cum $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}$ rezultă $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AM^2 - \dfrac{a^2}{4}$.

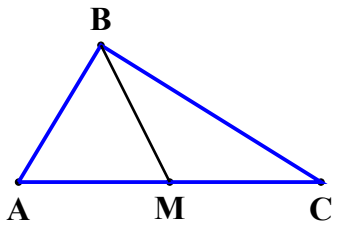


Fig. 228: *Problema 21*

22. În triunghiul oarecare ABC, cu laturile $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ are loc relația: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

23. Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului oarecare ABC. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

24. Se dă un triunghi ABC și un punct O în planul său, ale cărei proiecții pe laturile BC, CA, AB sunt respectiv A', B', C'.

a) Să se demonstreze că există relația vectorială: $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

b) Reciproc, dacă A', B', C' se află pe laturile BC, CA, AB și dacă relația precedentă există, atunci perpendicularele ridicate în A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB sunt concurente.

(Gh. D. Simionescu)

25. Fie ABC un triunghi oarecare și O' un punct în planul său.

Notăm cu A', B', C' proiecțiile lui O' pe laturile BC, CA, AB, apoi cu A'', B'', C'' simetricele lui A', B', C' față de mijloacele laturilor respective. Să se demonstreze că perpendicularele în A'', B'', C'' respectiv pe BC, CA, AB sunt concurente într-un punct O''.

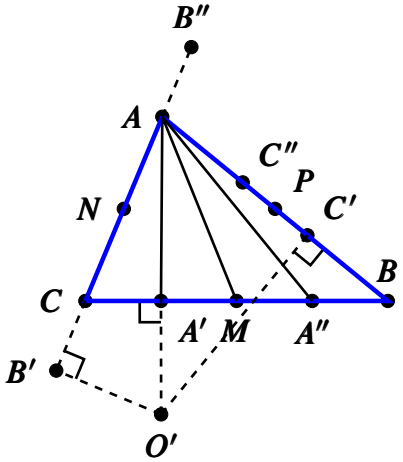


Fig. 229: *Problema 25*

26. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC medianele vârfurilor B,C sunt perpendiculare dacă și numai dacă există relația $5BC^2 = AB^2 + AC^2$.

27. Demonstrați vectorial concurenta înălțimilor unui triunghi pe baza produsului scalar a doi vectori.

28. Fie triunghiul ABC și O un punct oarecare în spațiu. Notând cu M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB, să se demonstreze că există relația: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

29. Demonstrați vectorial concurenta mediatoarelor unui triunghi pe baza produsului scalar a doi vectori.

30. Să se demonstreze folosind produsul scalar a doi vectori, relația $\sum MA^2 = 3MG^2 + \sum GA^2$, G centrul de greutate al triunghiului ABC iar M un punct arbitrar în spațiu.

31. Să se arate pe baza produsului scalar a doi vectori că în orice triunghi au loc următoarele formule de calcul a unor linii importante în triunghi:

a) $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ (lungimea bisectoarei interioare a unghiului A)

b) $AI = \sqrt{\dfrac{bc(p-a)}{p}}$ (I centrul cercului înscris)

c) $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$ (H ortocentrul, O centrul cercului circumscris)

d) $OG^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$ (G centrul de greutate).

32. Să se demonstreze vectorial folosind produsul scalar a doi vectori, teorema lui Stewart.

33. Fie în $\triangle ABC$, D mijlocul lui (BC) iar $E \in (AC)$ așa încât $AE = 2EC$. Dacă $AD \perp BE$ și $B = 60^0$, să se determine raportul $\dfrac{a}{c}$.

34. Fie A', B', C' proiecțiile vârfurilor A, B, C ale unui triunghi pe o dreaptă oarecare Δ, din planul triunghiului. Din aceste puncte se duc perpendiculare, respectiv, pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului dat. Să se arate că ele sunt concurente.

35. Să se demonstreze vectorial, că dacă perpendicularele duse din A, B, C pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ale triunghiului $A'B'C'$ sunt concurente, atunci şi perpendicularele duse din A', B', C' pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC sunt de asemenea concurente.

Exerciţii şi probleme diverse

36. În trapezul isoscel ABCD, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Să se exprime vectorul $\overrightarrow{DC}$ în funcţie de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

37. Dacă $A(-1,-1)$, $B(5,5)$, $C(5,2)$ şi $D(2,-1)$ demonstraţi că ABCD este trapez şi aflaţi unghiul ascuţit al diagonalelor.

38. Fie $\widehat{xOy}$ un unghi, cu $m(\widehat{xOy}) = 120^0$ şi Oz bisectoarea interioară a acestuia. Pe Oz, Oy şi Ox se iau punctele C, B şi respectiv A aşa încât $OA = \alpha OC$ şi $OB = \beta OC$. Exprimaţi în funcţie de α şi β $\cos(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CB}})$. Alegeţi apoi α şi β astfel încât patrulaterul OACB să fie concav sau A,C,B coliniare şi aflaţi în fiecare caz expresia $\cos(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CB}})$.

39. Fie vectorii $\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{x} + 3\vec{y}$, $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y}$, $\vec{d} = \vec{x} + \vec{y}$. Dacă $\vec{a} \perp \vec{b}$ şi $\vec{c} \perp \vec{d}$, determinaţi $\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$.

40. Fie ABCD un dreptunghi cu laturile $AB = a$ şi $BC = b$, iar M un punct în planul dreptunghiului. Să se arate că $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

41. Fie ABCD un patrulater oarecare. Să se exprime suma de produse scalara $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$ în funcţie de laturile şi diagonalele patrulaterului.

Indicaţie: Este utilă, eventual şi *relaţia lui Euler în patrulater:* $a^2+b^2+c^2+d^2 = m^2+n^2+4\alpha^2$ unde a, b, c, d sunt lungimile laturilor patrulaterului, m, n ale diagonalelor sale iar α lungimea segmentului ce uneşte mijloacele diagonalelor sale.

42. Fie ABCD un patrulater de laturi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ şi diagonalele $AC = m$, $BD = n$. Să se calculeze în funcţie de acestea sumele de produse scalare:

$S_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$

$S_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$

Indicaţie: vezi 21 a) şi relaţia lui Euler în patrulater.

43. Să se exprime distanta de la centrul O al cercului circumscris patrulaterului ABCD la anticentrul E al său, în funcţie de lungimile laturilor şi ale diagonalelor sale şi raza cercului circumscris.

Indicaţie: vezi problema 4 cap 5.5–vol.1

44. Fie ABCD un trapez dreptunghic, $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$ şi $E \in (AD)$ cu $AD = kEA$. Notăm $\{O\} = AC \cap BD$. Să se afle k pentru care următoarele afirmaţii sunt echivalente: (1) $EB \perp AC$; (2) $EO \perp BC$

(Florin Cîrjan–24626/GM 12/2002)

45. Fie în spațiu (plan) două paralelograme $ABCD$ și $A'B'C'D'$. Să se demonstreze vectorial că:

a) M,N,P,Q mijloacele segmentelor AA', BB', CC', DD' formează un paralelogram

b) Condiția MNPQ dreptunghi este ca paralelogramele construite pe perechile de vectori $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{AD}$, (cu vârful comun A) să aibă diagonalele ce pleacă din A' perpendiculare .

(Gh. D. Simionescu)

46. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ notăm $\{E\} = AD \cap BC$. Perpendicularele în C și D respectiv pe CB și AD se taie în I. Să se arate că vectorial că $EI \perp AB$.

(Gh. D. Simionescu)

Indicație: Este utilă proprietatea: $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overrightarrow{u} \cdot pr_{\overrightarrow{u}}\overline{v} = \overrightarrow{v} \cdot pr_{\overrightarrow{u}}\overline{u}$

47. Pe un cerc se consideră punctele A și B oarecare. Perpendiculara din A pe tangenta în B la cerc o taie pe aceasta în punctul C. Să se arate că că $AB^2 = 2R \cdot AC$, R fiind raza cercului.

13.2 Aplicaţii ale vectorilor și trigonometriei în geometrie

48. Să se demonstreze vectorial formulele pentru $\cos(\alpha + \beta)$ și $\cos(\alpha - \beta)$.

Exemplu rezolvat: În planul xOy considerăm vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ astfel încât $m(\widehat{Ox, \vec{a}}) = \alpha$, $m(\widehat{Ox, \vec{b}}) = 2\pi - \beta$ și atunci $\vec{a} = a(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha)$ iar $\vec{b} = b(\vec{i}\cos\beta - \vec{j}\sin\beta)$ și $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

49. Să se demonstreze vectorial, că pentru orice α și orice $n > 2, n \in \mathbb{N}$, avem:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{n}) + \cos(\alpha + \frac{4\pi}{n}) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

50. Să se arate că $1 + \cos\dfrac{2\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\dfrac{4n\pi}{2n+1} = 0$

(C.Ionescu-țiu)

51. Arătați că oricare ar fi patru puncte A, B, C, D, are loc egalitatea $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

52. Demonstrați vectorial că în orice triunghi au loc inegalitățile:

a) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$;

b) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$.

53. Fie un triunghi ABC $(AB = BC)$, D mijlocul lui (AC), $DE \perp BC$, $E \in (BC)$ și M mijlocul lui (DE). Arătați că $AE \perp BM$. (Soluție vectorială)

54. Fiind dat triunghiul ABC și un punct oarecare M în planul (spațiu) să se determine suma S=$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ în funcție de $MA=\alpha,\ MB=\beta,\ MC=\gamma$ și lungimile a,b,c ale laturilor triunghiului. ***Aplicații la teorema sinusurilor și cosinusului***

• ***Teorema sinusurilor:*** în orice triunghi ABC,au loc relațiile $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, unde a,b,c lungimile laturilor BC, CA, AB iar R raza cercului circumscris $\triangle ABC$

55. În orice triunghi au loc egalitățile:

a) $b\cos C+c\cos B=a$;

b) $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$;

c) $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$;

d) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$;

e) $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}$ (teorema tangentelor)

f) $\frac{a\cos A-b\cos B}{a\cos B-b\cos A}+\cos C=0,\ a\neq b$;

g) $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ (lungimea bisectoarei interioare a unghiului A)

h) $\frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

i) $2Ra\sin(B-C)=b^2-c^2$.

56. Să se arate că triunghiul în care există una din relațiile de mai jos, este isoscel:

a) $a=2b\sin\frac{A}{2},\ A\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$;

b) $b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$;

c) $c+a=4R\cos\frac{B}{2}$;

d) $a-b=a\sin^2\frac{B}{2}-b\sin^2\frac{A}{2}$

57. Să se arate că triunghiul în care există una din relațiile următoare este dreptunghic:

a) $\frac{\sin^2 B}{\cos B}=\frac{b^2}{ac}$;

b) $\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\sin A$;

c) $\frac{b+c}{a}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$;

d) $a^2\sin 2B=4S$;

e) $\sin^2 B+\sin^2 A=\sin^2 C$

• ***Teorema cosinusului***: În orice triunghi ABC, $a^2=b^2+c^2-2ab\cos C$ și analoagele.

Cu ajutorul teoremei cosinusului se demonstrează că în orice triunghi ABC,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Aceste formule sunt utile în rezolvarea triunghiului oarecare în cazul LLL.

• În cazurile LUL și ULU de rezolvare a triunghiului oarecare se pot aplica direct teorema cosinusului sau teorema sinusurilor

58. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC au loc relațiile:

a) $a\cos C-c\cos A=\frac{a^2-c^2}{b^2}$;

b) $\frac{a\cos A-b\cos B}{a\cos B-b\cos A}+\cos C=0,\ a\neq b$;

c) $\sum bc\cos A=\sum a^2$;

d) $\sum\frac{\cos A\cdot\cos B}{ab}=\sum\frac{\sin^2 A}{3a^2}$.

59. Să se determine toate elementele triunghiului ABC, știind că:

a) $a=12,\ b=8,\ c=6$;

b) $a=\sqrt{3},\ b=3,\ A=\frac{\pi}{6}$;

c) $a=1,\ c=\sqrt{2},\ A=\frac{\pi}{4}$;

d) $a=5,\ b=6,\ C=\frac{2\pi}{3}$;

e) $A=75^0,\ B=45^0,\ c=3$;

f) $A=B=75^0,\ a=4$.

60. Să se determine elementele necunoscute ale triunghiului ABC dacă sunt date;

a) $A,\ C,\ p\ \left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$; b) $b+c=m,\ B,C$; c) $a-c=d,\ b$ și B;

d) $m_a,\ a,\ A; A\neq 90°$ e) $h_a, B,\ C$.

61. Fie vectorii $\vec{u}=a(\vec{b}\cdot\vec{c})-b(\vec{c}\cdot\vec{a}),\ \vec{v}=b(\vec{a}\cdot\vec{c})-c(\vec{a}\cdot\vec{b}), \vec{w}=c(\vec{b}\cdot\vec{a})-a(\vec{b}\cdot\vec{c})$. Să se arate că dacă $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ formează un triunghi, atunci și vectorii $\vec{u},\vec{w},\vec{v}$ formează un triunghi, asemenea cu primul.

(M. Chiriță)

Formule pentru aria triunghiului și aplicații

- $2S=ah_a$ și analoagele; • $S=\frac{ab\sin C}{2}$ și analoagele
- $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formula lui Heron)
- $S=r\cdot p$ $-r$ raza cercului înscris în triunghi, $p-$ semiperimetrul triunghiului
- $4RS=abc$, $R-$ raza cercului circumscris triunghiului ABC.

62. Să se arate că că în orice triunghi ABC au loc relațiile:

a) $S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$;

b) $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$;

c) $S=p(p-a)\mathrm{tg}\frac{A}{2}$;

d) $p-a=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

e) $h_b=2R\sin C\sin A$; f) $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{r}{2R}$; D,E,F punctele de tangentă ale cercului înscris în triunghiul ABC.

63. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscând două din unghiurile sale și aria sa.

64. Se dă un triunghi isoscel ABC în care se cunoaște unghiul 2α de la vârful A și înălțimea $AD=h\ (AB=AC)$. Să se exprime aria triunghiului, perimetrul și raza cercului înscris în funcție de α și h.

65. a) Să se arate că aria suprafeței unui patrulater ABCD convex sau concav este $\frac{1}{2}e\cdot f\sin\alpha$, unde $e,\ f-$ lungimile diagonalelor iar α unghiul cuprins între ele.

b) Aria suprafeței unui patrulater convex este dată și de formulele: $2S=ab\sin B+cd\sin D=ad\sin A+ab\sin C$, unde $a=AB,\ b=BC,\ c=CD$ și $d=DA$.

66. Să se arate că aria suprafeței unui patrulater ABCD convex este dată de formula:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\dfrac{B+D}{2}}$, unde $2p = a+b+c+d$.

67. Să se arate că aria suprafeței poligonale determinată de un poligon regulat cu n laturi este dată de $S_n = \dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Exerciții și probleme diverse

68. Să se arate că în orice triunghi ABC

a) $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C)$;

b) $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (relația lui Euler) O, H, I puncte remarcabile în triunghi.

69. În triunghiul ABC, $m(B) = 45^0$, $AB = a$ și $BC = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}a$. Să se arate că $\operatorname{tg} A = \dfrac{2}{3}$.

70. Să se demonstreze, folosind teorema sinusurilor, că într-un triunghi unei laturi mai mari i se opune un unghi mai mare.

71. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil ABCD au loc relațiile: (notațiile fiind $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $e = DB$, $f = AC$)

a) $ef = ac + bd$ (teorema I a lui Ptolomeu)

b) $\dfrac{e}{f} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$ (teorema a II-a a lui Ptolomeu)

c) $\cos B = \dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$;

d) $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$.

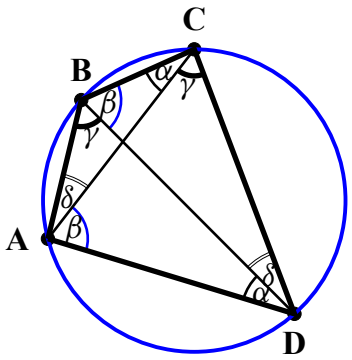


Fig. 230: *Problema 71*

72. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscând:

a) înălțimea și mediana corespunzătoare ipotenuzei;

b) ipotenuza a și suma catetelor, $s = b + c$. Discuție.

73. Să se rezolve un triunghi oarecare ABC cunoscând:

a) unghiul A și lungimile bisectoarei și înălțimii ce pleacă din A; caz particular triunghiul dreptunghic;

b) unghiul A și lungimile bisectoarei și medianei ce pleacă din A; caz particular triunghiul dreptunghic cu $A = 90^0$.

74. Să se rezolve triunghiul oarecare ABC cunoscând:

a) $\hat{A}, a, b+c$; b) $\hat{A}, a, \dfrac{b}{c}$; c) h_a, h_b, h_c; d) m_a, m_b, m_c

e) a, r, R notațiile fiind cele cunoscute.

75. Să se rezolve un patrulater cunoscând:

a) cele patru laturi și un unghi;

b) trei laturi și două unghiuri cuprinse între laturile date;

c) două laturi și trei unghiuri.

- În exercițiul următor ne sunt utile inegalitățile între medii: $\forall x, y, z > 0$, $\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \dfrac{x+y+z}{3}$.

76. Să se arate că într-un triunghi oarecare au loc relațiile următoare:

(1) $\sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{a}{b+c}$;

(2) $\sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$;

(3) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$;

(4) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{4R}$;

(5) $\sin A \sin B \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

(6) $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{p}{4R}$;

(7) $\cos A \cos B \cos C \leq \dfrac{1}{8}$;

(8) $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{p}{R}$;

(9) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

(10) $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$;

(11) $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{r+R}{R}$;

(12) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$;

(13) $R \geq 2r$;

(14) $ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{3}$;

(15) $p \geq 3r\sqrt{3}$ (Mitrinovic);

(16) $p \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$ (Mitrinovic);

(17) $27Rr \leq 2p^2$.

13.2.1 Test de evaluare

1. Să se afle produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ știind că $a+b=5$ și $a\cdot b=6$ iar unghiul α dintre ei este:

(1) 120^0; (2) 150^0; (3) 135^0; (4) 75^0.

2. În triunghiul echilateral ABC de latură a notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor AB, BC, CA. Să se calculeze în funcție de a produsele scalare:

(1) $\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{B'A}$; (2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC'}$; (3) $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{BC}$; (4) $\overrightarrow{C'B'}\cdot\overrightarrow{CA}$.

3. Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ au proprietățile $a=2, b=1, c=3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$ și $m(\widehat{\vec{a},\vec{c}}) = 120^0$ să se afle produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ unde $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ și $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

4. Aflați $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ știind că $(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=4$ și $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ iar $|\vec{b}|=1$.

5. În planul raportat la reperul ortonormat $(O,\vec{i},\vec{j})$ se dau punctele $A(0,-1)$, $B(1,1)$ și $C(3,0)$. Determinați $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

6. În reperul ortonormat $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră punctele A,B,C așa încât $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}-4\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=(x+1)\vec{i}+(y-3)\vec{j}$. Să se determine x și y știind că triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\left|\overrightarrow{BC}\right|=5\sqrt{5}$.

13.2.2 Test de evaluare

1. Fie $ABCD$ un pătrat și M un punct în plan. Să se arate că $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

2. Să se arate că patrulaterul convex $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2$.

3. Să se arate că $ABCD$ convex este ortodiagonal dacă și numai dacă $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

4. Fie în plan punctele $A(0,-3)$, $B(1,2)$; $C(2,-1)$ și $M(x,y)$. Să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}$. Determinați x și y astfel încât M să fie ortocentrul triunghiului ABC.

5. Proiecția punctului $A(1,2)$ pe dreapta BC, unde $B(-1,-3)$ și $C(-3,-2)$ este:

a) $\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$; b) $\left(-\frac{7}{5},-\frac{14}{5}\right)$; c) $\left(-\frac{5}{4},-\frac{11}{4}\right)$; d) $\left(-\frac{4}{3},-\frac{17}{6}\right)$.

13.2.3 Test de evaluare

1. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că au loc relațiile:

a) $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=\frac{abc}{R}$.

b) $\frac{\sin(B-C)}{\sin A}=\frac{b^2-c^2}{a^2}$.

2. a) Să se arate că dacă în triunghiul ABC are loc relația $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)=0$ este isoscel.

b) Să se arate că dacă în triunghiul ABC are loc relația $c^2\sin 2B=4S$ este dreptunghic

3. a) Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC în care se cunoaște $\frac{b}{c}$ și m_a, notațiile fiind cele cunoscute.

b) Să se rezolve triunghiul oarecare ABC în care se cunoaște $a=2$, $b=1$ și $C=\frac{\pi}{3}$.

4. Arătați că în orice triunghi ABC există relația:
$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+\frac{r}{2R}$.

5. Să se arate că unghiul A al unui triunghi ABC este ascuțit dacă și numai dacă $a^2<b^2+c^2$.

14 Îndrumări, indicaţii, răspunsuri, soluţii.

Mulțimea numerelor reale

1. Din enunț rezultă că a^a este un număr de două cifre ($a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$).

Pentru $a \in \{1, 2\}$ obținem a^a un număr de o singură cifră deci nu convine problemei. Pentru $a = 3$ avem $3^3 = 27$, deci $b = 2$ și $c = 7$, deci numărul $\overline{abc} = 327$. Pentru $a \geq 4$ obținem a^a un număr de mai mult de două cifre. Deci singura soluție a problemei este $\overline{abc} = 327$.

2. $A = (1977 - 1877)(1977 + 1877) = 100 \cdot (3854)$; $B = 2 \cdot \dfrac{(1877 + 1977) \cdot 100}{2} - 100 = 100 \cdot (3854) - 100 < A$.

3. Orice număr natural nenul este de forma $3k, 3k + 1, 3k + 2, k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $m = 3k \Rightarrow E = 3(k + 3^{3k-1})(3k + 1)(3k + 2) \vdots 3$.

Dacă $m = 3k + 1 \Rightarrow E = (3k + 1 + 3^{3k+1})(3k + 2) \cdot 3k \vdots 3$.

Dacă $m = 3k + 2 \Rightarrow E = (3k + 2 + 3^{3k+2}) \cdot 3(k + 1)(3k + 1) \vdots 3$.

4. $n = 48k + 36 = 16 \cdot 3 \cdot k + 32 + 4 = 16(3k + 2) + 4 \Rightarrow r = 4$.

5. Din teorema împărțirii cu rest $D = C \cdot I + R$, (1). Deci $D + I = 2289$ (2). Din (2) rezultă: $D = 2289 - I$. Deoarece $C = 17$ și $R = 111$ rezultă din (1) $2289 - I = 17 \cdot I + 111$ de unde $I = 121$ și $D = 2168$.

6. Cum $273437 - 17 = 274420 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31$ și $272758 - 13 = 272745 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29$ rezultă că divizori comuni ai celor două numere sunt $1, 3, 5, 9, 45$. Deoarece resturile împărțirii la N a celor două numere sunt 17, respectiv 13, rezultă că doar 45 are șanse să satisfacă condițiile impuse. Se verifică că $\overline{ab} = 45$.

7. Îl putem scrie pe 30 ca produs de trei cifre astfel: $30 = 1 \cdot 5 \cdot 6$ sau $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Prima scriere generează șase numere: 156, 165, 516, 561, 615, 651. A doua scriere generează tot șase numere: 235, 253, 325, 352, 523, 532 deci sunt 12 numere.

8. $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111(a + b + c)$.

11. Fie $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, $\begin{cases} d \mid (3n + 2) \\ d \mid (4n + 3) \end{cases} \Rightarrow d \mid (4(3n + 2) - 3(4n + 3)) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow$ fracția este ireductibilă.

13. Prin împărțirea lui $2^{3k} = 8^k$ la 7 se obține restul 1; restul împărțirii lui $2^{3k+1} = 2 \cdot 8^k$ este 2, iar restul împărțirii lui $2^{3k+2} = 4 \cdot 8^k$ este 4, $\forall k \in \mathbb{N}$. Cum resturile împărțirii prin 7 a numerelor $2^x, 2^y, 2^z$ sunt distincte, ele nu pot fi decât 1,2 și 4 într-o anumită ordine. Rezultă că numărul $2^x + 2^y + 2^z$ prin împărțirea la 7 dă restul 0, adică $2^x + 2^y + 2^z$ este divizibil cu 7.

14. $(x, y) \in \{(0, 0), (8, 40), (42, 6), (12, 12), (14, 10)\}$.

15. $n \in \{1, 4, 9\}$.

17. a) $n_k = 8! + k,\ k = \overline{2,8}$; b) $n_k = (n+1)! + k,\ k = \overline{2,n+1}$.

18. $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$.

19. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a+b) \Rightarrow a + b = 11 \Rightarrow \overline{ab} \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92\}$.

20. Ultima cifră a lui $5n$ este 0 sau 5, deci ultima cifră a numerelor date este $2, 3, 7$ sau 8 și nici un pătrat perfect nu se termină cu o asemenea cifră.

23. Avem succesiv $x^2 + 6x - y^2 = 2 \Leftrightarrow (x+3)^2 - y^2 = 11 \Leftrightarrow (x - y + 3)(x + y + 3) = 11$, egalitate în numere întregi care conduce la următoarele cazuri:

$\begin{cases} x - y + 3 = 1 \\ x + y + 3 = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 3 = 11 \\ x + y + 3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 3 = -1 \\ x + y + 3 = -11 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + 3 = -11 \\ x + y + 3 = -1 \end{cases}$ Soluțiile obținute după rezolvarea acestor sisteme sunt: $(x, y) \in \{(3,5); (3,-5); (-9,-5); (-9,5)\}$.

24. Din relația $6x - 21y + 29z = 0$ deducem $3(2x + 5z) = 7(3y - 2z)$ (1) și $(3y - 14z) = 3(2x + 5z - 6y)$ (2)

Deoarece (3;7)=1, din (1) rezultă $7 \mid (2x + 5z)$ iar din (2) rezultă că $3 \mid (3y + 14z)$, deci produsul $(2x + 5z)(3y + 14z)$ se divide cu 21.

25. a) Avem $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x(x+3))\,((x+1)(x+2)) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 = (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

b) Adunând 1 în ambii membrii și ținând seama de a) obținem $(x^2+3x+1)^2 = y^2+1 \Leftrightarrow (x^2+3x+1)^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2+3x+1-y)(x^2+3x+1+y) = 1$. Cum numerele din paranteze sunt întregi, avem doar posibilitățile $x^2+3x+1-y = x^2+3x+1+y = 1$ sau $x^2+3x+1-y = x^2+3x+1+y = -1$. Rezolvând cele două sisteme se obțin soluțiile: $(-3,0), (-2,0), (-1,0)$ și (0,0).

27. Fie $\frac{a+2c}{2b+c} = x \in \mathbb{Z}, \frac{b+2c}{2c+a} = y \in \mathbb{Z}, \frac{c+2b}{2c+b} = z \in \mathbb{Z}$. Deoarece $xyz = 1$ și $x, y, z \in \mathbb{Z}$ rezultă că sau toate cele trei rapoarte sunt egale cu 1, sau două rapoarte sunt egale cu -1 iar al treilea este 1.

Dacă toate rapoartele sunt 1, atunci $a + 2c = 2b + c,\ 2c + b = 2c + a$ și $c + 2b = b + 2c$ de unde $a = b = c \in \mathbb{Z}^*$ (pentru ca numitorii rapoartelor să nu fie nuli).

Dacă $x = 1$ și $y = -1, z = -1$ obținem $a + c = 2b, a + 4c + b = 0, 3c + 3b = 0$, de unde $c = -b, a = 3b$, deci $a = 3k, b = k, c = -k$ cu $k \in \mathbb{Z}^*$.

Dacă $x = -1, y = 1, z = -1$ obținem $c = -b, a + 2c = -2b - c, 2c + b = 2c + a$, deci $c = -b, a = b$, de unde $a = k, b = k, c = -k$ cu $k \in \mathbb{Z}^*$.

Dacă $x = -1, y = -1, z = 1$ obținem $b = c = k$ și $a = -2c - 3b = -5k$, unde $k \in \mathbb{Z}^*$.

29. Ecuația se mai poate scrie $(x + 6)(y + 6) = 2023$. Deoarece $2023 = 17^2 \cdot 7$, sunt posibile următoarele cazuri:

$\begin{cases} x+6=1 \\ y+6=2023 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=2023 \\ y+6=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=-1 \\ y+6=-2023 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=-2023 \\ y+6=-1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+6=7 \\ y+6=289 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=17 \\ y+6=119 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=119 \\ y+6=17 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=289 \\ y+6=7 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+6=-7 \\ y+6=-289 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=-17 \\ y+6=-119 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=-119 \\ y+6=-17 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6=-289 \\ y+6=-7 \end{cases}$. și deci

$(x,y) \in \{(-5,2017),(2017,-5),(-7,-2029),(-2029,-7),(-13,-295),(-23,-125),(-125,-23),(-295,-13),(1,283),(11,113),(283,1),(113,11)\}$.

31. a) Ecuația se mai poate scrie $(x-1)(y-3)=6, x,z \in \mathbb{Z}$ etc.

b) Ecuația se mai poate scrie $(x-y)(x+y+2)=0$ etc.

c) Ecuația este echivalentă cu $(x+1)^2-y^2=3 \Leftrightarrow (x-y+1)(x+y+1=3)$ etc.

d) Avem $(x-y)^2+2y^2=8$ și deci $2y^2 \leq 8 \Rightarrow y \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Pentru $y=\pm 2 \Rightarrow x=y=\pm 2$, pentru $y=\pm 1 \Rightarrow (x-1)^2=6 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{6} \notin \mathbb{Z}$. Analog pentru $y=0, x=\pm 2\sqrt{2}$. În concluzie $(x,y) \in \{(-2,-2),(2,2)\}$.

34. Fie d divizor comun al numărătorului și numitorului. Atunci $d \mid (2n+23), d \mid (3n+5)$ deci $d \mid 3(2n+23)-2(3n+5)$, adică $d \mid 59$. Cum 59 este prim, fracția se poate simplifica numai cu 59 și cea mai mică valoare a lui n pentru care fracția se simplifică se obține pentru $2n+23=59$, deci pentru $n=18$.

35. Dacă d este divizor comun al numărătorului și numitorului, atunci $d \mid (2n^2+3)$ și $d \mid (3n^2+2) \Rightarrow d \mid 3(2n^2+3)-2(3n^2+2) \Rightarrow d \mid 5$. Pentru ca fracția să se simplifice, trebuie ca $d=5$. Vom căuta așadar numerele naturale n pentru care $2n^2+3$ și $3n^2+2$ se divid cu 5. Deoarece ultima cifră a unui pătrat perfect este 0,1,4,5,6 sau 9, $2n^2$ se termină în una din cifrele 0, 2 sau 8. Doar în cazul în care $2n^2$ se termină în 2 (adică n^2 se termină în 1 sau 6), $2n^2+3$ este multiplu de 5. În acest caz $3n^2+2$ se termină în 5, deci se divide de asemenea cu 5.

Răspuns: fracția se simplifică (cu 5) dacă n^2 se termină în 1 sau 6, deci pentru toate numerele naturale care se termină în 1,9,4 sau 6.

37. a) Deoarece $xyz=1$, $xyz \in \mathbb{N} \Rightarrow x=y=z=1 \Rightarrow b=2$ și apoi $a=3$. Reciproca este imediată.

b) Dacă $\frac{x}{4}, \frac{y}{2}$ și $4z$ ar fi numere naturale atunci și $\frac{x}{4}\cdot\frac{y}{2}\cdot 4z=\frac{xyz}{2}=\frac{1}{2}$, ar fi natural.

38. $x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2=\frac{x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4}{(x+y)^2}=\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)^2$

39. Avem $\frac{5a+7b}{a+13b}=\frac{5\cdot\frac{a}{b}+7}{\frac{a}{b}+13}=\frac{5\cdot 1,1(6)+7}{1,1(6)+13}=\frac{5\cdot\frac{7}{6}+7}{\frac{7}{6}+13}=\frac{77}{85}$.

40. $A=\sqrt{900a^2+180a+9}=3(1+10a)\in\mathbb{N}$.

41. A=$a_1+a_2+\ldots a_9+0,a_2(a_3)+0,a_3(a_4)+\ldots+0,a_9(a_1)+0,a_1(a_2)=$
$a_1+a_2+\ldots a_9+\frac{\overline{a_2a_3}-a_2}{90}+\frac{\overline{a_3a_4}-a_3}{90}+\ldots+\frac{\overline{a_9a_1}-a_9}{90}+\frac{\overline{a_1a_2}-a_1}{90}=a_1+a_2+\ldots a_9+$
$\frac{9a_2+a_3}{90}+\frac{9a_3+a_4}{90}+\ldots+\frac{9a_9+a_1}{90}+\frac{9a_1+a_2}{90}=a_1+a_2+\ldots a_9+$
$\frac{9(a_1+a_2+\ldots a_9)+a_1+a_2+\ldots a_9}{90}=\frac{10}{9}(a_1+a_2+\ldots a_9)=50$
Analog B=$a_1+a_2+\ldots a_9+0,(a_2a_3)+0,(a_3a_4)+\ldots+0,(a_9a_1)+0,(a_1a_2)=a_1+a_2+\ldots a_9+$
$\frac{\overline{a_2a_3}}{99}+\frac{\overline{a_3a_4}}{99}+\ldots+\frac{\overline{a_9a_1}}{99}+\frac{\overline{a_1a_2}}{99}=a_1+a_2+\ldots a_9+\frac{11}{99}(a_1+a_2+\ldots a_9)=a_1+a_2+\ldots a_9+$
$\frac{a_1+a_2+\ldots a_9}{9}=50.$

42. Avem $a^b=(1,1^{10})^{1,1^{11}}=1,1^{10\cdot1,1^{11}}$ și $b^a=(1,1^{11})^{1,1^{10}}=1,1^{11\cdot1,1^{10}}=1,1^{10\cdot1,1^{11}}$, deci $a^b=b^a$.

43. $a=100,\ b=4,\ P=144$.

45. $\sqrt{17\pm2\sqrt{30}}=\sqrt{(\sqrt{15}\pm\sqrt{2})^2}=\sqrt{15}\pm\sqrt{2}$ etc.

48. $\frac{1}{7}=0,(142857);\ 2004=334\cdot6\Rightarrow a_{2004}=a_6=7$.

49. a) $\frac{1}{37}=0,(027)$; b) $2001=3\cdot667\Rightarrow a_{2001}=a_3=7$; c) $S=667(0+2+7)=6003$.

50. a) $a_3=2,\ a_4=\frac{1}{4},\ a_5=\frac{1}{8},\ a_6=\frac{1}{2},\ a_7=4,\ a_8=8$; b) Se observă că $a_{n+6}=a_6\Rightarrow a_{2004}=a_6=\frac{1}{2}$ c) $S=334(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=334\cdot\frac{119}{8}=\frac{19873}{4}$; d) $P=(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_6)^{334}=1$.

63. $\frac{2}{5}$

64. Ecuația se mai poate scrie: $\frac{\frac{83-8}{900}\cdot x}{\frac{83-8}{900}\cdot x+\frac{83-8}{900}}+\frac{\frac{83-8}{900}\cdot x+\frac{1}{4}}{\frac{83-8}{900}\cdot x+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{16-1}{90}\cdot x+\frac{16-1}{90}}{\frac{83-8}{900}\cdot x+\frac{16-1}{90}}\Leftrightarrow$
$\frac{\frac{x}{12}}{\frac{x}{12}+\frac{1}{12}}+\frac{\frac{x}{12}+\frac{1}{4}}{\frac{x}{12}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{x}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{x}{12}+\frac{1}{6}}\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+4}=\frac{2x+2}{x+2}\Leftrightarrow\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{x+4-1}{x+4}=$
$\frac{2x+4-2}{x+2}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{2}{x+2}\Leftrightarrow(2x+5)(x+2)=2(x+1)(x+4)$, de unde $x=2$.

65. Conform enunțului $\frac{1}{6}<\frac{a}{112}<\frac{1}{5},a\in\mathbb{N}\Rightarrow a>\frac{112}{6}=18,6...$ și $a<\frac{112}{5}=22,4$. Cum $a\in\mathbb{N}$ rezultă $a\in\{19,20,21,22\}$ și fracțiile cerute sunt $\frac{19}{112},\frac{20}{112},\frac{21}{112},\frac{22}{112}$. Singura fracție ireductibilă este $\frac{19}{112}$.

66. $\begin{cases} d\,|\,(5n+6) \\ d\,|\,(8n+7) \end{cases} \Rightarrow d\,|\,8(5n+6)-5(8n+7)=13 \Rightarrow d=13.$

67. Reducere la absurd. Presupunem ca $\sqrt{a}=\frac{p}{q}$ unde $\frac{p}{q}$ ireductibilă. Rezultă $a=\frac{p^2}{q^2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$, fals deoarece din ipoteză $a\in\mathbb{N}$

68. a) și b) reducere la absurd.

c) Fie α rădăcina comună. Avem $\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 \\ \alpha^2+c\alpha+d=0 \end{cases}$. Scăzând membru cu membru cele două ecuații obținem $(a-c)\alpha=d-b$. Dacă $a\neq c \Rightarrow \alpha=\frac{d-b}{a-c}\in\mathbb{Q}$ fals. Deci $a=c$ și $b=d$

71. a) Fie $\sqrt{a}+\sqrt{b}=x\in\mathbb{Q}$; $\sqrt{b}+\sqrt{c}=y\in\mathbb{Q}$;
$\sqrt{c}+\sqrt{a}=z\in\mathbb{Q}$. Adunând cele trei relații și împărțind la 2 obținem $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{x+z+y}{2}$, de unde $\sqrt{a}=\frac{x-y+z}{2}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{b}=\frac{x+y-z}{2}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{c}=\frac{-x+y+z}{2}\in\mathbb{Q}$.

b) Presupunem că $\sqrt{a}+\sqrt{2b}-\sqrt{c}=u\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{u-\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}$ (deoarece conform punctului a) $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$) fals.

72. Pentru $x\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}$ avem $x^2<x^2+x+1<(x+1)^2$ și deci x^2+x+1 nu este pătrat perfect, de unde $\sqrt{x^2+x+1}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Mulțimea căutată este deci $\{-1,0\}$

73. Presupunem că $\sqrt{n^2-3n+2}+\sqrt{n^2+n+1}=x\in\mathbb{Q}^*$. Relația se mai poate scrie $\sqrt{n^2-3n+2}=x-\sqrt{n^2+n+1}$ și prin ridicare la pătrat rezultă $2x\sqrt{n^2+n+1}=x^2+4n-1$ și deci $\sqrt{n^2+n+1}=\frac{x^2+4n-1}{2x}\in\mathbb{Q}$ fals, deoarece $\sqrt{n^2+n+1}\in\mathbb{Q}$ numai pentru $n\in\{-1,0\}$. Prin verificare directă se arată că nici valorile $-1,0$ nu sunt acceptate.

74. Din $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow z=\frac{xy}{x+y}$ și $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2}=$
$\frac{\sqrt{(x^2+y^2)(x+y)^2+x^2y^2}}{x+y}=\frac{\sqrt{((x+y)^2-2xy)(x+y)^2+x^2y^2}}{x+y}=$
$\frac{\sqrt{(x+y)^4-2xy(x+y)^2+x^2y^2}}{x+y}=\frac{\sqrt{((x+y)^2-xy)^2}}{x+y}=\frac{(x+y)^2-xy}{x+y}\in\mathbb{Q}.$

78. a) $\sqrt{5}-2$, b) $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\Rightarrow x=1, y=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\Rightarrow y=-\sqrt{5}$.

79. a) 4; b) 3; c) 1, d) 4.

80. Fie $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=u\in\mathbb{Q}$. Prin ridicare la puterea a treia se obține $a+b+3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=u^3$ de unde $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\frac{u^3-a-b}{3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}\in\mathbb{Q}$. Notăm $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=v$. Avem $\begin{cases} \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=u\in\mathbb{Q}^* \\ \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=v\in\mathbb{Q} \end{cases}$

de unde $\sqrt[3]{b}=u-\sqrt[3]{a}$ și $\sqrt[3]{a}(u-\sqrt[3]{a})=v \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^2}-u\sqrt[3]{a}+v=0$. Dacă presupunem că $\sqrt[3]{a}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow \sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a^2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și folosind propoziția: $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$ atunci $\alpha+\beta\sqrt[3]{a}+\gamma\sqrt[3]{a^2}=0\Leftrightarrow$ $\alpha=\beta=\gamma=0$ va rezulta $\begin{cases}1=0\\ u=0\\ v=0\end{cases}$ fals, și deci $\sqrt[3]{a}\in\mathbb{Q}$. Din simetrie rezultă și $\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}$.

81. Vezi exercițiul 75.

83. a) $x=-2,y=-1,z=-2,u=-1$; b) $x=-3,y=-2$; c) $x=-2$; d) $x=2,5$; d) $x=-2,y=-1$.

86. a) $3^3+6^3<2^3+6^3$; b) $3\sqrt{6}>7\Rightarrow 2^{3\sqrt{6}}>2^7>5^3>5^{2\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a}{a-b}=\dfrac{-b^2}{a\,(a-b)}<0\Rightarrow\dfrac{a+b}{a}<\dfrac{a}{a-b}$.

87. a) $x<y<z$; b) $y<z<x$; c) $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(a-1)^2}{2}>0;\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{(a-1)^2}{6}\Rightarrow z<y<x$.

89. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3\,(b+c)\,(a+c)\,(a+b)$

90. a) $E(x,y)=\dfrac{(x+2y)^2-9}{(x+2y+3)^2}=\dfrac{(x+2y+3)(x+2y-3)}{(x+2y+3)^2}=\dfrac{x+2y-3}{x+2y+3}$.

b) $\dfrac{x+2y-3}{x+2y+3}\neq 1\Leftrightarrow -3\neq 3$.

91. b) $x\in\{2,3,6\}$

93. $E_1(x)=\dfrac{x-3}{(x-1)(x+3)}$, $\qquad E_2(x,y)=x+y-1$.

94. $\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=\dfrac{1}{n^2}+\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{(n-1)^2}-\dfrac{1}{(n)^2}\right)=1.$

96. a) $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow x^3+y^3\geq xy(x+y)\Leftrightarrow(x+y)(x-y)^2\geq 0$.

b) $\dfrac{a+b}{c^2}+\dfrac{b+c}{a^2}+\dfrac{c+a}{b^2}=\left(\dfrac{a}{c^2}+\dfrac{c}{a^2}\right)+\left(\dfrac{b}{c^2}+\dfrac{c}{b^2}\right)+\left(\dfrac{c}{b^2}+\dfrac{a}{c^2}\right)\geq\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}\right)+\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

97. a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 4ab\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$ cu egalitate pentru $a=b$.

b) Avem conform lui a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y},\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{4}{x+z},\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{4}{y+z}$ Prin adunare obținem $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geq 4\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq 2\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\right)$.

103. **Metoda 1**. Avem $1^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \geq a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$ de unde $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Metoda a-II-a. Notăm $a = x+\frac{1}{3}$, $b = y+\frac{1}{3}$, $c = z+\frac{1}{3}$. $a+b+c = 1 \Leftrightarrow x+y+z = 0$ și $a^2+b^2+c^2 = \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\geq 0} + \frac{2}{3}\underbrace{(x+y+z)}_{=0} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}$.

105. $a^2+p^2 \geq 2ap$, $b^2+p^2 \geq 2pb$, $c^2+p^2 \geq 2cp$ și deci $\frac{a^2+p^2}{b+c} + \frac{b^2+p^2}{c+a} + \frac{c^2+p^2}{a+b} \geq \frac{2ap}{b+c} + \frac{2bp}{a+c} + \frac{2cp}{a+b} = 2p\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 2p \cdot \frac{3}{2} = 3p$. (vezi și exercițiul 104).

106. $\frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} \geq \frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y}$, este echivalentă cu $(x+y)(x\beta^2+y\alpha^2) \geq xy(\alpha+\beta)^2$, care se poate rescrie sub forma $(x\beta - y\alpha)^2 \geq 0$, evident adevărată.

107. Aplicăm de două ori inegalitatea de la exercițiul precedent. $\frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} + \frac{\gamma^2}{z} = \left(\frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y}\right) + \frac{\gamma^2}{x} \geq \frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y} + \frac{\gamma^2}{z} \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{x+y+z}$.

108. Ținând cont de $abc = 1 \Leftrightarrow bc = \frac{1}{a}$ *etc.*, inegalitatea este echivalentă cu $\frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \geq 1$. Aplicând inegalitatea de la exercițiul 107, pag.20, avem $\frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+3}$. Mai trebuie arătat că $\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+3} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c-1)^2 \geq 4$. Cum $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ și deci $(a+b+c-1) \geq 2$, inegalitatea este evidentă.

109. Din inegalitatea mediilor avem: $x^2+yz \geq 2\sqrt{x^2yz} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$. Analog $\frac{1}{y^2+zx} \leq \frac{\sqrt{zx}}{2xyz}$, respectiv $\frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{\sqrt{xy}}{2xyz}$ și $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}{2xyz}$. Din $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ obținem $\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy} \leq x+y+z$ și $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}{2xyz} \leq \frac{x+y+z}{2xyz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$.

110. a) Caz particular a punctului b) $p = 1$.

b) **Metoda I.** Se știe că $m_a \geq m_h$ și deci $\frac{\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a}}{3} \geq \frac{3}{(1+a+b)+(1+b+c)+(1+c+a)} = \frac{3}{3+2\underbrace{(a+b+c)}_{=p}} = \frac{3}{5}$ și deci $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \geq \frac{9}{3+2p}$.

Metoda a II-a. Se aplică inegalitatea de la exercițiul 107,pag.20. $\frac{1^2}{1+a+b}+\frac{1^2}{1+b+c}+\frac{1^2}{1+c+a}\geq \frac{(1+1+1)^2}{(1+a+b)+(1+b+c)+(1+c+a)}=\frac{9}{3+2p}$.

Test de evaluare **pag.20**

1. A 2,3 ☑ 2,4(1) C 2,3(1) D 2,2(9) E 2,4.

2. A 5,20; B 5,15; ☑ 5,19; D 5,18; E 5,17.

3. A 3; B 4; C 1.25; ☑ 6; E 5.

4. A $\frac{15709}{49950}$; B $\frac{288}{925}$; C $\frac{31418}{99999}$; D $\frac{5}{13}$; ☑ $\frac{432}{1375}$.

5. ☑ 0,(49); B 0,47; C 0,(48) ; D 0,50 ; E 0,(51).

deoarece: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{97\cdot 99}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{97\cdot 99}\right)=$

$\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{99-97}{97\cdot 99}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{99}\right)=\frac{49}{99}=0,(49)$

Test de evaluare **pag.21**

1. a=3+2$\sqrt{2}$; b=a=3−2$\sqrt{2}$.

2. a=1,12012001200012000...

3. a) Vezi exercițiul 51. b) Presupunem că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=a\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\sqrt{2}+\sqrt{3}=a-\sqrt{5}$ și prin ridicare la pătrat obținem $2\sqrt{6}=a^2-2a\sqrt{5}$. Ridicăm din nou la pătrat și obținem $24=a^4-4a^3\sqrt{5}+20a^2\Rightarrow\sqrt{5}=\frac{a^4+20a^2-24}{4a^3}\in\mathbb{Q}$ cea ce este fals.

4. $a=e<c<d<b$.

5. $a=\sqrt{2}^{\sqrt{3}}a^{2\sqrt{2}}=2^{\sqrt{6}}<2^3=8$; $b=\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\Rightarrow b^{2\sqrt{2}}=3^2=9\Rightarrow a<b$.

6. $x^2-y^2+4x-4=0=(x+1)^2-y^2=3\Leftrightarrow(x-y+1)(x+y+1)=3\Rightarrow(x,y)\in\{(1,1)\}$.

7. a) $E(a)=\frac{a+4}{a-2}$ b) $E(a)=1+\frac{6}{a-2}\Rightarrow a\in\{-4,-1,0,3,4,5,8\}$ c) Ne folosim de $x^2+y^2\geq 2xy$ etc.

Modulul unui număr real **pag.22**

2. a) $|x-y|<7$; b) $|x-2|<8$; c) $|x-2|<5$; d) $|x-2|>5$.

3. $|x-2|<5\Leftrightarrow -3<x<7$ (1)

$|y-3|<7\Leftrightarrow -4<y<10$ (2) și se adună membru cu membru relațiile (1) și (2).

4. a) Avem $|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$ și deci mulțimea soluțiilor este $S = \{-4, 4\}$. b) Avem $|x-3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 5$ și mulțimea soluțiilor este $S = \{-2, 8\}$. c) $S = \{-10, 4\}$; d) $S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right\}$; e) $S = \left\{\frac{2}{3}, 6\right\}$.

5. b) $x \in \varnothing$; c) $x = 1$.

7. a) Pentru $|x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$ semnul expresiilor din module este:

x	-1		$\frac{1}{2}$			1
$1+x$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

1) Pentru $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ecuația devine: $3 + 2(1+x) = -2x + 1 \Leftrightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

2) Pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ecuația devine $3 + 2(1+x) = 2x - 1 \Leftrightarrow 5 = -1 \Rightarrow x \in \varnothing$.

Deci singura soluție a ecuației este $S = \{-1\}$.

b) Pentru $|x| > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ semnul expresiilor din module este:

x	$-\infty$		-3		3		4		$+\infty$
x	$-$	$-$			$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$-$			$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-4$	$-$	$-$			$-$	0	$+$	$+$	

1) Pentru $x \in (-\infty, -3)$ ecuația este $-3x - 2x - 2 = -x + 4 \Leftrightarrow -4x = 6 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \notin (-\infty, -3)$.

2) Pentru $x \in (3, 4]$ ecuația este $3x + 2x + 2 = -x + 4 \Leftrightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin (3, 4]$.

3) Pentru $x \in (4, \infty)$ ecuația este $3x + 2x + 2 = x - 4 \Leftrightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin (3, \infty)$.

Mulțimea soluțiilor este deci $\varnothing$.

c) Pentru $x \in [-2, 1]$ semnul expresiilor din module este:

x	-2			0			$\frac{1}{2}$			1
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

1) Pentru $x \in (-2, 0] \Rightarrow 3 + 3x + 2x - 1 = -x + 2 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-2, 0]$.

2) Pentru $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 3 - 3x + 2x - 1 = -x + 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

3) Pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow 3 - 3x - 2x + 1 = -x + 2 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x \notin \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Soluția ecuației este deci $S = \{0\} \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

8. Deoarece $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$ și $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$ ecuația se mai scrie $|x-3|-2(x+1)=a$. Avem $a=\begin{cases}-3x+1, & \text{pt. } x<3\\ -8, & \text{pt. } x=3\\ -x-5, & \text{pt. } x>3.\end{cases}$ Rezultă soluția $x=\begin{cases}-a-5, & \text{pt. } a<-8\\ 3, & \text{pt. } a=8\\ \dfrac{1-a}{3}, & \text{pt. } a>-8\end{cases}$.

9. a) $x\in\{-4,3\}$; b) $x\in\{2,4\}$; c) $x\in\left\{0,\frac{2}{3}\right\}$ d) $x\in\{-1,0\}$ e) $x\in\{-2,1\}$.

10. Semnul expresiilor $x-1$ și $x+1$ este dat în tabelul următor:

x	$-\infty$			-1			1	∞
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Dacă $x\in(-\infty,-1]$ ecuația devine $-2=kx+1\Leftrightarrow kx=-3$. Pentru $k=0$ ecuația nu are soluție. Pentru $k\neq 0\Rightarrow x=-\frac{3}{k}\in(-\infty,-1]\Leftrightarrow -\frac{3}{k}\leq 1\Leftrightarrow \frac{-3+k}{k}\leq 0\Leftrightarrow k\in(0,3]$.

Dacă $x\in(-1,1]$, ecuația devine $2x=kx+1\Leftrightarrow(2-k)x=1$.Pentru $k=2$ ecuația nu are soluție. Pentru $k\neq 2\Rightarrow x=\frac{1}{2-k}\in(-1,1]\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2-k}>-1\\ \frac{1}{2-k}\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3-k}{2-k}>0\\ \frac{k-1}{2-k}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}k\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)\\ k\in(-\infty,1]\cup(2,\infty)\end{cases}\Leftrightarrow k\in(-\infty,1]\cup(3,\infty)$.

Dacă $x\in(1,\infty)$ ecuația devine $2=kx+1\Leftrightarrow kx=1$. Pentru $k=0$ ecuația nu are soluție. Pentru $k\neq 0\Rightarrow x=\frac{1}{k}\in(1,\infty)\Leftrightarrow\frac{1}{k}>1\Leftrightarrow\frac{1-k}{k}>0\Leftrightarrow k\in(0,1)$.

În concluzie, ecuația are soluție unică pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow k\in(-\infty,0]\cup(1,\infty)$.

11. $x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

12. $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

13. a) $x\in(-3,3)$; b) $x\in(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$; c) $x\in[-3,7]$; d) $x\in(-5,13)$;
e) $x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$; f) $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

14. a) $x\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$; b) $x\in(-\infty,-9)$ c) $x\in\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right)$; d) $x\in[0,1]$; e) $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

16. $(x,y)\in\left\{\left(-\frac{65}{29},-\frac{50}{29}\right),(-1,2),(1,2),\left(\frac{65}{29},-\frac{50}{29}\right)\right\}$.

18. $\begin{cases} |ax-b| \le c \\ |bx-c| \le a \\ |cx-a| \le b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c \le ax-b \le c \\ -a \le bx-c \le a \\ -b \le cx-a \le b \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} -(a+b+c) \le x(a+b+c)-(a+b+c) \le a+b+c \Rightarrow 0 \le x \le 2.$

19. Avem: $|ab-c| = |ab-a+a-c| \le |ab-a|+|a-c| = |a|\cdot|b-1|+|a-c| < 1\cdot 10+100 = 110.$

20. Avem: $|a| = \left|\frac{(a+1)^2-(a^2+1)}{2}\right| \le \frac{|(a+1)^2|+|a^2+1|}{2} \le \frac{1+1}{2} = 1.$

21. $|a\sqrt{3}-b\sqrt{5}| < \sqrt{3}|a|+\sqrt{5}|b| < 5(\sqrt{3}+\sqrt{5}) < 20 \Rightarrow \frac{1}{|a\sqrt{3}-b\sqrt{5}|} > \frac{1}{20}$ și $|5b^2-3a^2| \ge 1 \Leftrightarrow |(a\sqrt{3}-b\sqrt{5})(a\sqrt{3}+b\sqrt{5})| \ge 1 \Leftrightarrow |a\sqrt{3}+b\sqrt{5}||a\sqrt{3}-b\sqrt{5}| \ge 1 \Leftrightarrow |a\sqrt{3}+b\sqrt{5}| \ge \frac{1}{|a\sqrt{3}-b\sqrt{5}|} > \frac{1}{20}.$

22. Avem: $\begin{cases} |a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1 \\ |b| < 1 \Leftrightarrow -1 < b < 1 \end{cases}$ Din $a < 1 \Leftrightarrow a-1 < 0$ și $b < 1 \Leftrightarrow b-1 < 0 \Rightarrow (a-1)(b-1) > 0 \Leftrightarrow ab-a-b+1 > 0$ (1)

Din $a > -1 \Leftrightarrow a+1 > 0$ și $b > -1 \Leftrightarrow b+1 > 0 \Rightarrow (a+1)(b+1) > 0 \Leftrightarrow ab+a+b+1 > 0$ (2)

Avem $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1.$ (3) Din $|a| < 1, |b| < 1 \Rightarrow |ab| < 1 \Leftrightarrow -1 < ab < 1 \Rightarrow 1+ab > 0$. Înmulțind relația (3) cu $1+ab > 0$ obținem $-1-ab < a+b < 1+ab \Leftrightarrow \begin{cases} -1-ab < a+b \\ a+b < 1+ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+a+b+1 > 0 \\ ab-a-b-1 < 0 \end{cases}$ adevărate conform lui (1) și (2).

23. Inegalitățile $0 < x < 2$, $0 < y < 2$ conduc la: $x(2-y) > 0$ (1), $y(2-x) > 0$ (2) și $x(2-y)+y(2-x) > 0 \Leftrightarrow x+y-xy > 0$ (3).

Avem $\left|\frac{x-y}{x+y-xy}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-y}{x+y-xy} < 1$ și ținând cont de (3)$\Rightarrow -x-y+xy < x-y < x+y-xy \Leftrightarrow \begin{cases} x-y > -x-y+xy \\ x-y < x+y-xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-y) > 0 \\ y(2-x) > 0 \end{cases}$ sistem care este verificat conform lui (1) și (2).

24. Avem: $x = 7(a+x+b)+5(4a+3x+b)-3(9a+7x+4b)$ și $|x| = |7(a+x+b)+5(4a+3x+b)-3(9a+7x+4b)| \le |7(a+x+b)|+|5(4a+3x+b)|+|3(9a+7x+4b)| \le 7|a+x+b|+5|4a+3x+b|+3|9a+7x+4b| \le 7+5+3 = 15.$

25. $\begin{cases} |ax-b| \le c \\ |bx-c| \le a \\ |cx-a| \le b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c \le ax-b \le c \\ -a \le bx-c \le a \\ -b \le cx-a \le b \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} -(a+b+c) \le (a+b+c)x-(a+b+c) \le a+b+c \Leftrightarrow -1 \le x-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2.$

31. a) $x \in \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$; b) $x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$; c) $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$; d) $x \in \left[4, \frac{13}{3}\right)$.

35. Avem $x=[x]+\{x\}$, $y=[y]+\{y\}$ și deci $x+y=[x]+\{x\}+[y]+\{y\}\Rightarrow[x+y]=[[x]+\{x\}+[y]+\{y\}]=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]\leq[x]+[y]+1$ deoarece $[\{x\}+\{y\}]=\begin{cases}0, & \text{pt. } \{x\}+\{y\}\in[0,1)\\ 1, & \text{pt. } \{x\}+\{y\}\in[1,2)\end{cases}$

Dacă $\{x\}+\{y\}\in[0,1)$ atunci $[x+y]=[x]+[y]$.

Dacă $\{x\}+\{y\}\in[1,2)$ atunci $[x+y]=[x]+[y]+1\geq[x]+[y]$.

36. Avem: $[x]+[y]\leq[x+y]\Leftrightarrow x-\{x\}+y-\{y\}\leq x+y-\{x+y\}\Leftrightarrow\{x+y\}\leq\{x\}+\{y\}$.

38. a) Din definiție $x=[x]+\{x\}$, $y=[y]+\{y\}$ și $xy=[x]\cdot[y]+\{x\}\cdot[y]+\{y\}\cdot[x]+\{x\}\cdot\{y\}\Rightarrow[xy]=[[x]\cdot[y]+\{x\}\cdot[y]+\{y\}\cdot[x]+\{x\}\cdot\{y\}]=$

$[x]\cdot[y]+\underbrace{[\{x\}\cdot[y]+\{y\}\cdot[x]+\{x\}\cdot\{y\}]}_{\geq 0}\geq[x]\cdot[y]$ pentru $x,y\geq 0$.

b) Pentru $x,y\leq 0\Rightarrow -x,-y\geq 0$ și $[xy]=[x]\cdot[y]+[\{x\}\cdot[y]+\{y\}\cdot[x]+\{x\}\cdot\{y\}]=[x]\cdot[y]+[\{x\}([y]+\{y\})+\{y\}([x]+\{x\})-\{x\}\cdot\{y\}]$

$=[x]\cdot[y]+\underbrace{[y\{x\}+x\cdot\{y\}-\{x\}\{y\}]}_{\leq 0}\leq[x]\cdot[y]$.

40. a) $x=-2$; b) $x\in\left\{\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4\right\}$; c) $x\in\left\{-\frac{13}{4},-2,-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right\}$; d) $x\in\left\{\frac{9}{2},\frac{11}{2},\frac{13}{2}\right\}$; e)$=\frac{34}{19}$; f) $x\in\{14,18,22\}$.

41. $x+[x]=13\{x\}\Leftrightarrow x+[x]=13(x-\{x\})\Leftrightarrow 6x=7[x]\Leftrightarrow[x]=\frac{6x}{7}$ și $\frac{6x}{7}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-1<\frac{6x}{7}\leq x\Rightarrow x\in[0,7)\Rightarrow 0\leq\frac{7k}{6}<7\Rightarrow k\in[0,6)\cap\mathbb{Z}=\{0,1,2,3,4,5\}$ și $x\in\left\{0,\frac{7}{6},\frac{7}{3},\frac{7}{2},\frac{14}{3},\frac{35}{6}\right\}$.

43. a) $x\in\varnothing$; b) $x\in\left\{-\frac{1}{3},0\right\}$ c) $x\in\left[8,\frac{17}{2}\right)$.

46. Scriem $x\in\mathbb{R}$ sub forma $x=[x]+\{x\}$ cu $0\leq x<1$. Atunci avem $2x=2[x]+2\{x\}$ și $x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}$. Distingem două cazuri:

1^0. $0\leq\{x\}<\frac{1}{2}$, de unde $0\leq 2\{x\}<1$. Atunci $[2x]=2[x]$, $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$ și egalitatea cerută este adevărată.

2^0. $\frac{1}{2}\leq\{x\}<1$ de unde $1\leq 2\{x\}<2$. Atunci $[2x]=2[x]+1$, $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1$ și egalitatea cerută este adevărată și în acest caz.

48. a) $x\in\left\{-\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{7}{5},2\right\}$; b) $x\in\left\{\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right\}$.

49. Din forma ecuației se obține condiția ca $\frac{3}{2}x-2\in\mathbb{Z}$.

$\frac{x-2}{2}-1<\left[\frac{x-2}{2}\right]\leq\frac{x-2}{2}$ și $\frac{2x-1}{4}-1<\left[\frac{2x-1}{4}\right]\leq\frac{2x-1}{4}$ și adunăm membru cu membru, obținem : $\frac{x-2}{2}+\frac{2x-1}{4}-2<\frac{3}{2}x-2\leq\frac{x-2}{2}+\frac{2x-1}{4}\Leftrightarrow 2x-4+2x-1-8<6x-8\leq 2x-4+2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}2x+5>0\\2x-3\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)\\x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right]\Rightarrow\frac{3}{2}x\in\left(-\frac{15}{4},\frac{9}{4}\right]$ (1)

Din $\frac{3}{2}x-2\in\mathbb{Z}$ obținem că $\frac{3}{2}x\in\mathbb{Z}$ și conform cu (1), rezultă că $\frac{3}{2}x\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}\Leftrightarrow x\in\left\{-2,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right\}$. (2)

Astfel, conform cu (2), ecuația dată poate avea cel mult șase soluții. Înlocuim succesiv fiecare valoare din (2) și constatăm că soluțiile ecuației sunt $\left\{-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right\}$.

51. $\left[5\cdot\{\sqrt{n^2+2n}\}\right]=4$.

52. a) Reducere la absurd; b) $[A]=n$; c) Prima zecimală este 4.

53. $\left\{\frac{x}{2}\right\}=\left\{\frac{x}{5}\right\}\Leftrightarrow\frac{x}{2}-\frac{x}{5}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{3x}{10}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{3x}{10}=k,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{10k}{3}\in(0,2004),k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\left(0,\frac{3006}{5}\right)\cap\mathbb{Z}$. Deoarece $\frac{3006}{5}=601,2\Rightarrow k$ ia 601 valori, și deci ecuația are 601 soluții.

54. Notăm $\left[\frac{m^2x-1}{2}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{2x+1}{5}=k\Rightarrow x=\frac{5k-1}{2}$.

ținând cont de definiția părții întregi, avem $\frac{m^2x-1}{2}-1<\left[\frac{m^2x-1}{2}\right]\leq\frac{m^2x-1}{2}$, adică

$\frac{m^2(5k-1)-12}{4}<k\leq\frac{m^2(5k-1)-2}{2}\Leftrightarrow m^2+2\leq(5m^2-4)k<m^2+6$ (1).

Cum $m^2\geq 1$ și $5m^2-4>0$ împărțind relația (1) prin $5m^2-4$, obținem $\frac{m^2+2}{5m^2-4}\leq k<\frac{m^2+6}{5m^2-4}$.

Pentru $|m|\geq 2$, avem $\frac{m^2+6}{5m^2-4}<1$ și deci $k\in\varnothing$.

Pentru $|m|=1\Rightarrow 3\leq k<7\Rightarrow k\in\{3,4,5,6\}\Rightarrow x\in\left\{7,\frac{19}{2},12,\frac{29}{2}\right\}\Rightarrow q=4$ și $S=43$.

55. $q=4,\ S=31$.

56. Avem $\left[\frac{(n+1)}{2}x-\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n}\right]=$
$\left[\frac{(n+1)x}{2}-\frac{x-\{x\}+2x-\{2x\}+\ldots+nx-\{nx\}}{n}\right]=\left[\frac{\{x\}+\{2x\}+\ldots+\{nx\}}{n}\right]=0$ deoarece $\{kx\}\in[0,1),(\forall)x\in\mathbb{R},(\forall)k\in\mathbb{N}$.

57. Se știe că $x=[x]+\{x\}\Rightarrow[x]+\{x\}-[x]\leq 1-\{x\}\Rightarrow 0\leq 1-2\{x\}\Rightarrow 2\{x\}\leq 1\Rightarrow\{x\}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\bigcup_{k\in Z}\left[k,k+\frac{1}{2}\right]$.

58. **Soluția I:** $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2 \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-2\le\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}<x-1 \Rightarrow 6x-12\le x^3-3x^2+2x-1<6x-6 \Rightarrow -11\le x^3-3x^2-4x<-5$

$\Rightarrow x^3-3x^2-4x\in\{-11,-10,-9,-8,-7,-6\}\cap\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x(x+1)(x-4)\in\{-11;-10;-9;-8;-7;-6\}$

Deoarece $x(x+1)\vdots 2, \forall x\in\mathbb{Z}$, rezultă $x(x+1)(x-4)\in\{-10;-8;-6\}$.

Dacă $x\ge 4\Rightarrow x(x+1)(x-4)\ge 0$.

Dacă $x\le -2\Rightarrow x(x+1)(x-4)\le -12$. Deci $x\in\{-1,0,1,2,3\}$. Prin calcul direct se determină unica soluție $x=1$.

Soluția a II-a: $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ și $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=\left[\frac{x(x-1)(x-2)-1}{6}\right]=\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-\frac{1}{6}\right]=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+\left[-\frac{1}{6}\right]$.

Deoarece $x(x-1)(x-2)\vdots 6$, rezultă $\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\in\mathbb{Z}$.

Ecuația devine $\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-1=x-2$.

$x(x-1)(x-2)-6=6(x-2)$

$(x+2)(x-2)(x-3)=6 \Rightarrow (x+2),\ (x-2),\ (x-3)\in D_6$.

Rezultă unica soluție $x=1$.

60. $x=9,8; y=3,0(6)$.

62. $x=\frac{1}{2}; y=\frac{7}{2}$.

63. Se adună membru cu membru cele trei ecuații și rezultă $x+y+z=3,3$, (1). Din (1) scăzând prima ecuație rezultă $[y]+\{z\}=2,2\Rightarrow [z]=2$ și $\{y\}=0,2$ (2). Din (1) se scade a doua ecuație$\Rightarrow \{z\}+[x]=1.1\Rightarrow [x]=1,\{z\}=0,1$. (3) Din (1) se scade a treia ecuație $\Rightarrow \{x\}+[y]=0\Rightarrow [y]=0,\{x\}=0$. (4). Din (2),(3) și (4)$\Rightarrow x=1,\ y=0,2,\ z=2,1$.

64. Prin adunarea membru cu membru a celor trei relații se obține $2(x+y+z)=12\Rightarrow x+y+z=6$.

Prin scăderea relațiilor $x+y+z=6, x+[y]+\{z\}=2,5$ se obține $\{y\}+[z]=3,5$. Deoarece $[\{y\}+[z]]=[3,5]$ rezultă $[z]=3$, deci $\{y\}=0,5$ Analog, prin scăderea relațiilor $x+y+z=6$ și $y+[z]+\{x\}=8.2$ se obține $[x]=-3$ și $\{z\}=0,8$. Prin scăderea relațiilor $x+y+z=6$ și $z+[x]+\{y\}=1.3$ se obține $[y]=4$ și $\{x\}=0,7$. In concluzie $x=-2,3;\ y=4,5;$ și $z=3,8$.

Test de evaluare **pag. 29**

1. A 3; B 5; ☑ 6; D 4; E 7.

2. A 0; B 0,3; C 0,3(1); ☑ 0,4(1); E 1.

3. A 10 B 25 C 50 D 100 ☑ 55

4. A $[-1,3]$; ☑ $[7,11]$; C $(-3,1)$; D $[-1,1]$; E $[2,5]$.

5. A 13; ☑ 26; C 10; D 16; E 36 .

6. A $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; B $[3,5]$; ☑ $(-\infty,-3]\cup[5,\infty)$; D $(-\infty,-3)\cup(5,\infty)$; E $\varnothing$; F $\mathbb{R}$.

7. A 0; B 1; C 10; D 4; ☑ infinit.

8. A 0; ☑ 1; C 4; D 2; E $\varnothing$.

Test de evaluare **pag.30**

1. $x\in\left\{\frac{8}{7};8\right\}$.

2. $x\in\left(\frac{10}{7};6\right)$.

3. $x\in\{17;21;25\}$.

4. $n+1<\sqrt{n^2+3n}<n+2\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+3n}\right]=n+1$.

5. $\left\{\sqrt{n^2+3n}\right\}=\sqrt{n^2+3n}-\left[\sqrt{n^2+3n}\right]=\sqrt{n^2+3n}-(n+1)<\frac{1}{2}$.

6. Cu substituția $\frac{x+9}{8}=y$ ecuația devine $[y]+[y-2]=\frac{16y-19}{6}\Leftrightarrow[y]=\frac{16y-7}{12}\Rightarrow y\in\left\{-\frac{-17}{16},-\frac{5}{16},\frac{7}{16},\frac{19}{16}\right\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{35}{2},-\frac{23}{2},-\frac{11}{2},\frac{1}{2}\right\}$.

Mulțimi **pag. 30**

1. $A\cup B\cup C=\{1,3,4,5,7,8\}$, $A\cap B=\{1,4,5\}$, $A\cap B\cap C=\{5\}$, $A\setminus B=\{3,7\}$.

7. a) $\begin{cases}a+2b=2\\a+b+2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$; b) $\begin{cases}a+2b=4\\a+b+2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$; c) $c\geq 3$, $a=0$, $b=2$.

9. $A=\{1,2,4,8,16\}, B=\{2,6,14\}, C=\{4,36,196\}, (A\cup B)\cap C=\{4\}, (A\setminus B)\cup C=\{1,4,8,16,36,196\}, A\setminus(B\cap C)=A$.

10. $A=[-7,7], B=\{-4,10\}, A\cup B=[-7,7]\cup\{10\}, A\setminus B=[-7,-4)\cup(-4,7], B\setminus A=\{10\}$

11. A=$\{-4;1+\sqrt{5}\}$;B=$\{1-\sqrt{5};-1+\sqrt{17}\}$.

12. $A=\{0,25,64,81\}$.

13. 69.

15. $C_E(A \cup B) = \{c\}$ și $C_E(A \cap B) = \{a, c, d, e, f\}$.

16. $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$.

17. $A = \{1, 2, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$.

18. Din c) avem $A \subset B$, iar din b) $A = A \cap B = \{3\}$. Folosind d), $3 \in B \setminus \{7\} = A \setminus C$ deci $3 \notin C$ și $B \setminus \{7\} = \{3\}$ adică $B = \{3\}$ sau $B = \{3, 7\}$. În primul caz rezultă $C = \{1, 2, 7\}$, în al doilea $C = \{1, 2\}$ sau $C = \{1, 2, 7\}$.Avem deci soluțiile: $A = \{3\}$, $B_1 = \{3\}$, $C_1 = \{1, 2, 7\}, B_2 = B_3 = \{3, 7\}, C_2 = \{1, 2\}, C_3 = \{1, 2, 7\}$.

19. Din $A \cup C_E A = E$; $B \cup C_E B = E \Rightarrow (A \cup C_E A) \cup (B \cup C_E B) = E \cup E \Rightarrow E = (A \cup B) \cup (C_E A \cup C_E B) = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\} \cup \{2, 5, 9, 13, 18, 20\} \cup \{2, 6, 18, 20\} = \{1, 2, 5, 6, 9, 13, 14, 18, 20\}$; $A = E \setminus C_E A = \{1, 6, 14\}$; $B = E \setminus C_E B = \{1, 5, 9, 13, 14\}$.

20. $E = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3\}$, $B = \{4, 6, 7\}$.

22. $A = \{1, 3\}$; $B = 2, 3$.

23. $x = 5, y = 6, z = 3$.

24. 10.

25. a) $B = \{3, 4, 5, 6\}$ și există 16 submulțimi X. b) $Y = \{3\}$.

27. $\begin{cases} (3x+2) \mid (x^3 + 2x^2 - x - 1) \\ (3x+2) \mid (3x+2) \end{cases} \Rightarrow (3x+2) \mid (3 \cdot (x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 1) - x^2 \cdot (3 \cdot x + 2)) =$
$4x^2 - 3x - 3$. Repetăm raționamentul $\begin{cases} (3x+2) \mid (4x^2 - 3x - 3) \\ (3x+2) \mid (3x+2) \end{cases} \Rightarrow (3x+2) \mid (3(4x^2 - 3x - 3) -$
$4x(3x+2)) = -17x - 9$ și $\begin{cases} (3x+2) \mid (-17 - 9) \\ (3x+2) \mid (3x+2) \end{cases} \Rightarrow (3x+2) \mid (3(-17x - 9) + 17(3x+2)) = 7 \Rightarrow$
$3x + 2 \in \{-7, -1, 1, 7\}, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3, -1\} = A$ și $\sum\limits_{x \in A} x^2 = 10$.

28. 1. F; 2. A; 3. G; 4. E; 5. B.

29. $B = \{0\}$; $C = \{-2, 1, 3, 4, 7\}$; $D = \{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}$; $E = \{-7, -2, 1, 2, 4, 5, 8, 13\}$.

31. $A = \{-8, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 7\}$.

32. $A = \{-17, 7\}$.

33. $A = \{-16, -6, -4, 4, 6, 16\}$; $B = \{-2, 0, 2, 4\}$; $A \setminus B = \{-16, -6, -4, 6, 16\}$.

35. Să presupunem prin absurd că există mulțimile B și C care verifică cele trei condiții. Din a) și b) deducem că fiecare din numerele de la 1 la 100 se află într-o singură mulțime B sau C. Dacă P_1 este produsul elementelor lui B, iar P_2 produsul elementelor lui C, din condiția c) rezultă că P_1 și P_2 au aceiași factori primi. Însă (de exemplu) numărul prim 97 apare ca factor numai în unul din numerele P_1 sau P_2 deoarece aparține fie numai lui B fie numai lui C. Deci nu există două mulțimi B și C care să satisfacă condițiile problemei.

36. Fie $x \in A \Rightarrow x = \dfrac{3n^2+1}{n^2+n}$. Prin calcul direct se verifică că $2 \leq \dfrac{3n^2+1}{n^2+n} < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și deci $x \in B \Rightarrow A \subset B$ (1)

Fie $x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subset A$ (2). Din (1) și (2)$\Rightarrow A = B$.

37. Fie $(x, y) \in A \Rightarrow 13 \mid (5x + 7y)$. Deoarece $5x + 7y = 13(x + y) - 2(4x + 3y) \Rightarrow 13 \mid (4x + 3y) \Rightarrow (x, y) \in B \Rightarrow A \subset B$ (1). Din $(x, y) \in B \Rightarrow 13 \mid (4x + 3y) \Rightarrow 13 \mid 2(4x + 3y) = 13(x + y) - (5x + 7y) \Rightarrow 13 \mid (5x + 7y) \Rightarrow (x, y) \in B$ (2). Din (1) și (2) obținem, $A = B$

38. $x \in A \Rightarrow x = \dfrac{2n+1}{n+4} = 2 - \dfrac{7}{n+4} < 2 \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subset B$ (1)

$x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subset A$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow A = B$.

41. Fie $\dfrac{x^4+3}{2x^2} = d \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2(2d - x^2) = 3 \Rightarrow x^2 | 3 \Rightarrow x \in \{-1, 1\} = A$.

43. Avem $A \cap B \cap C = \{x \mid x = 7m - 15 = 300 - 42n = 36p + 60, m, n, p \in \mathbb{N}\}$. Pentru determinarea acestei mulțimi vom rezolva sistemul $\begin{cases} 7m - 15 = 36p + 60 \\ 300 - 42n = 36p + 60 \end{cases}$ în mulțimea numerelor naturale.

Obținem $\begin{cases} m = 5p + 10 + \dfrac{p+5}{7} \\ n = -p + 5 + \dfrac{p+5}{7} \end{cases}$ (1) Deoarece $m, n \in \mathbb{N}$ rezultă că $\dfrac{p+5}{7} = q \in \mathbb{N} \Rightarrow p = 7q + 5, q \in \mathbb{N}$. Înlocuind în (1) obținem $m = 36q - 15$ și $n = -6q + 10$.

Impunem condiția ca numerele m, n și p să fie pozitive. Obținem sistemul de inecuații:

$\begin{cases} 36q - 15 \geq 0 \\ -6q + 10 \geq 0 \\ 7q - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow q \in \left[\dfrac{5}{7}, \dfrac{5}{3}\right]$. Cum $q \in \mathbb{N} \Rightarrow q = 1$ și $A \cap B \cap C = \{132\}$.

44. $A \cap B = \{7, 13\}$.

47. Fie $x \in A \cap B$. Să arătăm că $x \in C$. Avem $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ și $x \in B$, adică există numerele naturale m și n astfel încât $x = 3n - 2 = 1003 - 2m \Leftrightarrow m = 502 - n - \dfrac{n-1}{2} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$. Deoarece $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$ și putem nota $\dfrac{n-1}{2} = p \in \mathbb{N}$ pe de o parte, iar pe de alta $502 - n - \dfrac{n-1}{2} \geq 0$.

Rezultă $n = 2p+1$ și $m = 502-2p-1-p = 501-3p \geq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq 167$; Avem deci $x = 3n-2 = 3(2p+1)-2 = 6p+1,\ p \in \mathbb{Z},\ 0 \leq p \leq 167$ adică $x \in C$. (1)

Reciproc, fie $x \in C$ și să arătăm că $x \in A \cap B$.

Avem $x \in C \Rightarrow x = 6p+1 = 6p+3-2 = 3(2p+1)-2 = 3n-2$, unde am notat $2p+1 = n \in \mathbb{N}$ pentru $p \in \mathbb{Z},\ 0 \leq p \leq 167$ și deci $x \in A$. Să arătăm că $x \in B$. Avem $x \in C \Rightarrow x = 6p+1 = 6p+1003-1002 = 1003-2(501-3p) = 1003-2m$, unde am notat $501-3p = m \in \mathbb{N}$ pentru $p \in \mathbb{Z},\ 0 \leq p \leq 167$ și deci $x \in B$. Din $x \in A$ și $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$ (2)

Din (1) și (2), rezultă $A = B$.

53. Presupunem că există $a \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea dată. Fie $a + \frac{1}{a} = k, k \in Z \Rightarrow a^2 - ka + 1 = 0$. Ecuația are rădăcini din $\mathbb{Q} \Leftrightarrow k^2 - 4 = m^2, m \in Z \Leftrightarrow (k-m)(k+m) = 4$. Cum $k, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\begin{cases} k-m=-1 \\ k+m=-4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} k-m=-2 \\ k+m=-2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} k-m=-4 \\ k+m=-1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} k-m=1 \\ k+m=4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} k-m=2 \\ k+m=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} k-m=4 \\ k+m=1 \end{cases}$ de unde $a \in \{-1, 1\}$.

Dar $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Test de evaluare **pag.36**

1. $A = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$.

2. $\{3, 6\} \subset A \Rightarrow x = 3$ și $y = 3$ sau $x = 6$ și $y = 3$ și respectiv $\{6, 7\} \subset B \Rightarrow x = 6$ și $z = 7$ sau $x = 7$ și $z = 6$. Cum $x \in A \cap B \Rightarrow x = 6, z = 7$ și $y = 3$.

3. $(x, y) \in M \Rightarrow 2xy-3x+5y = 7 \Rightarrow y = \frac{3x+7}{2x+5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x+5)|(3x+7)$ și $(2x+5)|(2x+5)$ și deci $(2x+5)|(2(3x+7)-3(2x+5)) = -1 \Rightarrow 2x+5 \in \{-1, 1\} \Rightarrow x = -3$ sau $x = -2$ de unde $M = \{(-3, 2), (-2, 1)\}$. Analog se determină mulțimea N.

4. 1. F; 2. E; 3. A; 4. G.

5. Presupunem că există $n_1, n_2 \in \overline{1, 100}, n_1 \neq n_2$ astfel încât $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \frac{6n_1^2+7}{3n_1+1} = \frac{6n_2^2+7}{3n_2+1} \Leftrightarrow (6n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 - 7)(n_1 - n_2) = 0$. Cum $n_1 \neq n_2$ ar rezulta că $6n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2(3n_1n_2 + n_1 + n_2) = 7$ ceea ce este imposibil pentru $n_1, n_2 \in \overline{1, 100}$ membrul stâng fiind par iar membrul drept impar.

Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor **pag.55**

4. a) $E(1, 1, 0) = E(1, 0, 0) = E(0, 0, 0) = 1$

b) $E_1(0, 0, 0, 0) = 0$; $E_1(1, 1, 1, 1) = 0$; $E_2(1, 1, 1, 0, 0) = 1$; $E_2(0, 0, 0, 0, 0) = 0$.

5. a) $P = Q = R = 1$; $P = 0,\ Q = 0,\ R = 1$;

b) $P = Q = 1,\ R = 0$; $P = 1,\ Q = R = 0$;

c) $P = 1, Q = 0, R = 0$, adevărată; $P = 1, Q = 1, R = 0$, falsă.

6. Se folosește tabelul de adevăr. Exemplu a)

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$	$v(p)+v(q)-v(p)v(q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

9. a) $\overline{(A \wedge B) \to C} = \overline{\overline{A \wedge B} \vee C} = \overline{\overline{A \wedge B}} \wedge \overline{C} = A \wedge B \wedge \overline{C}$.

b) $\overline{(A \to B) \wedge C} = \overline{(\overline{A}) \vee B) \wedge C} = \overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{C} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} \vee \overline{C} = A \wedge \overline{B} \vee \overline{C}$.

c) $\overline{P \to (Q \wedge R)} = \overline{\overline{P} \vee (Q \wedge R)} = \overline{\overline{P}} \wedge \overline{(Q \wedge R)} = P \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$.

d) $\overline{(A \vee B) \to C} = \overline{\overline{A \vee B} \vee C} = \overline{\overline{A \vee B}} \wedge \overline{C} = (A \vee B) \wedge \overline{C}$.

e) $\overline{(P \to Q) \wedge (Q \to R)} = \overline{(\overline{P} \vee Q) \wedge (Q \to R)} = \overline{(\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{Q} \vee R)} = \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{(\overline{Q} \vee R)} = (\overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{\overline{Q}} \wedge \overline{R}) = (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{R})$.

f) $\overline{(P \to Q) \vee (R \wedge S)} = \overline{(\overline{P} \vee Q) \vee (R \wedge S)} = (\overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q}) \wedge \overline{(R \wedge S)} = (\overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q}) \wedge \overline{(R \wedge S)} = (P \wedge \overline{Q}) \wedge (\overline{R} \vee \overline{S})$.

g) $\overline{A \vee (B \to C)} = \overline{A \vee (\overline{B} \vee C)} = \overline{A} \wedge \overline{(\overline{B} \vee C)} = \overline{A} \wedge (\overline{\overline{B}} \wedge \overline{C}) = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$.

12. $P = 1,\ Q = 0,\ R = 1$.

13. a) 1) $\overline{Q} \to \overline{R}$, 2) $P \to (\overline{Q} \wedge T$, 3) $R \to (T \wedge \overline{P})$.

b) Din analiza tabelului de adevăr

P	Q	R	T	$\overline{Q} \to \overline{R}$	$P \to (\overline{Q} \wedge T)$	$R \to (T \wedge \overline{P})$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

obţinem 6 posibilităţi ca cele trei condiţii să fie adevărate simultan. Nu se poate deduce o activitate obligatorie pentru toţi copiii în afara restricţiilor de mai sus.

14. $(x, y, z) \in \{(1,2,3), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1)\}$.

16. $x = 3, y = 1, z = 2.$

18. 1) $\bar{p} \to q$; 2) $r \to q$; 3) $p \wedge q$.

19. a) $A \to (B \vee C) \equiv \overline{A} \vee (B \vee C) \equiv \overline{A} \vee B \vee C.$

c) $((A \vee B) \to C) \to D \equiv (\overline{A \vee B} \vee C) \to D \equiv (\overline{\overline{A \vee B} \vee C}) \vee D \equiv ((A \vee B) \wedge \overline{C}) \vee D \equiv D \vee ((A \vee B) \wedge \overline{C}) \equiv D \vee (A \wedge \overline{C}) \vee (B \wedge \overline{C}).$

d) $(A \to B) \to C \equiv (\overline{A} \vee B) \to C \equiv (\overline{\overline{A} \vee B}) \vee C \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee C.$

e) $(A \to B) \leftrightarrow C \equiv (\overline{A} \vee B) \leftrightarrow C \equiv ((\overline{\overline{A} \vee B}) \vee C) \wedge ((\overline{A} \vee B) \vee C) \equiv ((A \wedge \overline{B}) \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{C}).$

20. b) $\left(\overline{C} \wedge D\right) \to (A \to \overline{D}) \iff (\overline{\overline{C} \wedge D}) \vee (A \to \overline{D}) \iff (\overline{\overline{C}} \vee \overline{D}) \vee (\overline{A} \vee \overline{D}) \iff (C \vee \overline{D}) \vee (\overline{A} \vee \overline{D}) \iff C \vee \overline{A} \vee \overline{D}.$

c) $\left(\overline{P} \vee Q\right) \wedge (\overline{Q} \vee R) \iff (P \to Q) \wedge (Q \to R) \implies P \to R.$

e) $(P \wedge Q) \wedge (\overline{Q} \vee R) \iff (P \wedge Q \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q \wedge R) \iff 0 \vee (P \wedge Q \wedge R) \iff P \wedge Q \wedge R.$

Test de evaluare **pag.42**

1. $v(p) = 1,\ v(q) = 0,\ v(p \wedge q) = 0,\ v(p \vee q) = 1,\ v(p \to q) = 0.$

3. Se aplică exercițiul 6 și obținem: $\begin{cases} v(P \to Q) = 1 \\ v(Q \vee \overline{R}) = 1 \\ v(P \vee \overline{Q}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - v(P) + v(P)v(Q) = 1 \\ v(Q) + v(\overline{R}) - v(Q)v(\overline{R}) = 1 \\ v(Q) + v(\overline{Q}) - v(P)v(\overline{Q}) = 1 \end{cases}$

$\overset{v(\bar{p})=1-v(p)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} v(P)(v(Q) - 1) = 0 & (1) \\ v(R)(v(Q) - 1) = 0 & (2) \\ v(Q)(v(P) - 1) = 0 & (3) \end{cases}$. Dacă $Q = 0$ din (1), rezultă $P = 0$ și din (2) $R = 0$. Dacă $Q = 1$ din (3) rezultă $P = 1$ și din (2) $R = 0$ sau $R = 1$. In concluzie $(P, Q, R) \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

4. Din analiza tabelului de adevăr $(P \to \overline{Q}) \wedge (Q \vee R) \wedge (\overline{R} \leftrightarrow T)$, rezultă $(P, Q, R, T) \in \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$.

5. Aplicând formula $p \to q = \overline{p} \vee q$ unde $p = \overline{A} \wedge B$ și $q = C$ obținem $\overline{(\overline{A} \wedge B) \to C} = \overline{(\overline{\overline{A} \wedge B} \vee C)}$. Aplicând formula $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ unde $p = \overline{\overline{A} \wedge B}$ și $q = C$ obținem $\overline{(\overline{\overline{A} \wedge B} \vee C)} = \left(\overline{\overline{\overline{A} \wedge B}} \wedge \overline{C}\right)$ și aplicând legea dublei negații obținem $\left(\overline{\overline{\overline{A} \wedge B}} \wedge \overline{C}\right) = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}.$

6. $(\overline{A} \to B) \wedge C = \left(\overline{\overline{A}} \vee B\right) \wedge C = (A \vee B) \wedge C.$

7. Rezultă din tabelul de adevăr.

A	B	C	$\overline{B}$	$A \vee \overline{B}$	$A \to C$	$B \to C$	$(A \vee \overline{B}) \wedge (A \to C)$	$\big((A \vee \overline{B}) \wedge (A \to C)\big) \to (B \to C)$
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

8.

Soluţia 1. Ne vom ajuta de tautologiile de la exerciţiul 8, de la pagina 38.

$\big((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \to (\overline{R} \to Q)\big) = \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}} \vee (\overline{R} \to Q) = \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}} \vee (\overline{\overline{R}} \vee Q) = \overline{\overline{P}} \vee \overline{\overline{Q}} \vee R \vee Q = P \vee Q \vee R \vee Q = P \vee Q \vee R.$

Soluţie 2. Se face tabelul de adevăr.

Predicate. Cuantificatori **pag.43**

2. $p_1(x), x \in \{-8, -7, \ldots, 1, 2\}$; $p_2(x), x \in \varnothing$; $p_3(x), x = 0$; $p_4(x), x \in [-1, 1]$; $p_5(x), x = 0$; $p_6(x), x \in [-2, -1)$.

3. $p_1(x, y),\ A = \{(2, -3)\}$; $p_2(x, y),\ A = \{(0, 0)\}$; $p_3(x, y),\ A = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$; $p_4(x, y), A = \{(1, -2)\}$, $p_5(x, y),\ A = \{(1; -1; 2)\}$.

5. $p_1(x) \vee p_2(x) : A = (-\infty, -2)$; $p_1(x) \to p_2(x) :\ A = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$; $p_1(x) \wedge p_2(x) : A = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$; $p_1(x) \leftrightarrow p_2(x) :\ A = (\infty, -2) \cup (1, 2]$; $\overline{p_2(x)} : A = [-2, 2]$; $\overline{p_1(x)} \wedge \overline{p_2(x)} : A = (1, 2]$.

7. a) Falsă; b) $x = 1$, adevărată; c) Falsă; d) $x = 0$, adevărată; e) Adevărată; f) Adevărată; g) Falsă; h) $x = 1$, adevărată; i) $x = 4$, Adevărată; j) Adevărată; k) Falsă; l) Adevărată; m) Falsă; n) Falsă; o) $x = 0$, adevărată; p) $x = 1$, falsă; q) adevărată.

10. **I.** $p(x) \vee q(x)$

1. Cuantificare universală: $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \vee x < 0)$ Falsă — exemplu : $x = 0 \to p(0) = 0 > 1$ (fals), $q(0) = 0 < 0$ (fals) .

2. Cuantificare existenţială: $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \vee x < 0)$ Adevărată — exemplu: $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4 > 1$, $x < 0 \to$ ambele adevărate.

II. $p(x) \wedge q(x)$

1. Cuantificare universală: $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \wedge x < 0)$ Falsă — de ex. $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 > 1$, dar $x > 0$, deci conjuncţia e falsă.

2. Cuantificare existenţială: $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \wedge x < 0)$ Adevărată — ex. $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4 > 1$, $x < 0$.

III. $p(x) \to q(x)$

1. Cuantificare universală: $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \to x < 0)$ Falsă — ex. $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 > 1$, dar $x \not< 0$, deci implicația e falsă.

2. Cuantificare existențială: $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \to x < 0)$ Adevărată — ex. $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4 > 1$, $x < 0 \to$ implicația e adevărată.

IV. $\overline{p(x)}$

1. Cuantificare universală: $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \leq 1)$ Falsă — ex. $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \not\leq 1$

2. Cuantificare existențială: $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 \leq 1)$ Adevărată — ex. $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \leq 1$

V. $\overline{q(x)}$

1. Cuantificare universală: $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0)$ Falsă — ex. $x = -1$

2. Cuantificare existențială: $\exists x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0)$ Adevărată — ex. $x = 1$

VI. $p(x) \leftrightarrow q(x)$

1. Cuantificare universală: $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \leftrightarrow x < 0)$ Falsă — ex. $x = 2 \Rightarrow x^2 > 1$, dar $x \not< 0$

2. Cuantificare existențială: $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 1 \leftrightarrow x < 0)$ Adevărată — ex. $x = -2 \Rightarrow x^2 > 1$ și $x < 0$, deci echivalența e adevărată pentru acel caz.

12. a) „$\exists x \in E, (\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)})$” b) „$\exists x \in E, (\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)})$” c) „$\forall x \in E, (\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)})$”
d) „$\forall x \in E, (\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)})$” e) „$\exists x \in E, (p(x) \wedge \overline{q(x)})$” f) „$\forall x \in E, (p(x) \wedge \overline{q(x)})$”

18. p_1: $p(0, y) = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2 >$ fals $(x = -3)$.

$p_2 : p(x, -x) = 2x^2 - 8x + 9 = 2(x - 2)^2 + 1 > 0$ adevărat

$p_3 : p(x, -2) = (x - 1)^2$ adevărat.

$p_4 : p(1, y) = y^2 + 6y + 8$ adevărat $(y = 1.)$

$p_5 : p(x, -3) = x^2 - 2x$ fals $(x = 1.)$

20. a) $(x - y)^2 \geq 0$, adevărată; b) Falsă; c) $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$, adevărată; d) adevărată; d) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$, adevărată; f) adevărată; g) adevărată; h) falsă (exemplu $x = -3, y = 2$).

21. 1. $p_1(x, y) : xy \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ Propoziție adevărată: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (xy \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$. Exemplu: pentru orice $x \neq 0$, putem alege $y = \frac{-1}{x} \Rightarrow xy = -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

2. $p_2(x, y) : xy \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\ \exists x, y \in \mathbb{R}\ (xy \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ Exemplu: $x = \frac{1}{2}, y = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

3. $p_3(x, y) : xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ \exists x, y \in \mathbb{R}\ (xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ Exemplu: $x = \sqrt{2}, y = 1 \Rightarrow xy = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4. $p_4(x, y) : x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \exists x, y \in \mathbb{R}\ (x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ Exemplu: $x = \sqrt{2}, y = 0 \Rightarrow x+y = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

5. $p_5(x, y) : x + y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\ \exists x, y \in \mathbb{R}\ (x + y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ Exemplu: $x = -2, y = 0 \Rightarrow x + y = -2 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

6. $p_6(x, y) : x + y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\ \exists x, y \in \mathbb{R}\ (x + y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ Exemplu: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = 1 \in \mathbb{Z}$, dar $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Test de evaluare **pag.48**

Nr.1

1. $p_1(x): x \in \{-1, 4\}$; $p_2(x): x = -5$; $p_3(x): x \in \varnothing$; $p_4(x): x = 2$.

2. $p(x): x \in [-2, 5]$; $q(x): x \in (-\infty, -4] \cup \left[\frac{10}{3}, +\infty\right)$; $p(x) \wedge q(x): x \in \left[\frac{10}{3}, 5\right]$; $p(x) \vee q(x): x \in (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$; $\overline{p}(x): x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$.

3. $v(p) = 1$; $v(q) = 0$; $v(\bar{p}) = 0$; $v(\bar{q}) = 1$; $v(p \to q) = 0$.

Nr.2

1. $p_1(x),\ x \in \left\{-\frac{11}{3}; 3\right\}$; $p_2(x),\ x \in \left\{\frac{11}{2}\right\}$; $p_3(x),\ x \in \{1\}$; $p_4(x),\ x \in \{-3\}$.

2. a) $x \in [-4, 7]$; b) $x \in (-\infty, -6] \cup [5, +\infty)$; c) $x \in [4, 7]$; d) $x \in (-\infty, -4] \cup [5, \infty)$; e) $x \in (-\infty, -4) \cup (7, +\infty)$.

3. $\bar{p}: (\forall)x \in \mathbb{N},\ x^2 - 3 \neq 0$;

$\bar{q}: (\exists)x \in \mathbb{R}, \left|x^2 + 1\right| \leq 2$.

$v(p) = 1$; $v(q) = 0$, $v(\bar{p}) = 0$; $v(\bar{q}) = 1$; $v(p \to q) = 0$.

Test de evaluare **pag.49**

1. Se face tabelul de adevăr

p	q	$p \vee q$	$\bar{q}$	$(p \vee q) \wedge \bar{q}$	$(p \vee q) \wedge \bar{q} \to p$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1

2. Se verifică în tabelul de adevăr.

3. $x \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.

4. a) Falsă. Negația: $(\forall)x \in \mathbb{Z},\ x^2 - 5 \neq 0$;

b) Adevărată. Negația: $(\exists)x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 3 = 0$.

5. a) Adevărată $x = \frac{14 - y}{2}$.

b) Adevărată $y = -4$.

Test de evaluare **pag. 49**

1. a) Adevărat; b) Fals; c) Adevărat; d) Fals.

2. a) Adevărat; b) Adevărat; c) Fals; d) Fals.

3. a) $p(x, y)$:„x îl cunoaște pe y”

b) Fie U mulțimea elevilor unui liceu unde se studiază sau engleza sau franceza.

$p(x)$: „x este elev la liceu”

$q(x)$: „x studiază numai engleza”

4. a) $\forall x \exists y\ p(x,y)$: „Fiecare persoană cunoaște pe cineva” — plauzibil și adevărat într-o societate.

$\exists y \forall x\ p(x,y)$: „Există o persoană pe care toată lumea o cunoaște” — poate fi falsă, dacă nu există o astfel de „persoană celebră”.

b) $\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$: există cel puțin un elev care studiază engleza — plauzibil și adevărat

$\forall x (p(x) \to q(x))$: „Toți elevii studiază engleza” — posibil fals.

Corelarea operatorilor logici cu operațiile și relațiile dintre mulțimi **pag.50**

1. a) $(p \vee q) \vee r$; b) $(p \wedge q) \vee r$; c) $(p \vee q) \wedge r$; d) $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$; e) $p \wedge (\overline{q \vee r})$; f) $p \wedge (\overline{q \wedge r})$; g) $(p \vee q) \wedge \bar{r}$; h) $\overline{p \vee q}$; i) $\overline{p \wedge q}$; j) $p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}$; k) $(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge \bar{r})$; l) $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$; m) $p \wedge q \wedge \bar{r}$;n) $\overline{p \wedge q} \vee (\bar{p} \wedge q)$; o) $(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$; p) $\overline{p \wedge q}$; q) $\overline{p \wedge \bar{q}}$; r) $\overline{p \vee q}$.

2. a) $A \subseteq B$; b) $A \cap B = \varnothing$; c) $B \subseteq A$; d) $A = B$; e) $A = \mathbf{C}B$; f) $A = B$; g) $A \cap B \neq \varnothing$; h) $(E \setminus A) \not\subseteq B$; i) $B \not\subseteq A$; j) $A \neq \mathbf{C}B$.

3. a) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$; b) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$; c) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; d) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; e) $(p \vee q) \wedge \bar{r} = (p \wedge \bar{r}) \vee (q \wedge \bar{r})$; f) $(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p}) = (p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})$; g) $(p \wedge q) \wedge \bar{r} = (p \wedge \bar{r}) \wedge (q \wedge \bar{r})$; h) $(p \wedge \bar{q}) \wedge \bar{r} = (p \wedge \bar{r}) \wedge \bar{q} = p \wedge (\overline{q \vee r})$; i) $p \wedge (\overline{q \wedge r}) = (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge \bar{r})$; j) $p \wedge \bar{q} = p \wedge \bar{q}$; k) $(p \to q) \wedge (q \to p) = (p \equiv q)$;l) $(\bar{\bar{p}}) = p$; m) $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{r}$.

5. $A = \{1,2,4,8\}$; $B = \{1,2,4\}$; $C = \varnothing$; $D = \{3,6,9,12,18,21,24,27,33,36,39,42\}$.

7. a) Mulțimile de adevăr sunt: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ sau } x \geq 2\} = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\} = [1, 3)$; $A \cap B \cap C = \{2\}$; $(A \setminus B) \cup C = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $A \setminus (B \cup C) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$; $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$; $(A \setminus B) \setminus C = (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$.

b) 1) $A \cap \boldsymbol{C}(B)$; 2) $\boldsymbol{C}(A \cup C)$; 3) $A \cup C$; 4) $(A \cap B) \cup \boldsymbol{C}(A \cup B)$; 5) $A \cap B \cap C$; 6) $(A \cap B) \cup C$; 7) $A \cap \boldsymbol{C}(B \cap C)$; 8) $(A \cap B) \cup \boldsymbol{C}(A \cup B)$.

11. a) $A \subset A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \subset B$. Reciproc $B \subset A \cup B = A \cap B \Rightarrow B \subset A$.

b) Cum $A \cap B \subset A \cup B$ și din ipoteză $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ și $|A| = |B|$.

12. a) $A = \{1,2,4,5,6\}$, $B = \{1,3,5,6\}$, $C = \{2,3,5,6\}$; b) $X = \{2,3,4,6,7,9\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,8\}$;

c) $A = \{1,2,4\}, B = \{1,2,3\}$; d) $X = \{2,3,4,7,8\}$ și $Y = \{2,5,6,7,8\}$ sau $X = \{2,3,6,7,8\}$ și $Y = \{2,4,5,7,8\}$; e) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2,4,5\}$, $C = \{3,5,6\}$; f) $A = \{1,2,3,5\}$ și $B = \{2,3,4\}$ sau $A = \{1,2,3\}$ și $B = \{2,3,4,5\}$; g) $A = \{1,3\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{2,3\}$; h) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5\}$;

13. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,2,4\}$.

15. a) $x=2, y=4, z=1, t=3$; b) $x=4, y=1, z=3, t=2$ sau $x=3, y=4, z=2, t=1$; c) $x=2, y=1, z=3, t=4$.

17. a) $X=\{c\}$ sau $X=\{a,c\}$ sau $X=\{b,c\}$ sau $X=\{a,b,c\}$.

b) Indicație Pentru a exista X astfel încât $A\cup X=B$ trebuie ca $A\cup X\subset B\subset A\cup X$.

Fie $x\in A\cup X\subset B\Rightarrow X\subset A\cup B\subset B$ și reciproc din $X\subset B$ și $A\subset B$ rezultă $A\cup X\subset B$. Așadar $A\cup X\subset B\Leftrightarrow X\subset B$.

Fie $B\subset A\cup X$. Dacă $b\in B\Rightarrow b\in A\cup X\Rightarrow \begin{cases} b\in A \text{ sau}\\ b\notin A\end{cases}$

Dacă $b\in A$ atunci $b\in A\cup X$, deci $B\subset A\cup X$.

Dacă $b\notin A$ atunci $b\in X$. Cum $(b\in B$ și $b\notin A)\Rightarrow b\in X\Rightarrow b\in B\setminus A\Rightarrow b\in X\Rightarrow B\setminus A\subset X$. Verificați că $B\setminus A\supset X$ etc.

20. b) $A=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, $B=\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\right.$ $\left.-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ și $A\cup B$ se poate scrie condensat $\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=C$. Analog $\frac{11\pi}{6}+2k\pi=2\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$ și $A\cup D=E$.

22. a) $B=\{1,2\}$, $|A\cap B|=0\Leftrightarrow \Delta_A<0$ sau rădăcinile ecuației $x^2-3x+2=0$ să nu fie și rădăcini ale ecuației $x^2-2x+m=0$, se obține $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. b) $m<1$, c) $m\in\varnothing$, d) $m>1$.

23. $B=\{-3,-2\}$. Cele două mulțimi au un element comun pentru $m\in\{-4,-3\}$; b) $m<-4$; c) $m\in(-4,+\infty)\setminus\{-3\}$; d) $m>-4$.

24. a) $m<-1$; b) $m<\frac{1}{4}$.

Test de evaluare **pag.55**

1. a) $x_0\in(A\setminus B)\cap C\Rightarrow(x_0\in A)\wedge(x_0\notin B)\wedge(x_0\in C)$;

$x_0\in(A\cap B)\setminus B\Rightarrow(x_0\in A)\wedge(x_0\in C)\wedge(x_0\notin B)$.

b) Aplicând dualitatea (înlocuind X cu $\boldsymbol{C}(X)$ și $\cap$ cu $\cup$) rezultă $(\boldsymbol{C}(A)\cup B)\cup\boldsymbol{C}(C)=(\boldsymbol{C}(A)\cup\boldsymbol{C}(C))\cup B$.

c) Din a) $(x_0\in A)\wedge(x_0\notin B)\wedge(x_0\in C)=(x_0\in A)\wedge(x_0\in C)\wedge(x_0\notin B)$ prin urmare , $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$.

2. $A=(0,2]$; $B=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$; $A\setminus B=(0,1)$; $A\cup B=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $A\cap B=[1,2]$.

3. $X=\{1,4\}=Y$ sau $X=\{1,3,4\}=Y$

4. $X\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\Rightarrow X\subset A$ sau $X\subset B\Rightarrow x\subset A\cup B\Rightarrow X\in\mathcal{P}(A\cup B)\Rightarrow\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A\cup B)$.

Contra exemplu: $A=\{1\}, B=\{2\}, A\cup B=\{1,2\}, \mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{1\}\}$, $\mathcal{P}(B)=\{\varnothing,2\}, \mathcal{P}(A\cup B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ și $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\}\Rightarrow\{1,2\}\notin\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$.

Metoda inducției matematice **pag. 56**

2. h) $P(n):\ 1^4-2^4+3^4-4^4+\ldots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$;

Verificare $P(1):1^4=(-1)^0\cdot\dfrac{1(1+1)(1^2+1-1)}{2}\Leftrightarrow 1=1$ adevărată.

Demonstrație: Arătăm că $P(k)\to P(k+1)$

$P(k):\ 1^4-2^4+3^4-4^4+\ldots+(-1)^{k-1}k^4=(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{k(k+1)(k^2+k-1)}{2}$

$P(k+1):\ 1^4-2^4+3^4-4^4+\ldots+(-1)^k(k+1)^4=(-1)^k\cdot\dfrac{(k+1)(k+2)(k^2+3k+1)}{2}$

Avem: $\overbrace{\underbrace{1^4-2^4+3^4-4^4+\ldots+(-1)^{k-1}k^4}_{P(k)}+(-1)^k(k+1)^4}^{P(k+1)}=(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{k(k+1)(k^2+k-1)}{2}+$

$(-1)^k(k+1)^4=(-1)^k\cdot\dfrac{2(k+1)^4-k(k+1)(k^2+k-1)}{2}=(-1)^k\cdot\dfrac{(k+1)(k^3+5k^2+7k+2)}{2}=$

$(-1)^k\cdot\dfrac{(k+1)(k+2)(k^2+3k+1)}{2}$.

3. Indicație: $\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}}=\dfrac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1},\forall k.$

5. a) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}-2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)=$

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}$

b) $2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)=2(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))=2\cdot\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n)}=$

$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)$.

6. *Soluție* I. Prin inducție.

Soluție 2. Fie $a_k=\dfrac{2^k}{3^{2^k}-1}$. Atunci: $\dfrac{2^k}{3^{2^k}+1}=\dfrac{2^k}{3^{2^k}-1}-\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^{k+1}}-1}=a_k-a_{k+1}$. și termenul general al sumei este: $\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=2\cdot\dfrac{2^k}{3^{2^k}+1}=2(a_k-a_{k+1})$. și deci $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}=2(a_0-a_{n+1})=$

$2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2^{n+1}}{3^{2^{n+1}}-1}\right)=1-\dfrac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$.

8. a) $S_n=n(n+1)^2$; b) $S_n=\dfrac{n(n+1)(8n+7)}{6}$; c) $S_n=\dfrac{n(16n^2+36n+23)}{3}$;

d) $S_n=\dfrac{4(2n+3)(2n+1)(n+1)}{3}$; e) $S_n=\dfrac{n(2n+7)(n+1)}{6}$; f) $S_n=\dfrac{n(n+1)(3n^2+19n+32)}{12}$;

g) $S_n=n^2(2n^2-1)$.

9. a) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}=$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4k-3}-\dfrac{1}{4k+1}\right)=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{4k-3}-\dfrac{1}{4k+1}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}+\ldots\right.$

$+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\Big)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$; b) $\frac{n}{n+1}$; c) $\frac{n}{3n+1}$; d) $\frac{n}{3(4n+3)}$.

10. a) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$; b) $\frac{n(n+5)\left(11n^2+55n+62\right)}{96(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

11. $x=1$.

12. a) $P(1)$ este adevărată deoarece $\left[\frac{1}{2}\right]=0$ și $\left[\frac{1}{2}\right]\cdot\left[\frac{2}{2}\right]=0\cdot 1=0$. Presupunem propoziția $P(n)$ adevărată până la $n=k$ și în această ipoteză demonstrăm că ea este adevărată și pentru $n=k+1$, unde

$P(k):\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{k}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+1}{2}\right]$ și

$P(k+1):\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{k+1}{2}\right]=\left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right]$

Avem: $\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{k+1}{2}\right]=\underbrace{\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{2}\right]}_{P(k)}+$

$\left[\frac{k+1}{2}\right]=\left[\frac{k}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right]=\left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)=\left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right]$ și deci propoziția $P(k+1)$ este adevărată $\Longrightarrow$ $P(n)$ adevărată $(\forall)n\geq 1$.

b) *Soluție 1.*

O variantă a inducției matematice este:

Fie $a,b\in\mathbb{R}$ .Propoziția $p(x)$, care depinde de $x\in[a,+\infty)$, este adevărată dacă sunt îndeplinite condițiile:

1) Pasul verificării. Verificăm că p(x) este adevărată pentru orice $x\in[a,a+b)$.

2) Pasul demonstrativ. Pentru orice $x\in[a,+\infty)$ are loc implicația $p(x)\to p(x+1)$. Atunci propoziția $p(x)$ este adevărată pentru orice $x\geq a$.

Demonstrație: Se consideră propoziția $q(n):p(x)$ este adevărată pentru orice $x\in[a+n,a+n+b)$, care se demonstrează prin inducție matematică după $n\in\mathbb{N}$.

Aplicăm această variantă la demonstrarea identității lui Hermite

$p(x):[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx],(\forall)x>0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$

Verificare: Dacă $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$, atunci $nx\in[0,1)$ și $x+\frac{k}{n}\in[0,1)$, $k=\overline{1,n-1}$ și $p(x):\ 0=0$ este adevărată.

Demonstrație: Presupunem propoziția $p(x)$ adevărată și demonstrăm că propoziția $p\left(x+\frac{1}{n}\right)$ este adevărată.

$p\left(x+\frac{1}{n}\right):\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+\left[x+\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right]=$

$\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+$

$1 = [nx] + 1 = [nx + 1] = \left[n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right]$ adică $p(\left(x + \frac{1}{n}\right))$ este adevărată și deci $p(x)$ adevărată $\forall x > 0$.

Soluție 2. Considerăm funcția $f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$ și arătăm că ea este o funcție periodică cu perioada principală $\frac{1}{n}$.

Avem $f(x + \frac{1}{n}) = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x + 1] - [nx + 1] = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x] + 1 - [nx] - 1 = f(x)$ și deci $T = \frac{1}{n}$. Datorită periodicității este suficient să arătăm că $f(x) = 0$ pentru $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$.

$x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow 0 \leq x < x + \frac{1}{n} < x + \frac{2}{n} < \ldots < x + \frac{n-1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$ adică $\left[x + \frac{k}{n}\right] = 0, \forall k = \overline{1, n-1} \Rightarrow f(x) = 0$.

13. e) Verificare: $3^2 > 2^3$ adevărată.

$P(k) : 3^k > k^2$; $P(k+1) : 3^{k+1} > (k+1)^3$; $P(k) \to P(k+1) : 3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k^3$. Este suficient să arătam că $3k^3 > (k+1)^3, \forall k \geq 2$. Avem $3k^3 > (k+1)^3 \Leftrightarrow k\sqrt[3]{3} > k + 1 \Leftrightarrow k > \frac{1}{\sqrt[3]{3} - 1} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{2} > \frac{3}{2}$, deci adevărată pentru $k \geq 2$.

14. a) $n \leq 3$; b) $n \leq 6$; c) $n \geq 5$.

15. c) $P(1) : 1 < 2$; $P(k) : 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 < 2k^4$; $P(k+1) : 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 + (2k+1)^3 < 2(k+1)^4$. Arătăm că $P(k) \to P(k+1)$ este adevărată. Avem $\underbrace{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3}_{<2k^4} + (2k+1)^3 < 2k^4 + (2k+1)^3$. Dar $2k^4 + (2k+1)^3 < 2(k+1)^4 \Leftrightarrow 2k^4 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 < 2k^4 + 8k^3 + 12k^2 + 8k + 2 \Leftrightarrow 2k > 1$, inegalitate evidentă pentru $k \geq 1$.

e) $P(k) : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} \leq k$; Verificarea este imediată.

$P(k+1) : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} \leq k + 1$. Avem $\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1}}_{\leq k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} < k + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} < k + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < k + 1$.

17. e) Indicație:Fie $S(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{3n+1}} - 1$. $S(1)$ calcul direct. Dacă $S(n) > 0$ avem $S(n+1) - S(n) = \frac{1}{\sqrt{3n+4}} + \frac{1}{\sqrt{3n+3}} + \frac{1}{\sqrt{3n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{3}{\sqrt{3n+4}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ pentru $n > -\frac{5}{6}$. Din $S(n+1) - S(n) > 0 \Rightarrow S(n+1) > S(n) > 0$.

18. Notăm cu $P(n)$ enunțul: $A \vdots 31,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

Verificare: $P(1): A = 5 + 5^6 + 5^5 = 5(1 + 3125 + 625) = 5 \cdot 3751 = 5 \cdot 31 \cdot 121 \ = \mathfrak{M}\ 31$

Demonstrație: Presupunem propoziția $P(k): 5^{2k-1} + 5^{5k+1} + 5^{5k} = \mathfrak{M}\ 31$ adevărată și arătăm că propoziția $P(k+1): 5^{2k+1} + 5^{5k+6} + 5^{5k+5} = \mathfrak{M}\ 31$ este adevărată. Avem: $5^{2k+1} + 5^{5k+6} + 5^{5k+5} = \underbrace{(5^{2k-1} + 5^{5k+1} + 5^{5k})}_{\mathfrak{M}\ 31} \cdot 5^5 + 5^{2k+1} - 5^{2k+4} = \mathfrak{M}\ 31 + 5^{2k+1}(1 - 5^3) = \mathfrak{M}\ 31 - 5^{2k+1} \cdot 31 \cdot 4 = \mathfrak{M}\ 31$, și deci $P(n)$ este adevărată $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

23. *Indicație*: Inducție folosind identitatea: $a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$ unde $a = x$ și $b = \dfrac{1}{x}$.

25. a) Avem $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} > \sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$ și $6 < 9 \implies \sqrt{6} < 3 \implies \sqrt{6 + \sqrt{6}} < \sqrt{6+3} = 3 \implies \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < \sqrt{6+3} = 3$.

b) Avem $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ și prin inducție se arată că $2 < x_n < 3, (\forall)x \in \mathbb{N}^* \implies [x_n] = 2$.

26. $[a_n] = 45$.

27. a) $x_2 = \dfrac{1}{3},\ x_3 = \dfrac{1}{2},\ x_4 = \dfrac{2}{3}, x_5 = \dfrac{5}{6}$.

b) $x_n = \dfrac{n}{6}$. Demonstrație prin inducție.

28. a) $a_2 = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2 \cdot 3}, a_3 = \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3 \cdot 4}$ și prin inducție se arată că $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$.

29. Pentru $n = 1 \Rightarrow a_1^3 = a_1^2 \Rightarrow a_1 \in \{-1, 0, 1\}$ și cum $a_1 > 0$, convine $a_1 = 1$. Pentru $n = 2 \Rightarrow a_1^3 + a_2^3 = (a_1 + a_2)^2$ și cum $a_1 = 1 \implies 1 + a_2^3 = (1 + a_2)^2 \Rightarrow a_2^3 - a_2^2 - 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 \in \{-1, 0, 2\}$, convine $a_2 = 2$ și emitem ipoteza $a_n = n$.

Notăm $P(n): a_n = n,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

Verificarea a fost făcută. Presupunem propoziția adevărată până la $n = k$ și în această ipoteză demonstrăm că ea este adevărată și pentru $n = k+1$. Cum $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3 + a_{k+1}^3 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1})^2$ și $P(k)$ adevărată $\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + a_{k+1}^3 = (1 + 2 + \ldots + k + a_{k+1})^2 \Rightarrow \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + a_{k+1}^3 = \left(\dfrac{k(k+1)}{2} + a_{k+1} \right)^2 \Rightarrow a_{k+1}^3 - a_{k+1}^2 - k(k+1)a_{k+1} = 0$ cu soluția strict pozitivă $a_{k+1} = k + 1$.

30. Pentru $n = 1 \Rightarrow a_1^2 = a_1 \Rightarrow a_1 \in \{0; 1\}$ și convine $a_1 = 1$.

Pentru $n = 2 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 = a_1 + a_2 + 2 \Leftrightarrow 1 + a_2^2 = 3 + a_2 \Leftrightarrow a_2^2 - a_2 - 2 = 0 \Rightarrow a_2 \in \{-1; 2\}$ și convine $a_2 = 2$ și emitem ipoteza $a_n = n$.

Notăm $P(n): a_n = n,\ (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

Verificarea a fost făcută. Presupunem propoziția adevărată până la $n = k$ și în această ipoteză demonstrăm că ea este adevărată și pentru $n = k+1$. Cum $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2+a_{k+1}^2 = a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$ și $P(k): a_k = k \Rightarrow 1^2+2^2+\ldots+k^2+a_{k+1} = 1+2+3+\ldots+k+a_{k+1}+\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3} \Leftrightarrow \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+a_{k+1}^2 = \dfrac{k(k+1)}{2}+a_{k+1}+\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3} \Leftrightarrow a_{k+1}^2-a_{k+1}-k(k+1) = 0$ cu soluția strict pozitivă $a_{k+1} = k+1$.

31. Pentru $k = 1$ avem $\dfrac{a_1^2}{a_1} = 1 \Rightarrow a_1 = 1$.

Pentru $k = 2$ avem $\dfrac{1+a_2^2}{1+a_2} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow a_2 \in \left\{-\dfrac{2}{3}; 2\right\}$. Cum $a_2 > 0 \Rightarrow a_2 = 2$ și se demonstrează prin inducție că $a_i = i, \forall i = \overline{1.n}$.

34. a) Pentru $n = 1 \Rightarrow \sqrt{a_2^2-33} = 2+\sqrt{a_1^2-34} = 2 \Rightarrow a_2^2-33 = 4 \Rightarrow a_2 = \sqrt{37} = \sqrt{2^2+33}$ și analog, pentru $n = 2 \Rightarrow \sqrt{a_3^2-33} = 2+\sqrt{a_2^2-36} \Rightarrow a_3 = \sqrt{42} = \sqrt{3^2+33}$.

b) Demonstrăm prin inducție matematică $P(n): a_n = \sqrt{n^2+33}$

$P(1): a_1 = \sqrt{1^2+33}$ (adevărat). Presupunem că $a_n = \sqrt{n^2+33}$. Din relația de recurență deducem $\sqrt{a_{n+1}^2-33} = 2+\sqrt{n^2+33-2n-32} \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}^2-33} = n+1 \Rightarrow a_n+1^2-33 = (n+1)^2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{(n+1)^2+33}$.

c) Avem $a_{19} = \sqrt{394} \approx 19,849, x_{19} = \left[\dfrac{40000}{\sqrt{394}}\right]$ și $19,84 < \sqrt{394} < 19,85 \Rightarrow \dfrac{40000}{19,85} < \dfrac{40000}{\sqrt{394}} < \dfrac{40000}{19,84} \Rightarrow 2015 < \dfrac{40000}{\sqrt{394}} < 2016 \Rightarrow x_{19} = 2015$.

d) $x_n = 2015 \Leftrightarrow 2015 \le \dfrac{40000}{\sqrt{n^2+33}} < 2016 \Leftrightarrow \dfrac{40000}{2016} < \sqrt{n^2+33} \le \dfrac{40000}{2015} \Leftrightarrow 393 < n^2+33 \le 394 \Leftrightarrow n^2+33 = 394 \Leftrightarrow n = 19$.

35. Pentru $\mathrm{n} = 1$ relația devine $f(2) = 1+f(1)$.

Pentru $\mathrm{n} = 2$ relația devine $f(1)+2f(2) = f(3)-1 \Leftrightarrow f(3) = 3(1+f(1))$.

Pentru $\mathrm{n} = 3$ relația dată conduce la $f(4) = 12\cdot(1+f(1))$.

Prin inducție se arată că $f(n) = \dfrac{n!}{2}(1+f(1))$, pentru orice $n \ge 2$ unde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Notând $f(1) = a$, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = \begin{cases} a, & \mathrm{n=1} \\ \dfrac{n!(a+1)}{2}, & n \ge 2 \end{cases}$

36. $n = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{f(1)f(2)} = \dfrac{f(1)}{f(2)}$. Cum $f(1), f(2) > 0 \Rightarrow (f(1))^2 = 1$ și convine $f(1) = 1$.

$$n = 2 \Rightarrow \frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)\,f(3)} = \frac{f(2)}{f(3)} \qquad (1)$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)\,f(3)}+\frac{1}{4f(3)} = \frac{f(3)}{4} \qquad (2)$$

(sa ținut cont de $f(4) = 4$). Din relația (2) scăzând relația (1) obținem $\dfrac{f(3)}{4}-\dfrac{f(2)}{f(3)} = \dfrac{1}{4f(3)}$ de unde

$f(2)=f(3)\left(\frac{f(3)}{4}-\frac{1}{4f(3)}\right)$ și ținând cont de relația (1) obținem $\frac{-f(3)^3+f(3)^2+f(3)+15}{4(f(3)-1)f(3)}=0\Rightarrow(f(3)-3)\left(f(3)^2+2f(3)+5\right)\Rightarrow f(3)=3$, respectiv $f(2)=2$. Emitem ipoteza $f(n)=n$ și demonstrăm prin inducție matematică. Verificare a fost făcută.

$P(k):f(k)=k$; și trebuie arătat că $f(k+1)=k+1$. Egalitatea din enunț fiind adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, luând $n=k$ obținem $\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+...+\frac{1}{f(k)f(k+1)}=\frac{f(k)}{f(k+1)}\Rightarrow \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k-1)}+\frac{1}{k\cdot f(k+1)}=\frac{k}{f(k+1)}\Leftrightarrow \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\cdot f(k+1)}=\frac{k}{f(k+1)}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\cdot f(k+1)}=\frac{k}{f(k+1)}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{k}=\frac{1}{f(k+1)}\left(k-\frac{1}{k}\right)\Rightarrow f(k+1)=k+1$.

Test de evaluare **pag.63**

1. Fie $P(n):\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{2n+1},\ (\forall)n\in\mathbb{N}$.

Verificare: $P(1):\ \frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1^2}{2\cdot 1+1}$. Presupunem $P(n)$ adevărată și arătăm că în această ipoteză și $P(n+1)$ este adevărată.

$P(n+1):\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{2(n+1)^2-1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)^2}{2n+3}$. Avem: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{2(n+1)^2-1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n^2}{2n+1}+\frac{2(n+1)^2-1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(2n+1)(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)^2}{2n+3}$.

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(7k-3)(7k+4)}=\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{(7k-3)(7k+4)}=\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{7k-3}-\frac{1}{7k+4}\right)=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7n+4}\right)=\frac{n}{4(7n+4)}$.

3. a) Indicație: In pasul $P(n)\to P(n+1)$ se ține cont de $13^{n+1}+5=(13^n+5)\cdot 13-5\cdot 13+5=(13^n+5)\cdot 13-5\cdot 12$.

b) $13^n+5=13^n-1+6=12(13^{n-1}+13^{n-2}+\ldots+13+1)+6=\mathcal{M}6+6=\mathcal{M}6$.

4. Notăm $S(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}-\frac{13}{24}$. Verificarea: calcul direct. Dacă $S(n)>0$ avem $S(n+1)-S(n)=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0\Rightarrow S(n+1)>S(n)>0$.

Probleme de numărare **pag.64**

1. a) 15; b) 80; c) $|M|$, $M=A\cup B\cup C\cup D\cup E$ unde $A=\{x\mid x=\overline{ab12}\}$, $B=\{x\mid x=\overline{ab16}\}$, $C=\{x\mid x=\overline{ab20}\}$, $D=\{x\mid x=\overline{ab24}\}$, $E=\{x\mid x=\overline{ab28}\}\Rightarrow |M|=90+90+90+90+90=450$.

2. d) $|\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_3)\}|\cdot|(r_1,r_2)|\cdot|\{(n_1,n_2,n_3),(n_1,n_3,n_4),(n_1,n_2,n_4),(n_2,n_3,n_4)\}|$.

3. a) 7; b) 4; 6; 9.

5. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Rezultă (3+1)(2+1)(1+1)=24 divizori.

6. Numărul dat se mai poate scrie $2^9 \cdot 5^8 + 2^7 \cdot 5^7 = 2^7 \cdot 5^7(4 \cdot 5 + 1) = 2^7 \cdot 5^7 \cdot 3 \cdot 7$. Rezultă că acesta are $(7+1)(7+1)(1+1)(1+1) = 256$ divizori.

7. $(\alpha+1)(\beta+1) = 8,\ \alpha, \beta \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 3\end{cases}; \begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = 7\end{cases}; \begin{cases}\alpha = 3\\ \beta = 1\end{cases}; \begin{cases}\alpha = 7\\ \beta = 0\end{cases}$; și deci numerele căutate sunt $3^7; 2 \cdot 3^3; 2^3 \cdot 3, 2^7$.

8. $\tau(N) = 3$ deci $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 1 \cdot 3 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2$ și $N = p^2$.
$\tau(N) = 12 \Rightarrow (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow N = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3$.

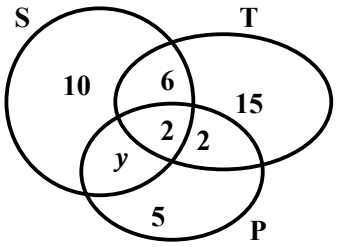
9. $\tau(N) = (a+1)(b+1)(c+1)$, $\tau(5N) = (a+1)(b+2)(c+1)$ și $\tau(7N) = (a+1)(b+1)(c+2)$ și condițiile devin: $(a+1)(c+1) = 8$, respectiv $(a+1)(b+1) = 12$, cu $a, b, c \neq 0$. Egalitatea $(a+1)(c+1) = 8$ are loc pentru $(a, c) \in \{(7,0), (1,3), (3,1), (0,7)\}$. Egalitatea $(a+1)(b+1) = 12$, are loc pentru $(a, b) \in \{(0,11), (1,5), (2,3), (3,2), (5,1)\}$ si deci sistemul $\begin{cases}(a+1)(c+1) = 8\\ (a+1)(b+1) = 12\end{cases}$ are soluțiile $(a, b, c) \in \{(0, 11, 7), (1, 5, 3), (3, 2, 1)\}$ și numerele căutate sunt $5^{11} \cdot 7^7;\ 2 \cdot 5^5 \cdot 7;\ 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

10. a) Divizorii lui $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ sunt produsele elementelor din perechile produsului cartezian $\{1, p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{\alpha_1}\} \times \{1, p_2, p_2^2, \ldots, p_2^{\alpha_2}\}$ a căror sumă este $(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) = \dfrac{1 - p_1^{\alpha_1+1}}{1 - p_1} \cdot \dfrac{1 - p_2^{\alpha_2+1}}{1 - p_2}$ etc.

b) $400 = 2^4 \cdot 5^2$ și suma divizorilor va fi $\dfrac{2^5 - 1}{2 - 1} + \dfrac{5^3 - 1}{5 - 1} = 62$.

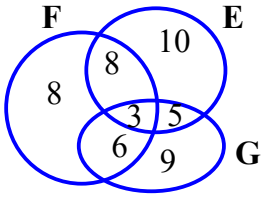
11.

Fie S, T, P cele trei mulțimi de sportivi. $|S \cup P \cup T| = 59$. Dar $|S| \neq 10, |T| \neq 15$ și $|P| \neq 5$. Dacă notăm $|S \cap T| = x + 2 = 8, |S \cap P| = y + 2$ și $|P \cap T| = z + 2 = 4$ vom avea $x = 6, z = 2$ și $59 = |S| + |T| + |P| - 8 - 4 - y - 2 + 2 \Leftrightarrow 59 = 18 + y + 25 + 9 + y - 8 - 4 - y \Rightarrow y = 19$.



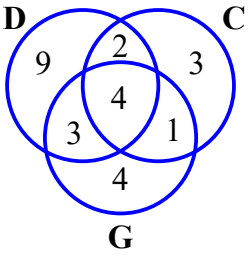
12.

Notăm cu F, E respectiv G mulțimea elevilor care vorbesc limba franceză, engleză respectiv germană. Din enunț avem: $|F| = 25, |E| = 26, |G| = 23$, $|F \cap G| = 9, |F \cap E| = 11, |E \cap G| = 8, |F \cap E \cap G| = 3$.
a) Numărul cerut este $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 49$.
b) 60-49=11; c) 26.



14. Numărul elevilor care au participat la două activități include şi pe cei care au participat la toate trei, astfel că trebuie să scădem acești 4 elevi.

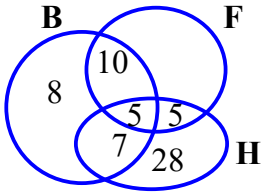
Drumeție şi ciclism (fără vizitare oraș): 6 - 4 = 2
Drumeție şi vizitare oraș (fără ciclism): 7 - 4 = 3
Ciclism şi vizitare oraș (fără drumeție): 5 - 4 = 1
Deoarece sunt cunoscute intersecțiile, putem determina ușor câți elevi au participat doar la o singură activitate:
Ciclism: 10 - (2 + 1 + 4) = 3
Vizitare oraș: 12 - (4 + 3 + 1) = 4
Drumeție: 18 - (4 + 2 + 3) = 9



Numărul total de elevi care au participat la excursie se obține prin adunarea numerelor din toate regiunile diagramei Venn-Euler: 9 + 3 + 4 + 2 + 3 + 1 + 4 = 26

15.

$|F \setminus B| = 5; |B \setminus H| = 18; |(B \cup H) \setminus F = 43;$
joacă doar fotbal 0; joacă doar handbal 28; Nu practică nici un sport 57.



16. $|A \cup B| - |C \cup B| = |C \cap B| - |A \cap B| \Leftrightarrow |A| + |B| - |A \cap B| - |C| - |B| + |C \cap B| = |C \cap B| - |A \cap B| \Leftrightarrow |A| = |B|$.

17. $|A \cup B| = |A \cap B| \Leftrightarrow |A| + |B| - |A \cap B| = |A \cap B| \Leftrightarrow |A| + |B| = 2|A \cap B|$. Dar $\begin{cases} 0 \le |A \cap B| \le |A| \\ 0 \le |A \cap B| \le |B| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 2|A \cap B| \le 2|A| \\ 0 \le 2|A \cap B| \le 2|B| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le |A| + |B| \le 2|A| \\ 0 \le |A| + |B| \le 2|B| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le |B| \le |A| \\ 0 \le |A| \le |B| \end{cases}$
$\Rightarrow |A| = |B|$.

18. a) Cum $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ și $(A \cup B) \cup (\overline{A \cup B}) = E$ și $A \cup B \cap (\overline{A \cup B}) = \varnothing \Rightarrow$ (1)

b) $|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}| = |\overline{A \cap B \cap C}| = |E| - |A \cup B \cup C| + \sum |A| - \sum |A \cap B|$.

19. a) Considerăm mulțimile $A = \{2k | \ 2k \in \mathbb{N}^*, k \le 100\}$ și $B = \{3k | \ k \in \mathbb{N}^*, 3k \le 100\}$. Numărul cerut este $|A \cap B = |\{6k | k \in \mathbb{N}^*, 6k \le 100\}| = \left[\frac{100}{6}\right] = 17$.

b) Numărul cerut este $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{3}\right] - \left[\frac{100}{6}\right] = 50 + 33 - 17 = 66$.

20. a) Considerăm mulțimile $A = \{k | k \vdots 3, k \in \mathbb{N}^*, 3k \le 1000\} = \{3, 6, 9, \ldots, 999\}$; $B = \{k | k \vdots 4, k \in \mathbb{N}^*, 4k \le 1000\}$; $C = \{k | k \vdots 5, k \in \mathbb{N}^*, 5k \le 1000\}$. Trebuie să determinăm $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Avem: $|A| = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333; |B| = \left[\frac{1000}{4}\right] = 250; \ |C| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200$.

Cum $A\cap B=\{k|\ k\vdots 12, k\in\mathbb{N}^*, 12k\leq 1000\}\Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{1000}{12}\right]=83$. Analog $|A\cap C|=\left[\frac{1000}{15}\right]=66; |B\cap C|=\left[\frac{1000}{20}\right]=50;\ A\cap B\cap C=\{k|k\vdots 60,\in\mathbb{N}^*, 60k\leq 1000\}$ și deci $|A\cap B\cap C|=\left[\frac{1000}{60}\right]=16\}$. In concluzie $|A\cup B\cup C|=333+250+200-83-50-66+16=600$.

b) $1000-|A\cup B\cup C|=1000-600=400$.

c) $|A\cup B|-|C|=|A|+|B|-|A\cap B|-|C|=333+250-83-200=297$.

21. a) Notăm $A=\{x\mid x\vdots 2\}$, $B=\{x\mid x\vdots 5\}$ și $C=\{x\mid x\vdots 5\}$ atunci $|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|E|-|A\cup B\cup C|=500-\sum|A|+\sum|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$.

Dar $\sum|A|=\left[\frac{500}{2}\right]+\left[\frac{500}{3}\right]+\left[\frac{500}{5}\right]=516,\ \sum|A\cap B|=\left[\frac{500}{6}\right]+\left[\frac{500}{10}\right]+\left[\frac{500}{15}\right]=166$ și $|A\cap B\cap C|=\left[\frac{500}{30}\right]=16$. In concluzie $|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=134$.

b) Notăm $D=\{x|x\vdots 7\}$. Numărul cerut este $|A\cup B\cup C|-|D|=366-71=295$.

22. a) Notăm $A=\{m|\ m\leq 72,\ m\vdots 2,\ m\in\mathbb{N}^*\}$ și $B=\{m|\ m\leq 72,\ m\vdots 3,\ m\in\mathbb{N}^*\}$, deci $A\cap B=\{m|\ m\leq 72,\ m\vdots 6,\ m\in\mathbb{N}^*\}$ de unde $|\overline{A}\cap\overline{B}|=|E|-|A\cup B|=|E|-|A|-|B|+|A\cap B|=24$

23. Pentru a dovedi că un număr $n\in N, n\geq 2$ este prim, este suficient să verificăm că el nu are divizori primi mai mici decât $\sqrt{n}$

24. d) Sunt atâtea submulțimi ale lui E câte coduri de k litere se pot forma cu 0 și 1, adică $2^{|E|}$, deci $2^{|E|}=|\mathcal{P}(E)|$.

25. a) Ținem seama de formula $2^{|E|}=|\mathcal{P}(E)|; |\mathcal{P}(A\cup B)|=128=2^7\Rightarrow|A\cup B|=7$; $|\mathcal{P}(B)|=8=2^3\Rightarrow|B|=3$. Din $A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow|A\cap B|\geq 1$ și din $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\Leftrightarrow 7=|A|+3-|A\cap B|\Rightarrow|A|=4+|A\cap B|\geq 4+1=5$.

b) $|\mathcal{P}(A)|=32=2^5\Rightarrow|A|=5; |\mathcal{P}(B)|=16=2^4\Rightarrow|B|=4$. Cum $A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow|A\cap B|\geq 1$, iar din $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=5+4-\underbrace{|A\cap B|}_{\geq 1}\leq 8$.

26. a) [A,A,A,A] [A, A, A, R], [A, A, R, A], [A, R, A, A], [R, A, A, A],[A, A, R, R], [A, R, A, R], [A, R, R, A], [R, A, A, R], [R, A, R, A], [R, R, A, A],[A, R, R, R], [R, A, R, R], [R, R, A, R], [R, R, R, A],[R,R,R,R].

b) În loc de 0→ *stema*, în loc de 1→ *banul* și dăm peste problema (24).

d) $|A|$ –numărul de cazuri în care banul apare de cel puțin două ori. Atunci $|A|=|E|-|A_0|-|A_1|$, unde $|A_0|$ –numărul de cazuri în care nu apare de loc banul, 1 caz, și $|A_1|$ – numărul de cazuri în care apare o singură dată banul, 5 cazuri, – cum $|E|=2^5\Rightarrow|A|=26$.

28. a) După (5.3) ar fi 26^3 mașini, dar literele trebuind să fie distincte folosim modelul (5.1) astfel: găsim toate cuplele de litere distincte (x,y) în număr de $26^2-26=26\cdot 25$; iar apoi din fiecare cuplu (x,y) obținem 24 de triplete (x,y,z), deci în total $26\cdot 25\cdot 24$.

29. a) după 5.3, sunt 10^3 triplete $\overline{xzy}$, din care eliminăm pe cele care încep cu 0, adică atâtea câte se pot forma din două cifre $\overline{yz}$, cu $y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 10^2; așadar rămân $10^3 - 10^2 = 900$.

30. Reformulăm întrebarea: Câte coduri de n cifre, $n \in \mathbb{N}^*$, se pot forma cu cele zece cifre $\overline{0, 9}$ în baza 10 ? Vezi 5.3

31. a) 4^7; b) 3^5 respectiv 4^2; c) Din numărul total de 3^5 posibilități de așezare a 5 cărți pe 3 rafturi, scădem numărul de situații în care există 1 raft sau două rafturi goale: $3^5 - 3 \cdot 2^5 - 1$.

34.

1	2	3	4	5	6
11	14	15	12	10	13
13	14	15	12	10	11
11	14	15	13	10	12
13	14	15	11	10	12

42. a) 25; b) 25; c) $p - 1$; d) n; e) 10; f) 61.

43. a) 1) n; 2) $n + 3$; 3) n. b) 1) $2n$; 2) n; 3) n.

44. a) $a_{134} = 401$; b) $a_{151} = -377$.

45. Observăm că numărul cerut este dat de exponentul lui 10 în acest produs. Cum $10 = 2 \cdot 5$ exponentul lui 10 este dat de exponentul lui 5 din descompunerea în factori a lui 300!, pentru că exponentul lui 2 din aceiași descompunere este mai mare decât cel a lui 5. Pentru aceasta folosim **(5.8)** și avem $\left[\frac{300}{5}\right] + \left[\frac{300}{5^2}\right] + \left[\frac{300}{5^3}\right] = 60 + 12 + 2 = 74$. Deci 300! se termină în 74 de zerouri.

46. $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Deoarece $3^2 > 2^3$ numărul cerut este dat de exponentul lui 3^2 în acest produs. Avem $\left[\frac{134}{3}\right] + \left[\frac{134}{9}\right] + \left[\frac{134}{27}\right] + \left[\frac{134}{81}\right] = 63$. Cum $3^{63} = (3^2)^{31}$, rezultă că exponentul lui 72 în 134! este 31.

47. $N = \frac{60!}{30!}$. Exponentul lui 5 în 60! este 14, iar în 30! este 7 Deci numărul se termină în 14-7=7 zerouri.

48. $N = \frac{50!}{21^{30}} = \frac{3^{22} \cdot 7^8 \cdot k}{(3 \cdot 7)^{30}} = \frac{k}{3^8 \cdot 7^{22}}$.

50. Fie $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Considerăm sumele $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, $k = \overline{1, n}$, în total n numere. Dacă unul din numerele S_k se divide cu n, atunci submulțimea căutată este $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Dacă nici unul din numerele $S_k, k = \overline{1, n}$ nu se divide la n, atunci resturile lor la împărțirea cu n vor fi $1, 2, 3, \ldots, n - 1$. Cum sunt n numere S_k, cel puțin două vor da același rest la împărțirea cu n. Fie S_i, S_j, $1 \leq i, j \leq n$, $i < j$ cele două numere. Cum $S_j - S_i$ se divide la n, submulțimea căutată va fi $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j\}$.

51. Fie ca in primele 48 cutii se afla un număr diferit de mere (1,2,...,48) și în următoarele 48 de cutii la fel. Astfel au rămas 100 - 2·48 = 4 cutii, in care trebuie de plasat mere de la 1 la 48.

52. Este suficient să arătăm că diferența a două din cele 12 numere se divide la 11. Numerele naturale de două cifre le putem gândi împărțite în atâtea clase câte resturi se obțin la împărțirea cu 11, adică 11 clase $C_r = \{x | x = 11k + r\}, r = \overline{0, 10}$. Cum sunt 12 numere și 11 clase, vor exista cel puțin două din aceiași clasă.

53. Puterea a patra a oricărui număr natural se termină cu una din cifrele 0,1,5,6. Fiindcă avem 5 numere, conform principiului cutiei printre ele există cel puțin două care se termină cu aceiași cifră, deci diferența se divide cu zece.

54. Se împarte dreptunghiul într-o rețea de pătrate cu latura 1. Vom obține astfel 12 pătrate. Conform principiului cutiei din cele 13 puncte cel puțin 2 din ele se află în interiorul sau pe laturile aceluiași pătrat și distanța dintre ele este mai mică decât diagonala pătratului.

55. Împărțim fiecare latură a triunghiului în 4 segmente cu lungimea $\frac{1}{4}$ Prin punctele de diviziune ducem paralele la laturile triunghiului și obținem $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ triunghiuri echilaterale cu latura de lungime $\frac{1}{4}$. Din cele 17 puncte din triunghiul inițial, cel puțin 2 se află în interiorul (sau pe laturi) unui triunghi cu latura $\frac{1}{4} = 0,25$ și deci distanța dintre acestea va fi cel mult $0,25$.

58. Se consideră un punct M în planul poligonului. Numărul diagonalelor poligonului convex cu n laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$, adică în cazul nostru $\frac{21 \cdot 18}{2} = 189$ și se formează $189 \cdot 2 = 378$ unghiuri. Cum suma unghiurilor în jurul unui punct este de 360^0, cel puțin unul din cele 378 de unghiuri are măsura mai mică de 1^0.

Test de evaluare **pag.72**

1. 100.

2. 90.

3. $5 \cdot 10^3 = 5000$.

4. $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

5. 8 elevi.

6. $\left[\frac{200}{5}\right] + \left[\frac{200}{5^2}\right] + \left[\frac{200}{5^3}\right] = 40 + 8 + 1 = 49$ zerouri.

7. Considerăm mulțimile $A = \{k | k \vdots 2, k \in \mathbb{N}^*, 2k \leq 1000\} = \{2, 4, 6, \ldots, 998, 1000\}$; $B = \{k | k \vdots 3, k \in \mathbb{N}^*, 3k \leq 1000\}$; $C = \{k | k \vdots 5, k \in \mathbb{N}^*, 5k \leq 1000\}$. Trebuie să determinăm $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$

8. $21 = 3 \cdot 7$. Cum $7 > 3 \Rightarrow \left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{100}{7^2}\right] + \left[\frac{100}{7^3}\right] = 14 + 2 + 0 = 16.$

Funcţii definite pe mulţimea numerelor naturale pag.73

2. $(1,6);\ (2,2);\ (3,2);\ (4,1).$

4. $a_1 = \frac{1}{2}; a_4 = \frac{7}{5}; a_{10} = \frac{19}{11}; a_{100} = \frac{199}{101}.$

5. Prin inducţie se arată că $a_n = f(n) = \frac{1}{n+1}.$

6. a) $f(2) = 4,\ f(3) = 8,\ f(4) = 14.$

b) $f(i) - f(i-1) = 2i - 2, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=2}^{n}(f(i) - f(i-1)) = \sum_{i=2}^{n}(2i-2) \Leftrightarrow f(n) - f(1) = n^2 - n \Rightarrow f(n) = n^2 - n + 2.$

c) $f(n) = n(n-1) + 2$ şi cum $n(n-1)$ este multiplu de 2.

10. a) 20; b) 29; c) $\frac{25}{6}$; d) 666; e) 144; f) 66; g) 500 000; h) 67.

11. a) $a_n = \frac{1}{n}$; b) $a_n = n^2$; c) $a_n = \frac{4n+1}{8n}$; d) $a_n = 2^n - 1.$

12. a) 2,9,16,23,30; b) $a_n = 7n - 5.$

13. $c_n = 4 - 3n.$

14. b) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$

15. $a_n = 2^n.$

16. $a_n = \frac{2}{3^n}.$

17. a) $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ şi prin inducţie $a_n = 2$. Analog b)

21. a) $a_n \in (0,1)$; b) $a_n \in (0,1)$; c) $a_n \in (0,1)$; d) $a_n \in (0,1]$ e) $a_n = \frac{6}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-3}} > \frac{6}{\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+1}} = a_{n+1} \Rightarrow 0 < a_n < a_2$; f) $a - 1 < a_n < a.$

26. a) $a_1 = 12$; b) $(a_{n+1} - a_n)(a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1})^2 \geq 0$; c) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{3^2}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \ldots = \frac{1}{3^{n-1}}(a_2 - a_1)$. Dar $a_2 - a_1 = \frac{2}{3}(12 - a_1) = \begin{cases} > 0 & pt.a_1 < 12 \\ < 0 & pt.a_1 > 12 \end{cases}.$

27. a) Inducţie după n; b) $a_{n+1} - a_n = \sqrt{6 + a_n} - a_n = \frac{6 + a_n - a_n^2}{\sqrt{6+a_n} + a_n} = \frac{(3 + a_n)(2 - a_n)}{\sqrt{6+a_n} + a_n} > 0.$

28. a) $x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n \Leftrightarrow x_{n+2}-x_{n+1}=3(x_{n+1}-x_n)=3^2(x_n-x_{n-1})=\ldots=3^n(x_2-x_1)=3^n\cdot 2 \Rightarrow x_n-x_{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$ și $\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})=3^{n-1}-1 \Leftrightarrow x_n-x_1=3^{n-1}-1 \Rightarrow x_n=-2+3^{n-1}$ și $\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{2}(3^n-4n-1)$.

Observație: Se poate demonstra și prin inducție completă că $x_n=-2+3^{n-1}$

b) Fie d un divizor comun a doi termeni consecutivi $d=(3^{n-1}-2,3^n-2) \Rightarrow d|(3^n-2)-3(3^{n-1}-2))=4 \Rightarrow d\in\{1,2,4\}$. Dacă $d=2 \Rightarrow 3^n-2=2k \Leftrightarrow 3^n=2k+2$ contradicție. Analog, dacă $d=4 \Rightarrow 3^n=4K+2$ fals. Deci $d=1$.

Progresii aritmetice **pag.77**

1. a) $a_{10}=59$; b) $a_{10}=-23$; c) $a_{10}=31$; d) $a_{10}=\frac{46}{3}$.

3. 2005.

5. a) $a_{20}=34$; b) $a_{20}=-78$; c) $a_{20}=\frac{3828}{19}$; d) $a_{20}=\frac{595}{3}$

6. a) $S_{10}=60$; b) $S_{30}=2130$; c) $S_{20}=550$; d) $S_9=324$.

7. a) $b_1=-60,\ r=24$; b) $b_1=2,\ r=5$; c) $b_1=\frac{28}{9},\ r=-\frac{13}{9}$; d) $b_1=2,\ r=-1$; e) $b_1=\frac{1}{2},\ r=-\frac{1}{2}$.

8. a) $a_1=1,\ r=2$; b) $a_1=2,\ r=3$; c) $a_1=2,\ r=-3$; d) $a_1=-76,\ r=6$.

9. 13 cm.

10. $\{-16,-12,-8,-4\}$ și $\{4,8,12,16\}$.

11. $r=-5,\ n=81$.

12. $a_1=2,\ r=1,\ S_{110}=6215$.

13. $a_1=100,\ r=-1,\ S_{210}=-945$.

14. $a_1=7,\ r=2,\ a_{10}=25$.

15. a) $b_1=-2,\ r=1$; b) $b_1=-5,\ r=2$ sau $b_1=-3,\ r=2$; c) $b_1=5,\ r=2$ sau $b_1=23,\ r=-2$.

17. a) $x=3$; b) $x=1$; c) $x\in\{0;3\}$.

19. a) $x\in\left\{-\frac{27}{2},-\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right\}$; b) $x\in\left\{-10,-\frac{22}{7},-\frac{2}{5}\right\}$; c) $x\in\{-3,-2,0,1,3,4\}$.

20. $4, -2, -8$.

21. $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)r) = \dfrac{(2a_1 + (n-1)\,r)\,n}{2}$,
$S_{2k-1} = \sum_{i=1}^{2k-1} a_i = (a_1 + r(k-1))\,(2k-1)$ și $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{S_{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + r(k-1)) = S_n$.

22. $\begin{cases} a_1 + 4r = 18 \\ 4 \cdot \dfrac{(2a_1 + (n-1)\,r)\,n}{2} = \dfrac{(2a_1 + (2n-1)\,r)\,2n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 4. \end{cases}$

23. $a_n = \dfrac{3n-1}{6} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{3}, a_2 = \dfrac{5}{6} \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}, S_n = \dfrac{n(3n+1)}{12}$.

24. a) $a_n = S_n - S_{n-1} = 6n + 3, a_1 = 3, a_2 = 9, r = a_2 - a_1 = 6$; $b) a_n = 2n - 1,\ r = 2$;
c) $a_n = 3 - 2n,\ r = -2$; d) $a_n = 14n - 12,\ r = 14$; e) $a_n = \dfrac{3n-4}{2},\ r = \dfrac{3}{2}$; f) $a_n = \dfrac{5n-2}{2},\ r = \dfrac{5}{2}$.

26. Ipoteza: $2b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2b^2 = 0$.

a) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{c}{a+b} - 2\dfrac{b}{c+a} = \dfrac{(a+b+c)\left(a^2 - 2b^2 + c^2\right)}{(a+c)\,(b+c)\,(a+b)} = 0.$

b) $\dfrac{2(b^2+c^2) - a^2}{4} + \dfrac{2(b^2+a^2) - c^2}{4} - 2\dfrac{2(a^2+c^2) - b}{4} = \dfrac{3}{4}(a^2 + c^2 - 2b^2) = 0$

27. $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{2}{a+c} = \dfrac{a^2 - 2b^2 + c^2}{(a+c)\,(b+c)\,(a+b)}$.

28. $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} - \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} = \frac{a-2b+c}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$.

34. Se aplică **P4** $\Rightarrow S_{13} = 65$.

36. $a_k = S_k - S_{k-1} = 2k + 1$ și $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot S_k = \sum_{k=1}^{n} (2k^3 + 5k^2 + 2k) = \dfrac{n\,(n+1)\left(3n^2 + 13n + 11\right)}{6}$.

37. Fie a_m și b_n doi termeni comuni a celor două progresii. Avem $a_m = 2 + (m-1) \cdot 3 = 3m - 1$ și $b_p = 7 + (p-1) \cdot 5 = 5p + 2$. Din egalitatea $a_m = a_p$ deducem $m - 1 = \dfrac{5}{3}p$. Cum $m, p \in \mathbb{N}^*$ și numerele 3 și 5 sunt prime între ele, rezultă $p = 3k$ și $m = 5k+1$, adică termenii $a_6, a_{11}, a_{16}, ..., a_{5k+1}$ din prima progresie coincid cu termenii $c_3, c_6, c_9, ..., c_{3k}$, din a doua progresie, adică 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152.

38. Se folosește **P4** și avem $4(a_1 + a_n) = 144 \Rightarrow a_1 + a_n = 36,\ S_n = 216 \Rightarrow n = 12$ etc.

40. a) $x = 39$; b) $x = 77$; c) $x = -896$; d) $n = 15 \Rightarrow x = 1$; e) $n = 100 \Rightarrow x = -50$.

42. S=12+18+24+…+96=810.

43. Fie $a_{k+1}-a_k=b_k, k\geq 1$, unde b_k este termenul general al progresiei aritmetice cu $b_1=a_2-a_1=3, b_2=a_3-a_2=5$ și $r=2$. Deci $b_k=3+(k-1)2=2k+1$. Pe de altă parte $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_k \Leftrightarrow a_n-a_1=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(2k+1) \Leftrightarrow a_n-2=n^2-1\Rightarrow a_n=n^2+1.$‘

44. $S_m=\dfrac{(6+(m-1)r)m}{2}$, $S_n=\dfrac{(6+(n-1)r)n}{2}$. $\dfrac{S_m}{m^2}=\dfrac{S_n}{n^2}\Leftrightarrow (6+(m-1)r)n=6+(n-1)r)m$, $m\neq n\Rightarrow r=6$.

45. Dacă $a_n=a_1+(n-1)r\Rightarrow r=2a_1$ și $\dfrac{a_m}{a_n}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$.

46. Fie $a_1=a-3x, a_2=a-x, a_3=a+x$ și $a_4=a+3x$. Din $a_1+a_2+a_3+a_4=10\Rightarrow a=\dfrac{5}{2}$. $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{25}{12}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\frac{5}{2}-3\cdot r}+\dfrac{1}{\frac{5}{2}-r}+\dfrac{1}{\frac{5}{2}+r}+\dfrac{1}{\frac{5}{2}+3\cdot r}-\dfrac{25}{12}=0\Leftrightarrow$ $25\left(36r^2-145\right)(2r+1)(2r-1)=0\Rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=\dfrac{\sqrt{145}}{6}, x_4=-\dfrac{\sqrt{145}}{6}$. Cum $a_n\in\mathbb{N}$ convine $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a_1=1, r=1\Rightarrow a_{10}=10$.

47. x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației $ax^2+bc+c=0\Longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$.

$\div a, x_1, b, x_2, c\Rightarrow a+b=2x_1, x_1+x_2=2b, b+c=2x_2$ Rezolvând sistemul obținem $\left\{a=-\frac{1}{2}, x_1=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}-3\right), b=\frac{1}{2}\left(2\left(-\sqrt{5}-3\right)+1\right), x_2=\frac{3}{2}\left(-\sqrt{5}-3\right)+1,\right.$
$\left.c=\frac{1}{2}\left(4\left(-\sqrt{5}-3\right)+3\right)\right\}, \left\{a=-\frac{1}{2}, x_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-3\right), b=\frac{1}{2}\left(2\left(\sqrt{5}-3\right)+1\right),\right.$
$\left.x_2=\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-3\right)+1, c=\frac{1}{2}\left(4\left(\sqrt{5}-3\right)+3\right)\right\}$.

49. a) $\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_k^2}-\dfrac{1}{a_{k+1}^2}\right)=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}+a_k)}{a_k^2a_{k+1}^2}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{r\cdot(a_{k+1}+a_k)}{a_k^2a_{k+1}^26}=\dfrac{a_k+a_{k+1}}{a_k^2\cdot a_{k+1}^2}$.

b) $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}^2\cdot a_k^2}=\dfrac{1}{r}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{a_{k-1}^2}-\dfrac{1}{a_k^2}\right)=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1^2}-\dfrac{1}{a_n^2}\right)$ etc.

c) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{(n-1)^2\cdot n^2}=\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{(k-1)^2}-\dfrac{1}{k^2}\right)=1-\dfrac{1}{n^2}$.

50. Ipoteză: Numerele sunt în progresie aritmetică „$\Rightarrow$” $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k-1}}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}}}{a_k-a_{k-1}}=$
$\dfrac{1}{r}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})=\dfrac{1}{r}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1})=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{a_k-a_1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_1}}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{(n-1)r}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_1}}=\dfrac{(n-1)}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_1}}$.
„$\Leftarrow$” Ipoteză: Are loc relația (1) $\forall\, n\in\mathbb{N}, n\geq 3$.
$n=3\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_2}}=\dfrac{2}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_1}}\Leftrightarrow a_1+a_3=2a_2$, și deci cele trei numere sunt în progresie aritmetică. Demonstrăm prin inducție că toate numerele sunt în progresie aritmetică. Facem ipoteza că $a_k=a_1+(k-1)r$ și demonstrăm că $a_{k+1}=a_1+kr$. In relația (1)

punem $n=k+1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{k}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}}} \Leftrightarrow$ $\frac{k-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_k}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{k}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}}}$. Folosind ipotezei inducției $a_k=a_1+(k-1)r \Rightarrow$ $\frac{k-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_1+(k-1)r}}+\frac{1}{\sqrt{a_1+(k-1)r}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{k}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}}} \Leftrightarrow$ $\frac{(k-1)\left(rk+a_1-a_{k+1}\right)}{\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_1+(k-1)r}\right)\left(\sqrt{a_1+(k-1)r}+\sqrt{a_{k+1}}\right)\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}}\right)}=0$ de unde $a_{k+1}=a_1+kr$.

Metoda II. În relația (1) înlocuim pe n cu $n-1$ și scădem membru cu membru cele două relații. Rezultă $\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}-\frac{n-2}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n-1}}} \Leftrightarrow \frac{(1-n)a_{n-1}+(n-2)a_n+a_1}{\left(\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}\right)\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}\right)\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n-1}}\right)}=$ 0 de unde $a_1=(2-n)a_n+(n-1)a_{n-1}$. Înlocuind în această relație pe n cu $n+1$ avem $a_1=(1-n)a_{n+1}+na_n$ și deci $(2-n)a_n+(n-1)a_{n-1}=(1-n)a_{n+1}+na_n \Leftrightarrow (2a_n-a_{n-1}-a_{n+1})(n-1)$ de unde $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

51. $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(2a_1+(n-1)r)n}{2}$ și $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{k=1}^{n}\left(a_1^2+2a_1(k-1)r+(k-1)^2r^2\right)=na_1^2+2a_1r\sum_{k=1}^{n}(k-1)+r^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=na_1^2+2a_1r\frac{n(n-1)}{2}+r^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Deci avem de rezolvat sistemul $\begin{cases}\frac{(2a_1+(n-1)r)n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}\\ na_1^2+2a_1r\frac{n(n-1)}{2}+r^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{n(6n^2-3n-1)}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}2a_1+(n-1)r=3n-1\\ 6a_1^2+6a_1r(n-1)+r^2(n-1)(2n-1)=18n^2-9n-3\end{cases}$. Din prima relație obținem $r=\frac{3n-1-2a_1}{n-1}$ și înlocuind r în a doua relație obținem $\frac{2(a_1-1)(n+1)(3n-a_1-2)}{n-1}=0$ de unde $a_1=1$ și $r=3$.

52. $S=(a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5+\ \ldots\ +a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3})+\left(\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4a_5}+\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}\right)$ $=S_1+S_2$, unde S_1 este suma din prima paranteză iar S_2 suma din cea de-a doua paranteză.

Pentru calculul lui S_1 se consideră funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $f(n)=a_{n-1}a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$ Avem $f(n+1)-f(n)=a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4}-a_{n-1}a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}(a_{n+4}-a_{n-1})=a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdot 5r \Rightarrow a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=\frac{f(n+1)-f(n)}{5r}$ (1)

Scriind relația (1) pentru $n=1,2,\ldots,n$ și însumând, se obține:

$S_1=\frac{f(n+1)-f(n)}{5r}=\frac{a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4}-a_0a_1a_2a_3a_4}{5r}$

Pentru calculul lui S_2 se consideră funcția $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $g(n)=\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$.

Avem $g(n+1)-g(n)=\frac{1}{a_{n+2}a_{n+3}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+1}-a_{n+3}}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}=\frac{-2r}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}=\frac{g(n+1)-g(n)}{-2r}$. (2)

Scriind relația (2) pentru $n = 1, 2, \ldots, n$ și însumând, se obține:

$S_2 = -\frac{1}{2r}[g(n+1) - g(1)] = \frac{1}{2r}[g(1) - g(n+1)] = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_2a_3} - \frac{1}{a_{n+2}a_{n+3}}\right)$

În final $S = \frac{1}{r}\left(\frac{a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4} - a_0a_1a_2a_3a_4}{5} + \frac{1}{2a_2a_3} - \frac{1}{2a_{n+2}a_{n+3}}\right)$

53. Metoda I $\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1)a_k - \sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k = \left((n+2)^2a_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right) - \left((n+1)^2a_n - \frac{1}{2}n(n+1)\right) \Leftrightarrow (2n+3)a_{n+1} = (n+2)^2a_{n+1} - (n+1)a_n - n - 1 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$ de unde $b_n = n+1$ progresie aritmetică cu rația 1.

Metoda II. $3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \ldots + (2n+1)a_n = (n+1)^2a_n - \frac{1}{2}n(n+1),\ \forall n \geq 1$

Pentru $n = 1 \Rightarrow 3a_1 = 4a_1 - 1 \Rightarrow a_1 = 1$

Pentru $n = 2 \Rightarrow 3 + 5a_2 = 9a_2 - 3 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

Pentru $n = 3 \Rightarrow 3 + \frac{15}{2} + 7a_3 = 16a_3 - 6 \Rightarrow a_3 = \frac{11}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ și de demonstrează prin inducție că $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

54. Fie $a_1 = a$. Pentru $n = 2$ obținem $\frac{a + 2a_2}{a + a_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow a_2 = 2a$. Pentru $n = 3 \Rightarrow \frac{a + 4a + 3a_3}{a + 2a + a_3} = \frac{7}{3} \Rightarrow a_3 = 3a$ și prin inducție se arată că $a_n = n \cdot a$.

55. a-k-a progresie are $a_1 = k$ și $r = 2k-1$ și $S_k = \frac{(2k + (n-1)(2k-1))n}{2}$. Avem $\sum_{k=1}^{p} S_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{(2k + (n-1)(2k-1))n}{2} = \frac{np}{2}(n+1)$.

56. $\begin{matrix} 3(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = nx_{n+1} \\ 3(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) = (n-1)x_n \end{matrix}$. Scăzând membru cu membru cele două relații obținem $(n+2)x_n = nx_{n+1} \Leftrightarrow (n+2)ny_n = n(n+1)y_{n+1} \Leftrightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+2}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În ultima relație dăm lui n valori de la 1 la k și înmulțind membru cu membru relațiile obținute se obține $y_{k+1} = \frac{k+2}{2}y_1$ și $y_{k+1} - y_k = \frac{1}{2}y_1$, ce probează că y_n este progresie aritmetică.

57. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k} \Leftrightarrow \frac{((n-1)r + 2a_1)n}{2} = \frac{n(3nr - r + 2a_1)}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{r(n+1)}{2} \Rightarrow S_n = n^2r,\ S_{3n} = 6n^2r$ și deci $\frac{S_{3n}}{S_n} = 6$.

Progresia geometrică pag.84

1. a) $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$; b) $b_n = \frac{1}{2^{n-4}}$; c) $b_n = (\sqrt{3})^n$; d) $b_n = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}$; e) $b_n = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; f) $b_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}$.

3. a) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$; b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$; c) $3, 6, 12$; d) $27, 9, 3$.

4. a) $S_5 = 242$; b) $S_4 = \frac{45}{16}$; c) $S_7 = \frac{6885}{8}$; d) $S_{50} = 0$; e) $S_8 = \frac{255}{8}$; f) $S_5 = \frac{61}{9}$.

5. a) $S_8 = 6560$; b) $S - 12 = 8$; c) $S_5 = 14762$; d) $S_6 = \frac{15624}{25}$.

6. a) $\{q = 1/3, a_1 = -243\}, \{q = 3, a_1 = 3\}$; b) $\{a_1 = 3, q = 2\}$; c) $\{a_1 = 12, q = -1\}, \{a_1 = 3, q = 2\}$; d) $\left\{q = \frac{1}{2}, a_1 = 8\right\}, \left\{q = \frac{1}{2}, a = -8\right\}$.

7. a) $\{q = 2, a = 1\}$ b) $\{q = -1, a_1 = 4\}, \{q = 2, a_1 = 1\}$ c) $\left\{q = \frac{1}{2}, a_1 = 4\right\}$; d) $\left\{q = \frac{1}{3}, a_1 = 9\right\}, \left\{q = \frac{1}{3}, a_1 = -9\right\}$;

8. 30 minute.

9. $S_n = \frac{a^2}{2^{n-1}} \Rightarrow 1024 \cdot \frac{a^2}{2^{n-1}} \geq a^2 \Rightarrow 2^{10} < 2^{n-1} \Rightarrow \ldots n = 11$.

10. a) $\div\div 54, 18, 6, 2$ sau $\div\div 27, -9, 3, -1$; b) $\div\div 2, 6, 18, 54$ sau $\div\div 54, 18, 6, 2$.

11. Se rezolvă sistemul $\begin{cases} a_1(1+q+q^2+q^3) = 5 \\ a_1q^4(1+q+q^2+q^3) = 80 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -1, q = -2$ sau $a_1 = \frac{1}{3}, q = 2$.

12. $a_1 = 4, q = \frac{1}{2}$ sau $a_1 = 12, q = -\frac{1}{2}$.

13. $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{7}{8} \\ a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{7}{8} \\ a_1q^{n-1} + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-3} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = \frac{7}{8} \\ a_1q^{n-3}(1+q+q^2) = 7 \end{cases}$.
Împărțind membru cu membru ultimele două relații obținem $q^{n-3} = 8 \Rightarrow q^{n-2} = 16, q^{n-1} = 32$ și deci $a_1(8 + 16 + 32) = 7$ de unde $a_1 = \frac{1}{8}$ și $\frac{1}{8}(1 + q + q^2) = \frac{7}{8} \Rightarrow q \in \{-3, 2\}$, și convine $q = 2$. Pentru $a_1 = \frac{1}{8}$ și $q = 2$ avem $2 \cdot \sum_{k=1}^{6} a_k = 2 \cdot \frac{63}{8} = \frac{63}{4} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{a_k}$. Analog $2^n \sum_{k=1}^{6} a_k = 1 + 8^n + 4^n + 2^n + 2^{-n} + 4^{-n} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{a_k}$.

15. $a_1 = 18, q = \frac{1}{3}$ sau $a_1 = \frac{234}{7}, q = -\frac{1}{3}$.

18. Presupunem prin absurd, că 9,10,11 sunt termenii unei progresii geometrice cu primul termen b_1 și rația q, adică există $k < m < n$, $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $9 = b_1q^{k-1}$, $10 = b_1q^{m-1}$, $11 = b_1q^{n-1}$.
Avem $\begin{cases} \frac{9}{10} = q^{k-m} \\ \frac{11}{10} = q^{n-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-m} = q^{(k-m)(n-m)} \\ \left(\frac{11}{10}\right)^{k-n} = q^{(n-m)(k-n)} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-m} = \left(\frac{11}{10}\right)^{k-n} \Leftrightarrow \frac{9^{n-m}}{11^{k-n}} = 10^{m-k}$ egalitate imposibilă pentru $k \neq m \neq n$.

19. Numerele $x+1, x+2, x+5$ trebuie să fie în progresie geometrică și deci se aplică proprietatea **P8.b.** $\Longrightarrow x \in \left\{-\frac{23}{7}, -\frac{9}{5}, -\frac{1}{2}\right\}$.

21. $b = aq; c = aq^2, d = aq^3 \Rightarrow (a-c)^2+(b-c)^2+(b-c)^2+(b-d^2) = a^2(q-1)^2\left(q^2+q+1\right)^2 = (a-d)^2$.

22. a) $a_n = S_n - S_{n-1} = 4\cdot 3^{n-1}, q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$; b) $a_n = 2^n,\ q = 2$; c) $a_n = \frac{7}{2^n},\ q = \frac{1}{2}$.

26. P=$a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_n = a_1\cdot(a_1q)\cdot(a_1q^2)\cdot\ldots\cdot(a_1q^{n-1}) = a_1^n q^{1+2+\ldots+(n-1)} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (1)

$S = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ (2) și $T = \frac{1}{a_1}(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}) = \frac{q^n-1}{a_1(q-1)q^{n-1}}$ (3)

Din (2) și (3)$\Rightarrow \frac{S}{T} = \frac{a_1\frac{1-q^n}{1-q}}{\frac{q^n-1}{a_1(q-1)q^{n-1}}} = a_1^2q^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a_1^2q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = P$.

29. Avem A= $\underbrace{111\ldots1}_{2n\ cifre} - \underbrace{222\ldots2}_{n\ cifre} = \frac{1}{9}\cdot\underbrace{999\ldots9}_{2n\ cifre} - \frac{2}{9}\cdot\underbrace{999\ldots9}_{n\ cifre} = \frac{1}{9}(10^{2n}-1)+\frac{2}{9}(10^n-1) = \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2$

și $(10^n-1)\vdots 3$.

30. A=$\underbrace{444\ldots4}_{n\ cifre}\underbrace{888\ldots8}_{n-1\ cifre}9 = 4(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10^n)+8(10^{n-1}+10^{n-1}+\ldots+10)+9 = \left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$.

32. a) $S_1 = \frac{2097151}{1048576}$; b) $S_2 = \frac{699051}{1048576}$; c) $S_3 = 33996147910$; d) $S_4 = -17651846030$; e) $S_5 = \frac{1048565}{262144}$; f) $\frac{116505}{262144}$.

33. a) $S_n = \frac{1-\left(x^2\right)^n}{(1-x^2)^2} - \frac{n\left(x^2\right)^n}{1-x^2}$; b) $S_n = x\left(\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}\right)$; c) $S_n = a_1\left(\frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}\right)$

34. $S_1 = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}; S_2 = \frac{q^{1-n}(q^n-1)}{b_1(q-1)}, P = b^n q^{\frac{n-1)n}{2}}), \frac{S_1}{S_2} = b^2\cdot q^{n-1} \Rightarrow P = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n}$

35. $2(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1}) = a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{2n} \Rightarrow q = 2$.

37. Din ipoteză $q > 1$ și $b_1q^{11} - b_1(q^6-q^5) \Leftrightarrow b_1(q-1)(q^{10}+q^9+q^8+\ldots+q+1) > b_1q^5(q-1)$. Cum $b_1 > 0, q-1 > 0$ prin împărțirea relației precedente cu $b_1(q-1)$ inegalitatea de demonstrat devine $q^{10}+q^9+\ldots+q+1 > 11q^5$, adevărată conform inegalității mediilor $\left(\frac{q^{10}+q^9+\ldots+q+1}{11} > \sqrt[11]{q^{10+9+\ldots+q+1}}\right)$.

38. $(b_1+b_2+\ldots+b_{2014})(b_1+b_{2014}) \geq 4028b_1b_{2014} \Leftrightarrow b_1^2(1+q+q^2+\ldots+q^{2013})(1+q^{2013}) \geq 4028b_1^2q^{2013}$. După împărțirea cu b_1^2 inegalitatea devine $(1+q+q^2+\ldots+q^{2013})(1+q^{2013}) \geq 4028q^{2013}$. Din inegalitatea mediilor avem $1+q^{2013} \geq 2\sqrt{q^{20013}}$ și $1+q+q^2+\ldots+q^{2013} \geq 2014 \cdot \sqrt[2014]{1 \cdot q \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{2013}} = 2014\sqrt[2014]{q^{\frac{2014 \cdot 2013}{2}}} = 2014\sqrt{q^{2013}}$. Înmulțind membru cu membru ultimele două inegalități obținem ceea ce trebuia demonstrat.

39. Din ipoteză $q>1$. $b_{2n+2}-b_1 \geq (2n+1)(b_{n+2}-b_{n+1}) \Leftrightarrow b_1q^{2n+1}-b_1 \geq (2n+1)(b_1q^{n+1}-b_1q^n) \Leftrightarrow b_1(q^{2n+1}-1) \geq (2n+1)b_1q^n(q-1) \Leftrightarrow (q-1)(q^{2n}+q^{2n-1}+\ldots+q+1) \geq (2n+1)q^n(q-1) \Leftrightarrow q^{2n}+q^{2n-1}+\ldots+q+1 \geq (2n+1)q^n$. Aplicând inegalitatea mediilor avem $q^{2n}+q^{2n-1}+\ldots+q+1 \geq \sqrt[2n+1]{q^{2n} \cdot q^{2n-1} \cdot q^{2n-2} \cdot \ldots \cdot q \cdot 1} = (2n+1)\sqrt[2n+1]{q^{\frac{(2n+1)2n}{2}}} = (2n+1)q^n$.

Probleme combinate **pag. 91**

1. Fie $\div a,b,c$ progresia aritmetică. Din enunț și proprietățile celor două progresii obținem sistemul $\begin{cases} a+b+c=12 \\ a+c=2b \\ (b+2)^2=(a+1)(c+11) \end{cases}$ cu soluția $(a,b,c) \in \{(17,4,-9),(1,4,7)\}$

2. $a=1,b=2,c=3$ sau $a=1,b=-2,c=-5$.

3. $(a,b,c) \in \left\{(4,8,16),\left(\frac{4}{25},-\frac{16}{25},\frac{64}{25}\right)\right\}$.

4. $\div\div 6,18,54$.

5. $\div\div 1,3,9$.

6. $\div 4,10,16$ și $\div\div 4,8,18$.

7. $\div 2,5,8$ și $\div\div 2,-4,8$ sau $\div 2,5,8$ și $\div\div 2,4,8$.

8. $\div 2,10,18$ și $\div\div 2,6,18$.

9. $\div 2,4,6$ și $\div\div 2,6,18$ sau $\div\frac{1}{2},-\frac{7}{2},-\frac{15}{2}$ și $\div\div \frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{9}{2}$.

10. $a_1=1,a_2=5,a_3=9,a_4=13$.

11. 4,20,100 sau $\frac{4}{5},\frac{52}{9},\frac{676}{9}$.

12. Fie $r=$ rația progresiei aritmetice, $q=$ rația progresiei geometrice $\Rightarrow b=a+r,c=a+2r,d=a+3r$.

$b-1=(a+1)q, c-1=(a+1)q^2, d+3=(a+1)q^3 \Rightarrow \begin{cases} a+r-1=(a+1)q \\ a+2r-1=(a+1)q^2 \\ a+3r+3=(a+1)q^3 \end{cases}$ Din ecuațiile 1 si 2 ale sistemului $\Rightarrow r=q(q-1)(a+1)$. Din ecuațiile 2 si 3 $\Rightarrow r+4=(a+1)q^2(q-1)=rq \Rightarrow q=\dfrac{r+4}{r}$.

Se înlocuiesc în sistem $r,q \Rightarrow r=4 \Rightarrow q=2 \Rightarrow a=1$.

Numerele sunt $a=1, b=5, c=9, d=13$.

13. Fie $u_n=x_n-y_n=8n-2\alpha$ și cum $u_n-u_{n-1}=8=constant \Rightarrow u_n$ este termenul general al unei progresii aritmetice cu rația $r=8$.

$v_n=x_n+y_n=2^{n+1}$ și $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=2 \Rightarrow v_n$ este termenul general al unei progresii geometrice cu rația $q=2$.

15. a) $u_1=\dfrac{8}{3}; u_2=\dfrac{28}{9}; u_3=\dfrac{80}{27};\ v_1=-\dfrac{1}{3};\ v_2=\dfrac{1}{9}, v_3=-\dfrac{1}{27}$.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\dfrac{-\frac{1}{3}u_n+4-3}{u_n-3}=-\dfrac{1}{3}$ și deci șirul v_n este un șir în progresie geometrică cu rația $q=-\dfrac{1}{3}$. c) $v_n=v_1\cdot q^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n;\ u_n=3+v_n=3+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

17. a) $c_n=b_n-a_n=\dfrac{1}{12}(b_{n-1}-a_{n-1})=\dfrac{1}{12}c_{n-1} \Rightarrow c_n=\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$; b) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2}{3}c_n>0; b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{4}c_n<0$; c) $a_n=\dfrac{19}{11}-\dfrac{8}{11}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$; d) $b_n=\dfrac{19}{11}+\dfrac{3}{11}\left(\dfrac{1}{12}\right)$.

18. a) $a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})=3^2(a_{n-1}-a_{n-2})=\ldots=3^{n-1}(a_2-a_1) \Rightarrow b_n=3^{n-1}b_1=3^{n-1}$; b) $a_{n+1}-a_n=b_n=3^{n-1}>0$; c) $c_n=\dfrac{3^n-2}{2}$; d) $a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$.

19. b) $x_n=\dfrac{1+a_n}{2-a_n}=\dfrac{1+\frac{2+a_{n-1}}{a_{n-1}}}{2-\frac{2+a_{n-1}}{a_{n-1}}}=-2\left(\dfrac{1+a_{n-1}}{2-a_{n-1}}\right)=-2x_{n-1}$ deci este o progresie geometrică cu rația -2. c) $x_n=2\cdot(-2)^{n-1}$ și deci $2\cdot(-2)^{n-1}=\dfrac{1+a_n}{2-a_n}$ de unde $a_n=\dfrac{4\cdot(-2)^n-1}{1+2\cdot(-2)^n}$.

Test de evaluare **pag.94**

1. a) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{-23}{(5n-1)(5n+4)}<0$ șir strict descrescător.

b) $a_n>\dfrac{8}{5} \Leftrightarrow 40n+15>40n+8 \Rightarrow 15>8$ adevărat.

2. a) $a_1=10,\ a_{n+1}=a_n+7$; b) $a_1=\dfrac{5}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$.

3. a) $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=3(n-1)\Rightarrow a_n-a_1=3n-3\Rightarrow a_n-5=3n-3\Rightarrow a_n=3n+2$. b) $\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{1}{2^{n-1}}\Leftrightarrow\frac{b_n}{b_1}=\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow b_n=\frac{1}{2^{n-1}}b_1=\frac{16}{2^n}$.

4. $a_8+a_{13}+a_{18}+a_{23}=30\Leftrightarrow 4a_1+58r=30\Leftrightarrow 2a_1+29=15$, respectiv $a_1+a_2+\ldots+a_{30}=30a_1+435r=15(2a_1+29)=15\cdot 15=225$.

5. a) $\begin{cases}b_4+b_5+b_6=28\\ b_2+b_3+b_4=7\end{cases}\Rightarrow\frac{b_1q^3(1+q+q^2)}{b_1q(1+q+q^2)}=\frac{28}{7}\Rightarrow q=2$ de unde $b_1=\frac{1}{4}$ și $b_6+b_7+b_8=112$; b) $\frac{b_9b_8b_7}{b_6b_5b_4}=512$.

6. $a_5=24+4\cdot r$; $a_{11}=24+10r$ si $(24+4r)^2=24\cdot(24+10r)\Rightarrow r=3$, $a_1=24$, $a_5=36$, $a_{11}=54$.

Test de evaluare **pag. 94**

1. (a) [A] 4007; [B] 4008; [C] 4009; [D] 4010; [✓] 4011.
(b) [A] 190; [✓] 100; [C] 90; [D] 99; [E] 80.
(c) [A] 100; [B] 50; [✓] 19; [D] 20; [E] 9.
(d) [A] 4; [✓] 6; [C] 12; [D] 10; [E] 3.
(e) [A] 100; [B] 200; [✓] 0; [D] -10; [E] -100.

2. (a) [A] $3\cdot 2^{2002}$; [B] $3\cdot 2^{2001}$; [✓] $3\cdot 2^{2003}$; [D] $3\cdot 2^{2004}$; [E] $2\cdot 3^{2003}$.
(b) [A] 5; [B] 3; [C] 7; [D] 10; [✓] 6.
(c) [A] $2^{101}+2$; [B] $2^{100}-2$; [✓] $2^{101}-2$; [D] $2^{102}-2$; [E] $2^{101}-1$.
(d) [A] 2002; [B] 2001; [C] 2003; [✓] 2004; [E] 2000.
(e) [A] 9; [B] 7; [C] 5; [✓] 6; [E] 8.

3. [A] $x=\sqrt{2}$; [B] $x=1+\sqrt{2}$; [C] $x=2$; [✓] $x=1$; [E] $x=7$.

4. [A] 1434; [B] 1443; [✓] 1344; [D] 4134; [E] 3144.

Test de evaluare **pag.95**

1. [A] $S_{20}=600$ [✓] $S_{20}=610$ [C] $S_{20}=620$ [D] $S_{20}=1010$.

2. [A] $S_{20}=200$ [B] $S_{20}=180$ [✓] $S_{20}=250$ [D] $S_{20}=280$.

3. [✓] $q=2$ sau $q=-3$; [B] $q=3$; [C] $q=-2$ sau $q=3$; [D] $q=-1$.

4. [A] 60; [B] 751; [C] 150; [✓] 70.

5. A $a_1 = 2,\ a_2 = 8$; ☑ $a_1 = 3,\ a_2 = 8$; C $a_1 = 3,\ a_2 = 7$; D $a_1 = 3,\ a_2 = 6$;

6. A $S_n = 2^n - 1$ B $S_n = \frac{2^n - 1}{2}$ C $S_n = 3^n - 1$ ☑ $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

7. A $a = \frac{9}{2}; b = \frac{14}{4}, c = 2$ ☑ $a = 2; b = \frac{5}{4}, c = \frac{1}{2}$ C $a = 2; b = 1, c = \frac{1}{2}$
D $a = \frac{9}{2}, b = 3, c = 2$.

Funcții, lecturi grafice **pag.97**

1. B este între A și C dacă avem una din situațiile indicate în figură:
fie $x_A < x_B < x_C$, atunci $AB + BC = |x_B - x_A| + |x_C - x_B| = x_B - x_A + x_C - x_B = |x_C - x_A| = AC$ etc.



Fig. 3: *Problema nr.1*

2. $x_A = -3,\ AB = |x_B - x_A| = 5 \Leftrightarrow |x_B + 3| = 5 \Rightarrow x_B \in \{-8; 2\}$.

3. $|x_P - x_M| = |x_Q - x_M| \Leftrightarrow |7 - x_M| = |-12 - x_M| \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

4. b) $AB = 8,\ BC = 3;\ AD = |x - 6|;\ DE = |y - x|$ $\begin{cases} AD = DE \\ AB = DC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 6| = |y - x| \\ 8 = |x - 1| \end{cases} \Leftrightarrow$
$\{x = 9, y = 6\}, \{x = -7, y = 6\}, \{x = -7, y = -20\}, \{x = 9, y = 12\}$. c) E,B,C,A,D.

5. $x = 3, y = 2$.

6. $P_1:\ (x, y) \neq (x', y')$; $P_2:\ (x, y) \notin A \times B$; $P_3:\ A \times B \neq C \times D$.

7. a) $G = \{(2, 5), (3, 3), (4, 1)\}$. b) $G = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$.

8. a) $x = 4,\ y = 5,\ z = 2$; b) $x = 3,\ y = 2,\ z = 4$.

11. $B(4, \sqrt{2})$.

12.

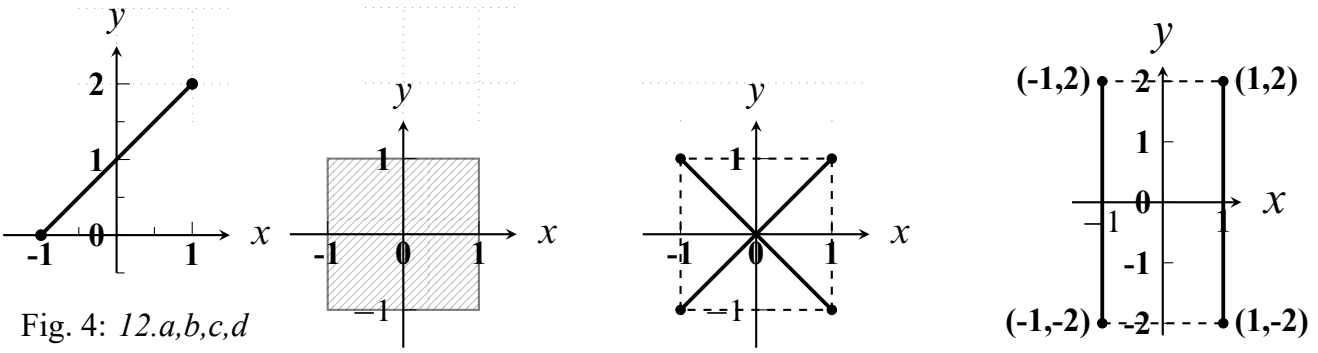


Fig. 4: *12.a,b,c,d*

13. Pentru a obține imaginea geometrică a mulțimii M_1 avem de reprezentat produsele carteziene de mulțimi: $[1,2]\times[0,1]$, $[1,2]\times\{2\}$, $\{3\}\times[0,1]$; $\{3\}\times\{2\}$

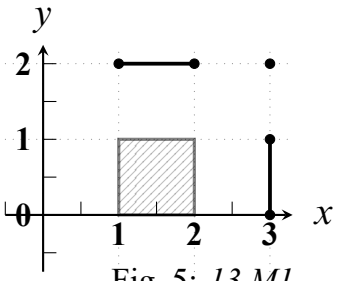


Fig. 5: *13.M1*

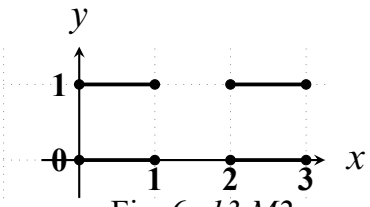


Fig. 6: *13.M2*

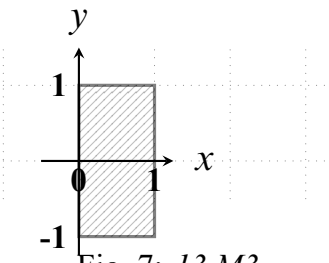


Fig. 7: *13.M3*

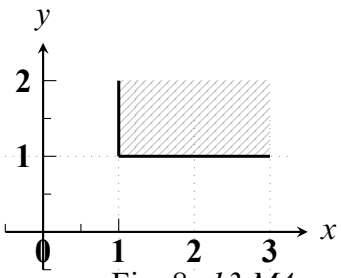


Fig. 8: *13.M4*

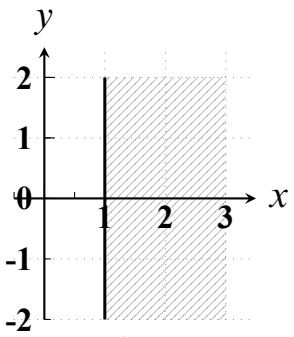


Fig. 9: *13.M5*

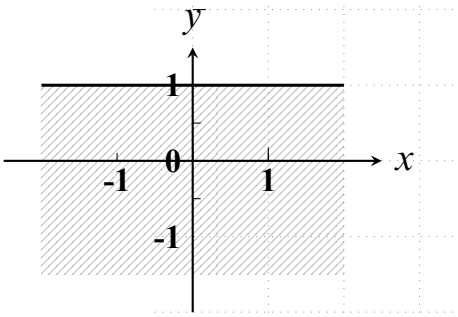


Fig. 10: *13.M6*

14.

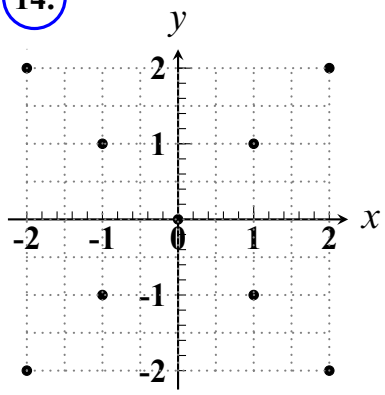


Fig. 11: *14.a*

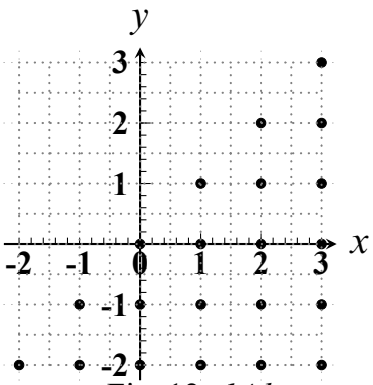


Fig. 12: *14.b*

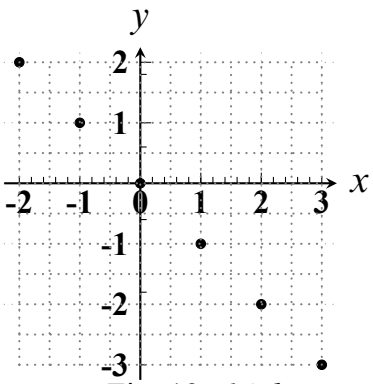


Fig. 13: *14.d*

15. a) $A=[0,1]\cup\{2\}, B=[1,2]\cup\{3\}$. b) $A=[1,2]\cup\{3\}, B=[0,1]\cup\{2\}$. c) $A=B=[-1,1]\cup\{-2,2\}$.

17. a) Nu b) Da c) Da d) Da, e) Nu f) Nu.

19. Nu, deoarece prin legea $x\to x^2-1$, lui $1\to 0$ iar prin legea $x\to x^3-x+1$, lui 1 îi corespunde 1.

Da, $f(x)=\begin{cases} x^2-1,\ x\in\{-2,-1,0,1,2\} \\ x^3-x,\ x\in\{3,4\} \end{cases}$

20. (3) Corespondența $\frac{m}{n} \to m+n$ nu definește o funcție $f : Q \to Q$ deoarece $f\left(\frac{2}{3}\right) = 5$ și $f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{4}{6}\right) = 10$.

21. Se determină mai întâi mulțimea A.

a) $A = \{-3,-2,-1,0,1,3\} \Rightarrow B = \{-5,-3,-1,1,3,5,7\}$ b) $n-2 \in \{\pm 1, \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-1,1,3,5\} \Rightarrow A = \{-3,-1,1,3\} \Rightarrow B = \{-5,-1,3,7\}$ c) $x = 1 - \frac{3}{n-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{0,2,4,6\} \Rightarrow A = \{-2,0,2,4\} \Rightarrow B = \{-7,-3,1,5\}$.

22. a) $|y-2| \le 2 \Rightarrow y \in [0,4] \Rightarrow A = \left[-\frac{2}{3}\frac{2}{3}\right]$. b) $y^2-3y-4=0 \Rightarrow y \in \{-1,4\} \Rightarrow A = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$.

23. a) $f(x) = 2x+1$ b) $g(x) = x^2+1$.

24. a) $f(3) = 5,\ f(3) = 4$ nu este graficul unei funcții. b) $f : \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,4\}$;
c) $f : \{-1,0,1,2,3\} \to \{0,1,2\}$; d) $f : \{0,1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

25. a) $G_f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7)\}$;

b) $G_f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,4),(6,5),(7,6)\}$.

26. Din definiția funcției (1) condiția (i), rezultă că $a \neq b$ și nu pot fi doar 1 , 3 sau 6 ; dar $4-a \in A$ $((4-a,b) \in G)$ Dacă $a = 6 \Rightarrow 4-6 = -2 \notin A$. Deci $a \in \{1,3\}$. Dacă $a = 1$ și $b = 3 \Rightarrow$ cum $(4-a,b) \in G$ și $(b,6) \in G$ adică $(3,3),(3,6) \in G$ rezultă că G nu este graficul unei funcții. Soluția $a = 1$ și $b = 6$ se verifică.

Dacă $a = 3$, cum $(a,2)$ și $(b,6) \in G$ rezultă $b \neq 3$. De asemenea $b \neq 1$ deoarece $(5,b-1) = (5,0) \in G$ și $0 \notin A$. Rămâne soluția $a = 3, b = 6$ care se verifică. În concluzie $(a,b) \in \{(1,6),(3,6)\}$.

27. Din enunț $a = 5$. Cum $(4,b-2) \in G \Rightarrow b-2 \ge 1 \Leftrightarrow b \ge 3$. Cum $(1,2b-1) \in G \Rightarrow 2b-1 \le 5 \Leftrightarrow b \le 3$ și deci $b = 3$.

28. Avem $(a,1),(a+b,5) \in G$, deci $a = -1$ și $a+b = 3$ sau $a = 3$ și $a+b = -1$. Al doilea caz se elimină $(a+b = -1 \notin A)$ și avem $a = -1,\ b = 4,\ f(x) = x+2$.

29. $b+2 \in A \Rightarrow b+2 \le 5 \Rightarrow b \le 3$. $(b+1,b+2),(2,a+1) \in G \Rightarrow b+1 \neq 2 \Rightarrow b \neq 1$. Din $(b,b) \in G$ și $(2,a+1) \in G \Rightarrow b \neq 2$. Așadar $b = 3$ și $a = 1$ care verifică enunțul. Mulțimea valorilor funcției fiind $\{2,3,5\}$.

30. a) $A = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$; b) $B \neq [0,2]$. Ar trebui $[-1,4] \subseteq B$; c) $[0,+\infty) \subseteq B$.

31. a) $1-x \ge 1 \Rightarrow A = [0,1]$; b) $f(-2) = -5 \notin B \Rightarrow B = [-5,6]$; c) este corect definită; d) $A = (-1,1) \setminus \{0\}$.

32. a) Da; b) Nu $(3-x \ge 0)$; c) Nu $(x \neq 0)$ d) Nu $x \notin [1,2)$; e) Da; f) Da.

33. a) $G = \{(x,0)|x \in E\} \cup \{(x,1)|x \in E\}$

b) $G = \{(x,0)|x \in U\} \cup \{(x,1)|x \in U\}; \{(x,1)|x \in U\}$ este mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

c) $G = \{(x,1)|x > 0\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(x,-1)|x < 0\}$.

d) $G = \{(x,0)|x \leq 0\} \cup \{(x,1)|x > 0\}$.

e) $G = \{(x,-1)|x \in (-1,0)\} \cup \{(x,0)|x \in [0,1)\} \cup \{(x,1)|x \in [1,2)\} \cup \{(2,2)\}$.

f) $G = \{(x,x), x \geq 0\} \cup \{(x,-x), x < 0\}$.

34. $a = 6$.

35. $f(x) = g(x) = 0\ \forall x \in \{-1,1,2,3\}$ și $f(0) = g(0) = -6$

37. $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = g(0) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - b \\ a + b = 2a - 1 + 1 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$.

38. $f(0) = g(0) \Rightarrow b = 1; f(1) = g(1) \Rightarrow c = 3; f(-1) = g(-1) \Rightarrow a = c$.

39. $\{a, a+1, a+b\} = \{2a+b, -b, 2\} \Rightarrow a = 2, b = -1$.

40. $a = 1,\ b = 2\ c = 3$.

41. a) $f(A_1) = \{-7,-3,-1\};\ f(A_2) = \{-7,-3,-1,1\}\ ;\ f(A_3) = \{-7,-3,1,2,3\}$.

b) Fie $y \in f(X \cup Y) \Rightarrow (\exists)x \in X \cup Y$, astfel încât $f(x) = y$. Din $x \in X \cup Y \Rightarrow x \in X$ sau $x \in Y \Rightarrow f(x) \in f(X \cup Y) \Rightarrow f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Analog se arată că $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$.

42. a) $f([-1,2]) = [-1,2]; f([1,3]) = [-2,0]; f([0,1]) = [0,1]$.

b) $f^{-1}(\{-4,-3,3,5\}) = \{-4,-2,4,5\}; f^{-1}(\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}) = f^{-1}(\{-2,-1,0,1,2\}) = \{-1,0,1,2,3\}; f^{-1}([3,4]) = [-3,-2]$.

43. a) $f([-2,-1]) = [1,4]; f((-\infty,0]) = [0,+\infty); f([0,2] \cup [3,5]) = [0,4] \cup [9,25]$

b) $f^{-1}(B_1) = [0,1];\ f^{-1}(B_2) = [\sqrt{2},2];\ f^{-1}(B_3) = \{0,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}\}$.

44. Cum $f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 5$, rămân posibilitățile $\begin{cases} f(1) = a + b \\ f(3) = 2a + b - 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} f(3) = a + b \\ f(1) = 2a + b - 1 \end{cases}$ adică $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b - 1 = 7 \end{cases}$ respectiv $\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b - 1 = 3 \end{cases}$ cu soluțiile $a = 5, b = -2$, respectiv $a = -3, b = 10$. În ambele cazuri $\{a + b, 2a + b - 1\} = \{3,7\}$ și $f^{-1}(\{a + b, 2a + b - 1\}) = \{1,2\}$.

45. a) $f(A) = \left\{-\frac{9}{4}, -2, 0, \frac{55}{4}, 18\right\}; g(A) = \left\{-6, -\frac{11}{2}, -3, -\frac{3}{2}, 0\right\}; h(A) = \{-3,0,3,25,33\}$.

b) b) $h^{-1}(y) = x_0$ astfel încât $h(x_0) = y = f(x_0) \Rightarrow 2x_0^2 - 5x_0 = x_0^2 - 3x_0 \Rightarrow x_0 \in \{0, 2\}$, deci $y \in \{f(2), f(0)\}, y \in \{-2, 0\}$. Analog $g^{-1}(y) = f^{-1}(y) \Rightarrow x_0 \in \{1, 3\} \Rightarrow y \in \{-2, 0\}$.

c) $f^{-1}(-2) \cap h^{-1}(-2) = \{1, 2\} \cap \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} = \{2\}$; $f^{-1}(-2) \cap g^{-1}(-2) = \{1, 2\} \cap \{1\} = \{1\}$.

46. a) $f(A) = \{-1, 1\}$, $f(B) = \{13\}$, $f(C) = \{-1, 13, 29\}$, $\text{Im} f = \{-1, 1, 13, 29\}$, $G_f = \{(-1, 1), (0, -1), (2, 13), (3, 29)\}$; b) $G_f = \{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$; c) $\{f(-1), f(2)\} = \{3, 1\}$ de unde $f(-1) = 3$ și $f(2) = 1$ și invers $\Rightarrow a = -2$ și $b = 1$ sau $a = 2$ și $b = 3$. d) $\text{Im} f = [0, \infty)$; $\text{Im} g = \mathbb{Z}$; $\text{Im} h = [1, 11]$.

47. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$,

48. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$.

49. $f_1 : \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 3x + 2$, $f_2 : \left(-\frac{2}{3}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = f(x)$; $g : [1, \infty) \to [1, \infty)$, $g(x) = 3x + 2$.

50. a) $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, $f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow b = -2a \Rightarrow f_a(x) = a(x^2 - 2x)$, $f_a : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$. b) $f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 6x + 3$.

51. a) $G_{A'} = \{(-3, 14), (-2, 8), (0, 2), (1, 2), (3, 8)\}$ b) $g : \{-3, 0, 1, 4\} \to \{12, 2\}$, $G_g = \{(-3, 14), (0, 2), (1, 2), (4, 14)\}$; c) $f_1(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \in \mathbb{Q}, \ |x| \leq 4 \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \ |x| > 4 \end{cases}$

52. $f_A : A \to \mathbb{R}$, $f_A(x) = \begin{cases} x & pt.\ x \in \{-3, -2\} \\ 1 & pt.\ x \in \{1, 2\} \end{cases}$; $f_B : B \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & pt.\ x \in \{-3, -1, 0\} \\ 1 & pt.\ x \in \{1, 2\} \end{cases}$; $f : C \to \mathbb{R}$, $f_C(x) = 1$.

53. b) $g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x}, & x < -1 \\ \frac{1}{x}, & x \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 1, & x \in \{-1, 5\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{\{-1, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup (-\infty, -1)\} \end{cases}$

54.

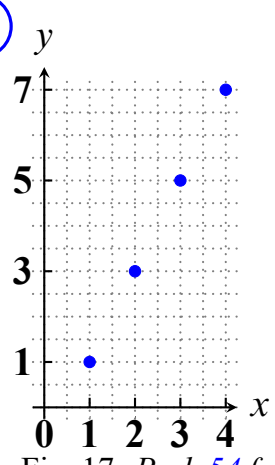


Fig. 17: *Prob.54* f_1

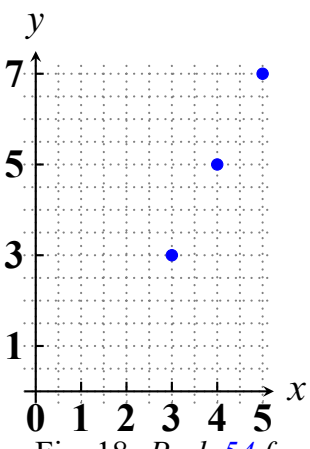


Fig. 18: *Prob.54* f_2

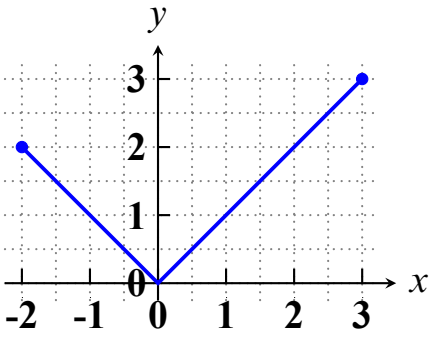


Fig. 19: *Prob.54* f_3

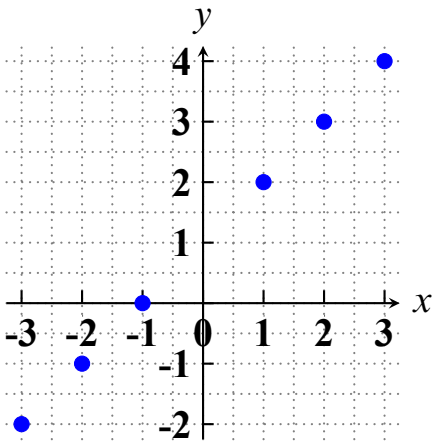


Fig. 20: *Prob.54* f_4

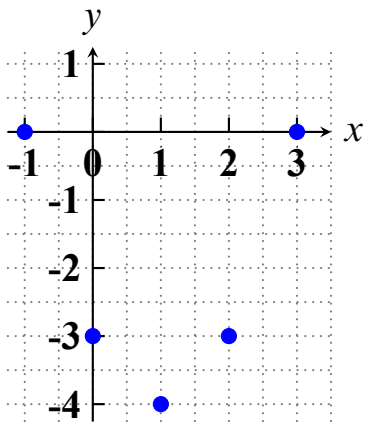


Fig. 21: *Prob.54* f_5

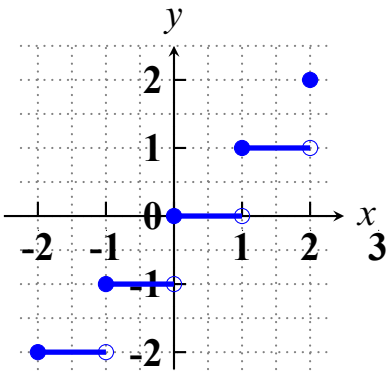


Fig. 22: *Prob.54* f_6

55. a) $G_f = \{(-5,24),(-4,14),(-3,6),(-2,0),(-1,-4),(0,-6),(1,-6),(2,-4),(3,0),(4,6),(5,14)\}$.

56. a) $G_f = \{(x,0) \mid x<0\} \cup \{(x,x)\ x \in [0,1]\} \cup \{(x,1) \mid x>0\}$.

b) $G_f = \{(-2,1),(-1,0),(0,-1),(1,0)\} \cup (x,1), x \geq 2$.

c) $G_f = \{(x,-x) \mid x \in [-1,0]\} \cup \{(x,2x) | x \in (0;0,5)\} \cup \{(x,1) | x \geq 0,5\}$.

57. a) $G_f = \{(x,-3) | x \in [-3,-2)\} \cup \{(-2,2),(-1,1),(0,0)\} \cup \{(x,0) | x>0\}$; $G_g = \{(x,1) | x \in [-2,-1)\} \cup \{(-1,1),(0,0)(1,1)\} \cup \{(x,1) | x>1\}$.

58. $\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=3 \\ 2b=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=-\frac{5}{2}; b=\frac{1}{2}$.

59. a) nu este funcție; b) $f:(-2,\infty) \to \{-1\} \cup [0,1]$; c) nu este funcție; lui 0 îi corespunde 0 și 1 etc. d) $f:\mathbb{R} \to (-\infty,2] \cup \{3\}$; e) nu este funcție (lui 1 îi corespunde 0 și 1); f) $f:(-\infty,2] \cup (0,+\infty) \to (-1,\infty)$; g) $f:(-2,-1) \cup (0,+\infty) \to (-\infty,3) \setminus \{1\}$; h) $f:[-1,2) \to [1,2)$.

61. a) $f(x)=g(x) \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$, $f(x)=h(x) \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$;

c) $f(x)>0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ și $f(x)<0 \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

d) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow x \in [x_0,\pi]$; $h(x) \geq f(x) \Rightarrow \left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

63. a) $f(x)=g(x) \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$; $f(x)=h(x) \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$.

b) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$; $f(x) \geq g(x) \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Curbele C_f, C_g, C_h nu intersectează axa Ox

d)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)$	0	$+$	$+$	$+$	$\|$	$-$	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\|$	$+$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\|$	$-$	$-$	$-$	$-$

68. a) $-1 \le x \le 3 \Rightarrow (-1)^3 \le x^3 \le 3^3 \Rightarrow -1 \le x^3 \le 27 \overset{+2}{\Longrightarrow} 1 \le x^3+2 \le 29 \Rightarrow f(x) \in [1,29]$.

b) $-2 \le x \le 0 \Rightarrow 0 \le 5x \le 10 \Rightarrow f(x) \in [0,10]$. (1)

$0 < x \le 3 \Rightarrow 0 < 2x \le 6 \Rightarrow 2 < 2x+2 \le 8 \Rightarrow f(x) \in (0,8]$. (2).

Din(1) și (2), rezultă $f(x) \in [0,10]$.

c) $x^2 \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$. Cum $x^2+2 < x^2+3 \Rightarrow \dfrac{x^2+2}{x^2+3} < 1 \Rightarrow f(x) < 1$ și deci $f(x) \in [0,1)$.

69. a) $f(x) \in [-11,4]$ b) f este nemărginită; c) $f(x) \in (0,1]$; d) nemărginită.

71. a) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ impară; b) f impară; c) nici pară nici impară; d) f pară.

73. a) $f(2-h) = f(2+h) = h^2-2$; b) $f\left(\frac{3}{2}-h\right) = f\left(\frac{3}{2}+h\right) = 2|h|$; c) $f(1-h) = f(1+h) = -|h|$.

74. a) Da, deoarece $f(-h)+f(h) = 2b$; b) Da, deoarece $f(1-h)+f(1+h) = 2$; c) Da, deoarece $f(2-h)+f(2+h) = 2$.

76. a) $f(x+2) = (-1)^{x+2} = (-1)^x \cdot (-1)^2 = (-1)^x = f(x)$; b) $f(x+2) = \dfrac{1+(-1)^{x+2}}{2} = \dfrac{1+(-1)^x \cdot (-1)^2}{2} = f(x)$; c) $f(x+2) = \{x+2\} = \{x\} = f(x)$; d) Deoarece $9^{x+2} = 9^x \cdot 9^2 = 9^x \cdot 81$ ultima cifră a numărului 9^{x+2} coincide cu cea a numărului 9^x.

77. a) $f(x+4) = \left\{\dfrac{x+4}{4}\right\} = \left\{1+\dfrac{x}{4}\right\} = \left\{\dfrac{x}{4}\right\} = f(x)$. b) $f(x+3) = \left\{1+\dfrac{x+2}{3}\right\} = \left\{\dfrac{x+2}{3}\right\} = f(x)$; c) $f(n+4) = \left\{\dfrac{(x+4)^4}{4}\right\} = \left\{\dfrac{n^4}{4}+4n^3+24n^2+64n+64\right\} = \left\{\dfrac{n^4}{4}\right\} = f(n)$; d) $f(k+3) = \left\{\dfrac{(k+3)^2-k-3}{3}\right\} = \left\{2+\dfrac{k^2+5k}{3}\right\} = \left\{2+\dfrac{k^2+6k-k}{3}\right\} = \left\{2+2k+\dfrac{k^2-k}{3}\right\} = \left\{\dfrac{k^2-k}{3}\right\} = f(k)$.

78. $f(x+2) = \dfrac{1}{1-f(x+1)} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}} = \dfrac{f(x)-1}{f(x)}$; $f(x+3) = \dfrac{1}{1-f(x+2)} = \dfrac{1}{1-\frac{f(x)-1}{f(x)}} = f(x) \Rightarrow f$ periodică cu $T=3$.

79. $f(x+2b)=a+\sqrt{2af(x+b)-f^2(x+b)}=$

$a+\sqrt{2a\left(a+\sqrt{2af(x)-f(x)^2}\right)-\left(a+\sqrt{2af(x)-f(x)^2}\right)^2}=a+\sqrt{a^2-2af(x)+f^2(x)}=$

$a+\sqrt{(a-f(x))^2}=a+|f(x)-a|=f(x)$ deoarece $f(x)\geq a$. Deci $f(x+2b)=f(x)$.

80. $f(x+2a)=\dfrac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$. Să arătăm că $f(x)\neq 0$. Presupunem că există $x_0\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x_0)=0\Rightarrow f(x_0+1)=1$, contradicție cu $f(x)\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$f(x+4a)=\dfrac{1}{f(x+2a)}=f(x)\Rightarrow T=4a$.

81. a) Din ipoteză $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$.

$x\to x+1\Rightarrow f(x+2)=f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)-f(x)=-f(x-1),\ (\forall)x\in\mathbb{R}$. In relația $f(x+2)=-f(x-1)$ luând în loc de x, $x+3\Rightarrow f(x+5)=-f(x+2)=f(x-1)\Rightarrow f(x+6)=f(x),\ (\forall x\in\mathbb{R})$ și deci f este periodică cu $T=6$.

b) $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{3}$..

84. Fie $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow f(A)=\{0,1,5\}\subseteq B\Rightarrow g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&1&1\end{pmatrix}$; $g(B)=\{1,2,4\}\subseteq A\Rightarrow f\circ g=\begin{pmatrix}0&1&3&5\\0&0&5&0\end{pmatrix}$.

85. Fie $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\2&4&3&1\end{pmatrix}\Rightarrow g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$, $f\circ g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&d&c&a\end{pmatrix}$.

86. $f(A)=\{1,4,7\}\not\subseteq\{4,5,6\}$ și deci nu există $f\circ g$ și $g\circ f=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&7&7\end{pmatrix}$.

93.

a)

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2a+1$	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11
$3-a$	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-9
$-2a+2$	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-9

Dacă $f,g,h:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1, g(x)=3-x$, $h(x)=-2x+2$, atunci $h=g\circ f$

b)

x	0	1	2	3	4
$y=2x+1$	1	3	5	7	9
$z=y-1$	0	2	4	6	8
$u=3z$	0	6	12	18	24

Dacă $f(x)=2x+1,\ g(x)=x-1$, $h(x)=3x\Rightarrow z=(g\circ f)(x)=3x$ și $u=(h\circ h\circ f)(x)=6x$

94. Se pot defini ambele funcții:
$G_{g\circ f}=\{(x,y),(y,z),(z,y),(t,x),(u,x)\}$; $G_{f\circ g}=\{(1,2),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

95. $G_{g\circ f}=\{(1,5),(2,1),(3,1),(4,2),(5,3)\}$ iar $G_{f\circ g}=\{(1,1),(2,2),(3,2),(4,3),(5,3)\}$.

96. a) $m=\frac{7}{5}$; b) $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{10}{9}$; c) $m\in\{-2;1\}$; d) $n=a$ și $b\in\mathbb{R}$ sau $m=1$ și $n\in\mathbb{R}$;
e) $(f\circ g)(-1)=(g\circ f)(-1)\Leftrightarrow -a^2+4a=0\Rightarrow a\in\{0;4\}$.

97. a) $(f\circ g)(x)=x^2+1$, $(g\circ f)(x)=(x+1)^2$; b) $(f\circ g)(x)=-4x^2+4x+2$, $(g\circ f)(x)=-2x^2+5$; c) $(f\circ g)(x)=acx+ad+b$, $(g\circ f)(x)=acx+bc+d$; d) $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=1$;
e)$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 0\\ 2 & x>0\end{cases}$;

f) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 3\\ -13+4x, & x\in\left(3\frac{7}{2}\right]\\ -10+2x, & x>\frac{7}{2}\end{cases}$; $(g\circ f)(x)=\begin{cases}2-2x, & x\le -1\\ 7-x, & x\in(-1,5]\\ -12+2x, & x>5\end{cases}$

98. $g(x)=\begin{cases}9+4x, & x\in(-\infty,-2]\\ 1+2x, & x\in(-2,-1]\\ -1+2x, & x\in(-1,1]\\ -4+x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

99. a) $(h\circ g\circ f)(x)=-24x+10$; $(h\circ g\circ f)(1)=-14$; $(h\circ g\circ f)(2)=-38$.

b) $(h\circ g\circ f)(x)=\begin{cases}-2 & x\le\frac{1}{3}\\ 6 & x>\frac{1}{3}\end{cases}$

102. a) Da. b) Nu, deoarece lui $5=2\cdot 2+1=1+2\cdot 2$ îi corespund numerele diferite $1-2\sqrt{2}$, respectiv $2-\sqrt{2}$.

105. $f(x)=\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=\sqrt{\sqrt{x-9}+3)^2}+\sqrt{\sqrt{x-9}-3)^2}=\sqrt{x-9}+3+\left|\sqrt{x-9}-3\right|=\sqrt{x-9}+3+\begin{cases}3-\sqrt{x-9} & pt.\ x\in[9,18]\\ \sqrt{x-9}-3 & pt.\ x\in(18,+\infty)\end{cases}=g(x)$

106. Indicație: $\max(-x+2,x+2)=\begin{cases}-x+2 & pt.\ -x+2\ge x+2\\ x+2 & pt.\ -x+2<x+2\end{cases}$

108. a) Se demonstrează că $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$ și $f(A\cup B)\supseteq f(A)\cup f(B)$. Fie $y\in f(A\cup B)\Rightarrow\exists x\in A\cup B$ astfel încât $f(x)=y$. Din $x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ sau $x\in B\Rightarrow f(x)\in f(A)$ sau $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)$ și deci $f(A\cup B)\subseteq$

$f(A) \cup f(B)$. Analog, fie $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ sau $y \in f(B) \Rightarrow (\exists x)\ x \in A$ sau $x \in B$ astfel încât $f(x) = y$. Din $(\exists x)\ x \in A$ sau $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow f(x) \in f(A \cup B) \Rightarrow y \in f(A \cup B) \Rightarrow f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

Demonstrația se face similar pentru $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

109. $f \circ g \Rightarrow f([-2,3]) = [-5,5] \subseteq [a,b] \Rightarrow a \geq -5$ și $b \leq 5$.

$g \circ f \Rightarrow g([a,b]) = [3a+1, 3b+1] \subseteq [-2,3] \Rightarrow a \geq -1,\ b \leq \frac{2}{3}$.

110. a) $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{de\ n\ ori}(-1) = -1-4n$; b) $\underbrace{(f_1 \circ f_1 \circ \ldots \circ f_1)}_{de\ n\ ori}(x) = x+3n$; $\underbrace{(f_2 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_2)}_{de\ n\ ori}(x) = 3^n x + \frac{3^n - 1}{2}$.

111. $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{de\ n\ ori}(x) = 2^n x + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^n x + 2^n - 1$.

112. $(f \circ f)(x) = 4x + 3 \Rightarrow f(f \circ f)(x) = f(4x+3) \Rightarrow (f \circ f \circ f)(x) = f(4x+3) \Rightarrow$

$8x + a = f(4x+3) \overset{x := \frac{x-3}{4}}{\Longrightarrow} f(x) = 2x + a - 6.$ (1)

Pe de altă parte $(f \circ f)f(x) = 8x + a \Rightarrow 4f(x) + 3 = 8x + a \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{a-3}{4}$ (2)

Din (1) și (2), rezultă $a = 7$ și $f(x) = 2x + 1$.

113. a) $(f \circ f)(x) = 2x - 1 \Rightarrow f((f \circ f)(x)) = f(2x-1) \Leftrightarrow (f \circ f)(f(x)) = f(2x-1) \Leftrightarrow 2f(x) - 1 = f(2x-1)$. Punând $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$.

b) Analog, notând $f^n = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{de\ n\ ori}$, avem $f^n(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(f^n(x)) = f(2x-1) \Leftrightarrow (f^n(f(x))) = f(2x-1) \Rightarrow 2f(x) - 1 = f(2x-1) \Leftrightarrow 2f(1) - 1 = f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.

114. a) $(f \circ g)(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3$; b) $f(x) = x^3,\ g(x) = 2x^2 - 3x + 1$; c) $f(x) = x^2,\ g(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

115. Pentru $x = 1 \Rightarrow f(f(1)) = 1 \Rightarrow f(f(f(1))) = f(1) \overset{asociativitate}{\Longrightarrow} (f \circ f)(f(1)) = 1 \Rightarrow f^2(1) - 2f(1) + 2 = 1 \Rightarrow (f(1)-1)^2 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$.

116. Din $x^2 \leq f(x) + a(2x - a) \Rightarrow f(x) \geq (x-a)^2$. (1)

In $f(x+a) \leq x^2$, punând în loc de $x, x-a$ obținem $f(x) \leq (x-a)^2$. (2)

Din (1) și (2) , obținem $f(x) = (x-a)^2$.

117. Inegalitatea se mai poate scrie $f((x+2)^3-8) \leq x \leq (f(x)+2)^3-8$. Din $x \leq (f(x)+2)^3-8 \Rightarrow (f(x)+2)^3 \geq x + 8 \Rightarrow f(x) + 2 \geq \sqrt[3]{x+8} \Rightarrow \sqrt[3]{x+8} - 2 \leq f(x)$ (1)

În $f((x+2)^3-8)\le x$, punând în loc de x, $\sqrt[3]{x+8}-2\Rightarrow f(x)\le\sqrt[3]{x+8}-2$ (2)

Din (1) și (2)$\Rightarrow$ f(x)=$\sqrt[3]{x+8}-2$.

118. a) Pentru $x=\frac{1}{2}\Rightarrow f^2(0)-2f(0)+1=0\Leftrightarrow(f(0)-1)^2=0\Rightarrow f(0)=1$.

b) $x=3\Rightarrow f(1)=2$.

119. a) Atribuind lui x, valoarea $\frac{x+2}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{x+11}{3}$, $f(0)=\frac{11}{3}$, $f(4)=5$. b) $f(x)=3x+7$.

120. Punând în loc de x, $1-x$ relația dată devine $2f(1-x)+3f(x)=3-4x$ și rezolvând sistemul

$$\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=4x-1\\2f(1-x)+3f(x)=3-4x\end{cases}\Rightarrow f(x)=-4x+\frac{11}{5}.$$

121. Pentru $x=y=1\Rightarrow f^2(1)=f(1)\Rightarrow f(1)(f(1)-1)=0$. Cum $f(1)\neq 0\Rightarrow f(1)-1=0\Rightarrow f(1)=1$. Pentru $y=1$ și $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)\cdot f(1)=f(x+1-x)\Rightarrow f(x)=f(1)=1$.

122. Punând în loc de $y,-y$ obținem și $f(x-y)+2f(x+y)=3f(x)+y$ (2)

Din (1) și (2) $\Longrightarrow f(x+y)=f(x)+y$ (3)

Înlocuind în (3) pe y cu $-x$ obținem $f(0)=f(x)-x\Longrightarrow f(x)=x+a$ unde $a=f(0)\in\mathbb{R}$.

123. Presupunem că există o astfel de funcție. Atribuind lui x, valoarea $n-x$ obținem relația $f(n-x)+f(x)=n-x$, și cum din ipoteză $f(x)+f(n-x)=x$, ar rezulta că $n-x=x\Leftrightarrow x=\frac{n}{2}$, contradicție cu ipoteza $n\in\mathbb{N}^*$ și $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Analog, se dă lui x valoarea $-x$.

124. $f(m+1)=m\Leftrightarrow\frac{4(m+1)}{m^2+2m+5}=m\Leftrightarrow m^3+2m^2+m-4=0\Leftrightarrow(m-1)(m^2+3m+4)=0\Rightarrow m=1$.

125. Fie $x_1<x_2$ și f descrescătoare. Din $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))\le f(f(x_2))\Rightarrow -x_1+a\le -x_2+a\Rightarrow x_1\ge x_2$, contradicție cu ipoteza. Analog, dacă f este crescătoare.

126. $(f\circ f)(x)=f(x)+[f(x)]=x+[x]+[x+[x]]=x+3[x]=x+(2^2-1)[x]$.

$(f\circ f\circ f)(x)=x+3[x]+[x+3[x]]=x+7[x]=x+(2^3-1)[x]$ și prin inducție se arată că $g(x)=x+(2^n-1)[x]$.

127. $f(k+1)-f(k)=2k\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{19}(f(k+1)-f(k))=2\sum\limits_{k=0}^{19}k\Rightarrow f(20)=2\cdot 190=380$.

128. $45=f(10)=f(5\cdot 2)=\frac{f(5)}{2}\Rightarrow f(5)=90$ și $f(25)=f(5\cdot 5)=\frac{f(5)}{5}=\frac{90}{5}=18$.

129. $f(x+1)=f(x)-f(-2)$ și prin recurență se arată că $f(x+k)=f(x)-kf(-2)$. Punând $x=-2\Rightarrow f(-2+k)=f(-2)(1-k)$ și luând $-2+k=y\Rightarrow f(y)=-f(-2)(y+1)$ și $2005=f(2004)=-f(-2)\cdot 2005\Rightarrow f(-2)=-1$. În concluzie $f(x)=x+1$.

130. $f(x)+f(y)=2f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right)$ (1)

$$f(z)+f\left(\frac{3xyz}{xy+yz+xz}\right)=2f\left(\frac{2\cdot\dfrac{3xyz^2}{xy+yz+xz}}{z+\dfrac{3xyz}{xy+yz+xz}}\right)=2f\left(\frac{6xyz^2}{xz^2+yz^2+4xyz}\right) \quad (2)$$

Adunând (1) cu (2) avem:

$$f(x)+f(y)+f(z)+f\left(\frac{3xyz}{xy+xz+yz}\right)=2\left(f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)+f\left(\frac{6xyz^2}{xz^2+yz^2+4xyz}\right)\right)=$$

$$4f\left(\frac{2\cdot\dfrac{2xy}{x+y}\cdot\dfrac{6xyz^2}{xz^2+yz^2+4xyz}}{\dfrac{2xy}{x+y}+\dfrac{6xyz^2}{xz^2+yz^2+4xyz}}\right)=4f\left(\frac{24x^2y^2z^2}{2(x^2yz^2+xy^2z^2+4x^2y^2z+3x^2yz^2+3xy^2z^2)}\right)=$$

$$4f\left(\frac{12x^2y^2z^2}{4xyz(xy+yz+xz)}\right)=4f\left(\frac{3xyz}{xy+yz+xz}\right).$$ (3). Din (3) $\Longrightarrow$ c.c.t.d.

Test de evaluare 1 **pag.122**

1.

$$f(x)=\begin{cases}-3x+1 & x\in[-1,0]\\ x+1 & x\in(0,1)\\ 3x-1 & x\in[1,3]\end{cases}$$

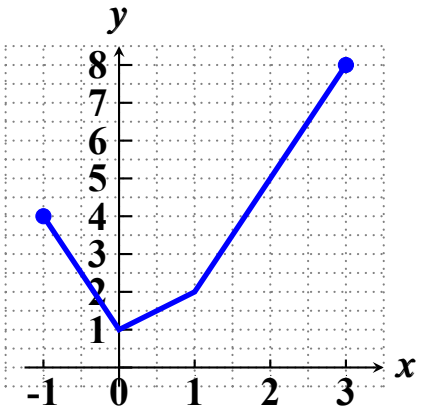


Fig. 87: *Prob 1.*

2. a) Pentru $x=y=0\Rightarrow f(0)+a=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$

Pentru $x=y\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)+2x^2+a=2f(x)\Rightarrow f(x)=x^2+a$.

b) Pentru $x=y=0\Rightarrow \dfrac{1}{g(0)}+a^2=\dfrac{2}{g(0)}\Rightarrow g(0)=\dfrac{1}{a^2}$.

Pentru $x=y\in\mathbb{R}\Rightarrow a^2+2x^2+a^2=\dfrac{2}{g(x)}+4xa\Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}$.

3. a) $m=\dfrac{1}{9}$; $f(x)=-\dfrac{7}{9}x-\dfrac{17}{9}$; b) $m=\dfrac{9}{16}$, $f(x)=-\dfrac{1}{8}x-\dfrac{23}{16}$; c) $m\in\{-1;3\}$ $f(x)=-3x-3$ sau $f(x)=5x+1$.

4. $a = 1, b = 2; m = 3, n = 4$

5. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 6x - 7 & x < 1 \\ 3x - 4 & 1 \leq x \end{cases}$ și $(g \circ f)(x) = \begin{cases} -11 + 6x & x < 1 \\ -8 + 3x & 1 \leq x \end{cases}$.

Test de evaluare 2 **pagina 123**

1. a) $\{(-2; 2), (-2; 3), (-1; 2); (-1; 3), (0; 2), (0; 3), (1; 2); (1; 3), (2; 2); (2; 3)\}$.

b) $\{(0; -1), (2; -1), (1; 0), (-1; 0).(-2; 1), (0; 1); (-1; 2); (-2; 3)\}$.

c) $\{(1; -1), (2; -1); (3; -1), (4; 0), (3; 0), (2; 0), (-2; 0), (3; 1), (4; 1), (4; 2), (0; 2), (-1; 2), (-2; 2), (-1; 3), (0; 3), (1, 3)\}$.

2.

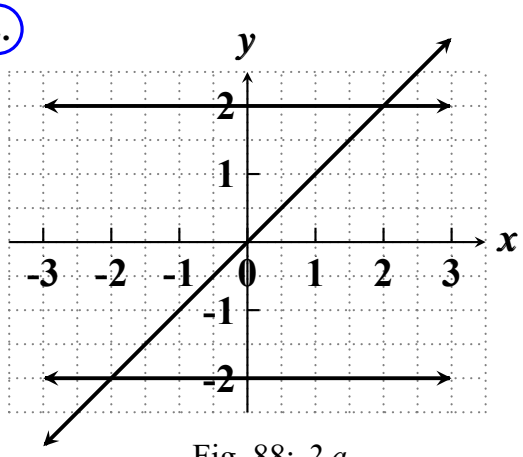


Fig. 88: *2.a*

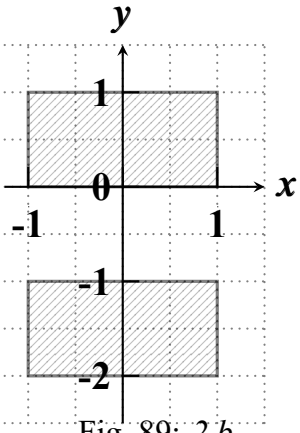


Fig. 89: *2.b*

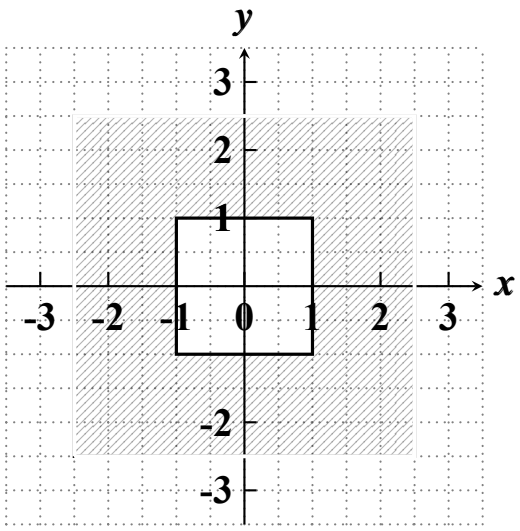


Fig. 90: *2.c*

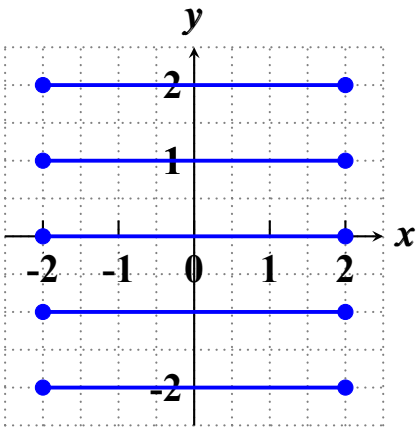


Fig. 91: *2.d*

3. b) 16;

4. a) $f(2) = 3 \notin [0, 1]$; b) corectă.

5. $a = 0; c = 1; b \in \mathbb{R}$.

6. $\text{Im}f = [-1;+\infty)$; $f([0;2]) = [-1;3]$; $f^{-1}(\{-4;-3;1;2\}) = \left\{-\frac{3}{2};-1;1;\frac{3}{2}\right\}$; $f^{-1}([0,3]) = \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Test de evaluare 3 **pag.124**

1. a) $\underbrace{(f\circ f\circ f\ldots\circ f)}_{de\ 2004\ \ ori}(0) = 2\cdot 2004 = 4008$; b) $\underbrace{(f\circ f\circ f\ldots\circ f)}_{de\ n\ \ ori}(1) = 2005 \Leftrightarrow 2n+1 = 2005 \Rightarrow n = 1002$; c) $\underbrace{(f\circ f\circ f\ldots\circ f)}_{de\ n\ \ ori}(x) = x+2n \Leftrightarrow a^n + b(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1) = x+2n \Rightarrow a=1, b=2$.

2. a) $(f\circ g)(x) = \begin{cases} 2, & x<0 \\ x+3, & x\geq 0 \end{cases}$; $(g\circ f) = \begin{cases} 1, & x<-1, \\ x+3 & x\geq -1 \end{cases}$.

b) $(f\circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x<2 \\ 1 & x\geq 2 \end{cases}$; $(g\circ f)(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$.

3. a) Luând $x=-5 \Rightarrow f(0) = -11$; b) Luând $x=2 \Rightarrow f(7)=3$; c) Luând $x=-1 \Rightarrow f(4)=3$; d) Luând în loc de $x, x-5 \Rightarrow f(x) = 2x-11$.

4. a) $(h\circ f\circ g)(x) = \frac{3x+1}{2}$; b) $(g\circ f\circ h)(1) = \frac{13}{2}$ si $(f\circ g\circ h)(0) = 1$; c) $p(x) = 6x+1$.

5. a) $Img \subseteq [0,1] \Rightarrow a \geq \frac{1}{2},\ b\leq 1$; b) $Imf \subseteq [a,b] \Rightarrow a\geq 1,\ b\leq 2$; c) $3x+1 = (f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x) = 3x+5$.

Test de evaluare 4 **pag.124**

1. $(f\circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-4) = 11$. Răspuns C.

2. $(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(5) = 9$. Răspuns D.

3. $(f\circ f)(x) = f^2(x) \Leftrightarrow 4x+9 = (2x+3)^2 \Rightarrow x\in\{-2;0\}$. Răspuns B.

4. A.

5. A.

6. Notăm $f_n = \underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\ ori}$ și egalitatea devine $f_n(x) = 5x+1 \Rightarrow f_n(f(x)) = 5f(x)+1 \Rightarrow f(f_n(x)) = 5f(x)+1 \Rightarrow f(5x+1) = 5f(x)+1$ și luând $x=-\frac{1}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5f\left(-\frac{1}{4}\right)+1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$. Răspuns D.

Funcția polinomială de gradul I **pag. 126**

1. $G_f \cap Ox = A(2;0)$ și $G_f \cap Oy = B(0;-4)$.

2. $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(-1) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2. \end{cases}$

5.

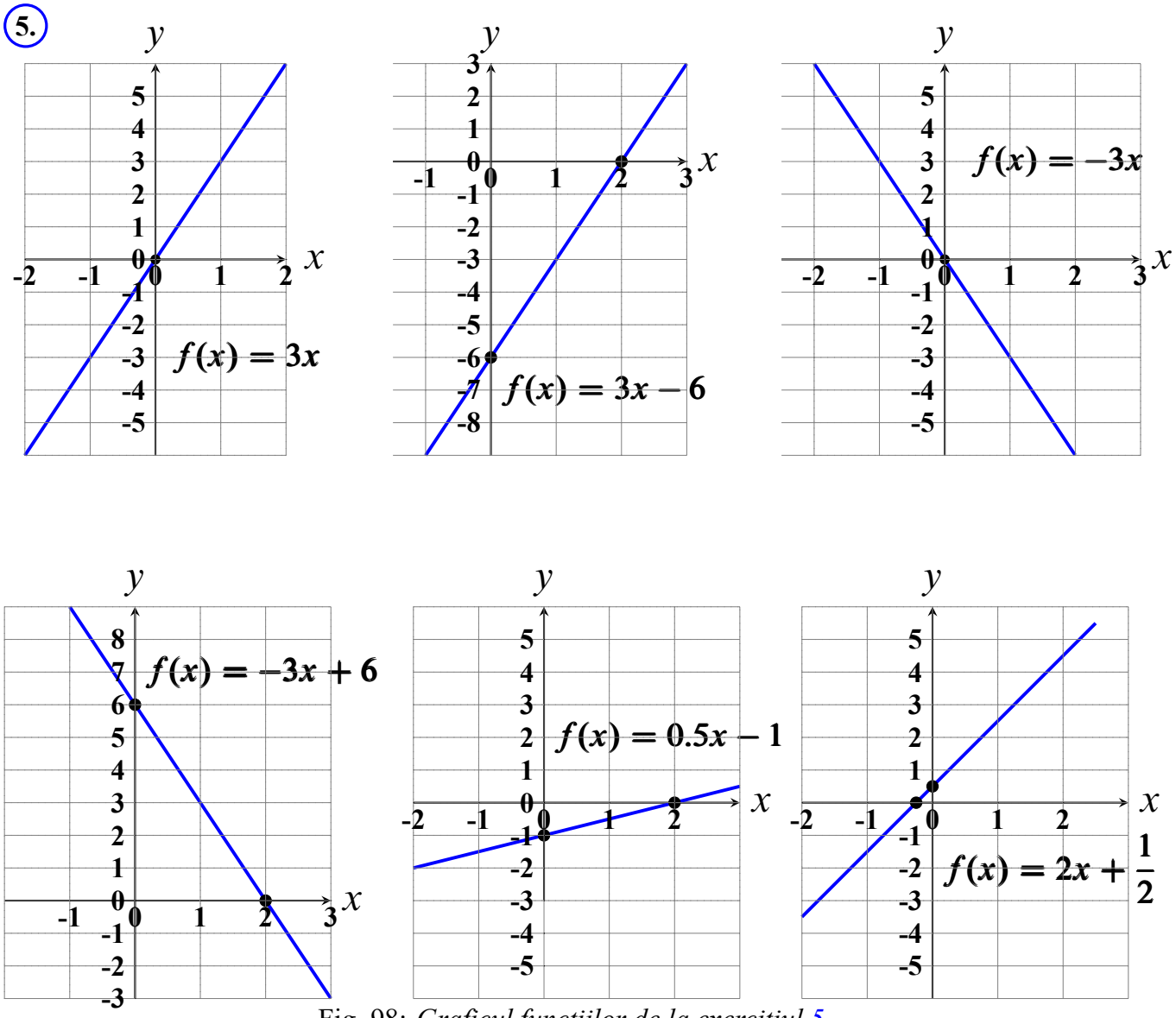


Fig. 98: *Graficul funcțiilor de la exercițiul 5.*

6. a) $m = \frac{1}{2}$; b) $m = 1$; c) $m = 3$; d) $m = 4$.

7.

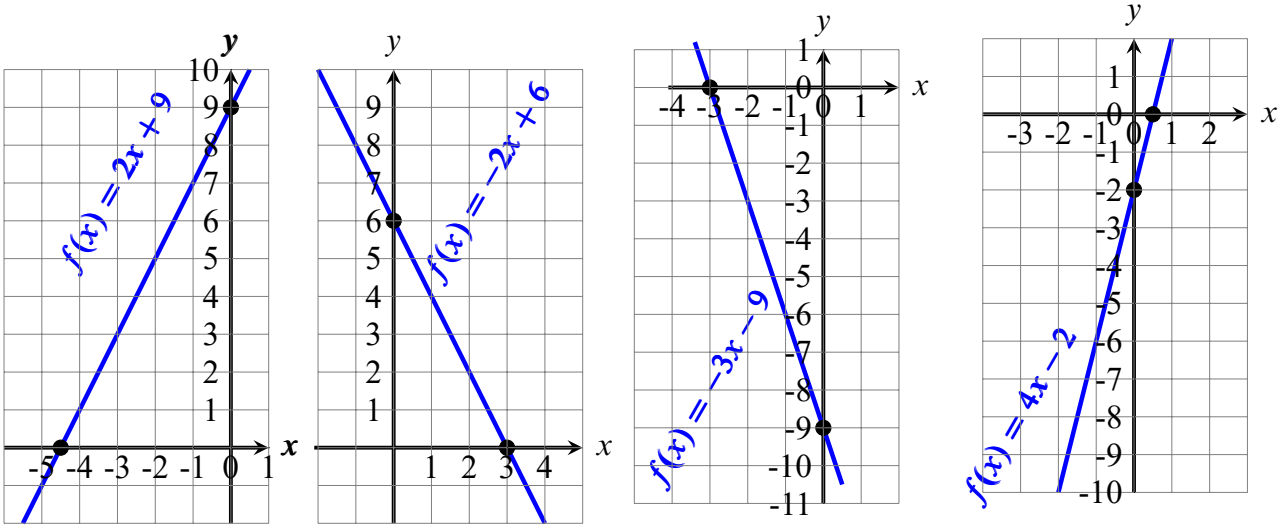


Fig. 99: *Graficul funcțiilor de la exercițiul 7*

8. a) $f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(-2) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = 2x$; c) $f(x) = -x - 1$; d) $f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

9. a) $(-1, 1) \in d$; $(2, 9) \notin d$; $(1, 7) \in d$; b) $x = 3 \Rightarrow y = 13 \Rightarrow A(3, 13)$; c) $y = 7 \Rightarrow 3x + 4 = 7 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 7)$.

10. a) $f(x) = x + 2$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$; c) $f(x) = -x - \sqrt{3}$; d) $f(x) = x - \sqrt{5}$.

11. $a = -2,\ b = 3,\ c = 2,\ d = -1$.

12. $a = 2,\ b = -3,\ c = d = 1$.

13. a) $y = -2x + 3$; b) $y = -2x$; c) $y = -2x - 2$; d) $y = -2x + 8$.

14. a) $A(0, 5)$; b) $a = -1$; c) $a = 1$; d) $a \in \varnothing$.

15. $S = 12$.

16. Fie $O(0, 0),\ A = G_f \cap Ox,\ A(m + 2, 0), B = G_f \cap Oy,\ B(0, m + 1) \Rightarrow S_{\triangle OAB} = 6 \Leftrightarrow m \in \{-5, 2\}$.

17. **a)** $2(a(2x + 3) + b) - a(x - 2) - b = 3x \Leftrightarrow 3(a - 1)x + 8a + b = 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1, b = -8 \Rightarrow f(x) = x - 8$; **b)** $a\,(ax + b) - b - 2a\,(x - 1) = 3x \Leftrightarrow \left(a^2 - 2a - 3\right)x + ab + 2a - b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 3 = 0 \\ ab + 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, b) \in \{(-1, -1), (3, -3)\} \Rightarrow f(x) = -x - 1$ sau $f(x) = 3x - 3$;

c) $f\circ f)(x)+(f\circ f)(x+1)=a(ax+b)+2b+a(a(x+1)+b)=2a^2x+a^2+2ab+2b\Rightarrow\begin{cases}2a^2=2\\a^2+2ab+2b=-3\end{cases}\Rightarrow a=1,b-1\Rightarrow f(x)=x-1$; **d)** $f(x-1)f(x+1)-(f\circ f)(2x-1)=4x^2+4x\Leftrightarrow a^2x^2+\left(-2a^2+2ab\right)x-ab+b^2-b=4x^2+4x,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\-2a^2+2ab=4\\-ab+b^2-b=0\end{cases}\Rightarrow a=2,b=3\Rightarrow f(x)=2x+3.$

18. $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-3<0\Rightarrow f$ strict descrescătoare.

19.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f_1(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_2(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f_3(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f_4(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

20. a) $m>0$; b) $m\in\{0;1\}$; c) $m\in\{-1,0,1\}$.

22.

a) Din tabelul de semne

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$2x+4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-3x+6$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$(2x+4)(-3x+6)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

$P_1<0$ pentru $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; $P_1=0$ pentru $x\in\{-2,2\}$ și $P_1>0$ pentru $x\in(-2,2)$.

b) $P_2<0$ pentru $x\in(-2,3)$; $P_2=0\Rightarrow x\in\{-2,3\}$; $P_2>0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

c) $P_3<0\Rightarrow x\in(-\infty,4)\cup(9,+\infty)$; $P_3=0\Rightarrow x\in\{4,9\}$; $P_3>0\Rightarrow(4,9)$.

d) $P_4<0\Rightarrow x\in(-2,2)\cup(4,+\infty)$; $P_4=0\Rightarrow x\in\{-2,2,4\}$; $P_4>0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,4)$.

23. Se face tabelul de semne. Exemplu a)

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$2x+8$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$-3x+6$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{2x+8}{-3x+6}$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$-$

24. $\frac{m+3}{m-2} < 0 \Rightarrow m \in (-3,2)$.

25. a) $x \in \left(-\infty, \frac{11}{5}\right)$; b) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$; c) $x \in (4,\infty)$; d) $x \in \left(-2, -\frac{4}{5}\right]$; e) $x \in (5,\infty)$; f) $x \in (-\infty, 5]$; g) $x \in \left[\frac{13}{8}, \infty\right)$; h) $x \in \left(-\frac{1}{6}, 1\right)$.

26. a) $x \in \left[-\frac{5}{2}, 4\right)$; b) $x \in (-\infty,-1] \cup (1,2)$; c) $x \in (-\infty,-2) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

27. $x \in (-2,\infty)$; b) $x \in \left(-\infty, \frac{257}{220}\right)$; c) $x \in [15,\infty)$; d) $x \in (7,\infty)$; e) $x \in [10,\infty)$.

28. $A = \{0;1;2;3;4\}$ $B = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

29. a) $x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$; b) $x \in [-2,3]$; c) $x \in [-3,5]$; d) $x \in \left(-\frac{21}{4}, 2\right]$.

30. a) $x \in \left[2, \frac{8}{3}\right)$; b) $x \in [-4,-2) \cup [2,\infty)$; c) $x \in [1,2)$.

31. a) $x = 3$; b) $x \in \{1,2,3\}$; c) $x \in \{-7,-6,-5,\ldots 3,4,5\}$ d) $x \in \{4,5,6,\ldots,11\}$.

32. a)$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [8,+\infty)$; b) $x \in (-\infty,-3) \cup \left[-2, -\frac{5}{3}\right) \cup (-1,2) \cup [4,+\infty)$; c) $x \in [-3,-1)$; d) $x \in (-\infty,-2) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right] \cup [2,8)$.

33. a) $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$; b) $x \in \left(1, \frac{7}{3}\right]$; c) $x \in \left[\frac{13}{5}, 5\right)$; d) $x \in (-\infty;-2) \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{8}{5}\right]$.

35. $f(x) = x - 1$.

36. Pentru $x = 1$, avem $f(3) = -3 + 4f(3) \Rightarrow f(3) = 1$ și relația dată devine $f(x+2) = 3x-2 \Rightarrow f(x) = 3x - 8$.

37. $(f \circ f)(x) = \begin{cases} x+6, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

38. $f_{min}(x) = 0$, $f_{max}(x) = 2 \Rightarrow S = 2$.

39. $Imf = (-\infty, -6] \cup (1, +\infty)$.

40. a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ soluție unică $x = \dfrac{3}{a+3},\ y = -\dfrac{1}{a+3}$; b) $a = 3$; c) $a = -3$.

41. $a \in \{-1; 1\}$.

42. a) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ soluție unică $x = \dfrac{6}{m-4},\ y = \dfrac{4}{m-4}$. Pentru $m = -4$ o infinitate de soluții. Pentru $m = 4$ nici o soluție.

b) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ soluție unică $x = y = \dfrac{1}{m+2}$. Pentru $= 2$ o infinitate de soluții. Pentru $m = -2$ nici o soluție.

c) Pentru $a \neq 3$ soluție unică $x = 0,\ y = \dfrac{3}{2}$. Pentru $a = 3$ o infinitate de soluții.

43.

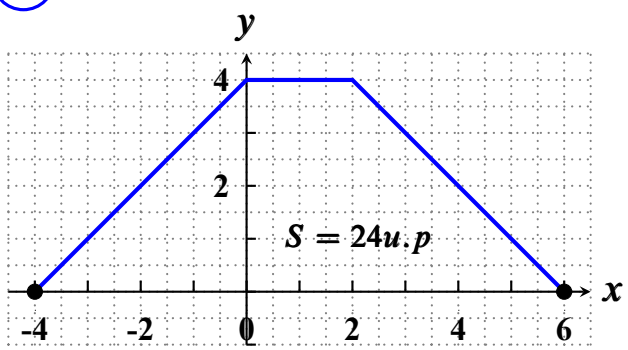


Fig. 100: *Problema 43*

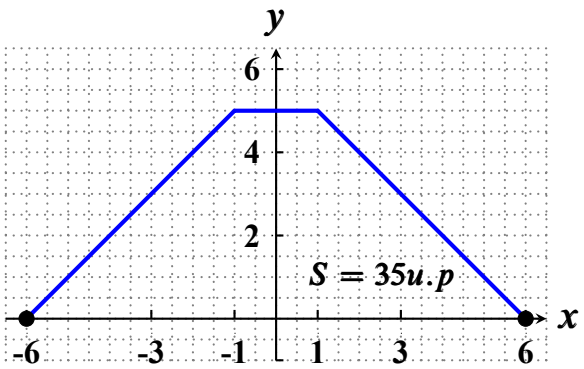


Fig. 101: *Problema 44*

46. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-9, & \text{pt. } x \leq 3 \\ 2x-12, & \text{pt. } x \in (3,5] \\ -2x+13, & \text{pt. } x > 5 \end{cases}$; $(g \circ f) = \begin{cases} x-9, & \text{pt. } x \leq 2 \\ -x, & \text{pt. } x > 2 \end{cases}$

47. $(f \circ g)(x) = ax + 6a^2 - 2a + 6$; $(g \circ f)(x) = ax + 6a + 4$ și deci $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow 6a^2 - 2a + 6 = 6a + 4 \Leftrightarrow a \in \left\{\dfrac{1}{3}, 1\right\}$.

48. a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Avem $2f(x) + f(1-x) = 2x + 11 \Leftrightarrow ax + 3b + a = 2x + 11 \Rightarrow a = 2, b = 3$ și $f(x) = 2x + 3$.

b) **Metoda I.** Presupunem că există $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1 \neq f_2$ care verifică relația dată, adică $2f_1(x) + f_1(1-x) = 2x + 11$ și $2f_2(x) + f_2(1-x) = 2x + 11 \Rightarrow$

$2f_1(x) + f_1(1-x) = 2f_2(x) + f_2(1-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad *.$

Punând în relația $*$, în loc de x, $1-x$ obținem relația

$2f_1(1-x) + f_1(x) = 2f_2(1-x) + f_2(x)$ $\quad **.$

Eliminând pe $f_1(1-x)$ între relațiile $*$ și $**$ obținem că $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Metoda a II. În relația $2f(x)+f(1-x)=2x+11$, atribuind lui x valoarea $1-x$, obținem $2f(1-x)+f(x)=-2x+13$. Rezolvând sistemul $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=2x+11\\ f(x)+2f(1-x)=-2x+13\end{cases}$ se obține soluția unică, $f(x)=2x+3$.

49. Punând în loc de x, $-x$ obținem $\begin{cases}4f(x)+3f(-x)=5x\\ 3f(x)+4f(-x)=-5x\end{cases}\Rightarrow f(x)=5x.$

50. Fie $f(x)=ax+b\Leftrightarrow (f\circ f)(x)=a^2x+ab+b=4x+6\Rightarrow f_1(x)=2x+2,\ f_2(x)=-2x-6.$

51. $b=6.$

52. $2f(x+4)+3f(5-x)=\begin{cases}7x+7, & x\le -2\\ -3+x, & x\in(-2;3)\\ -8x+21, & 3\le x\end{cases}\Rightarrow x=\frac{7}{4}.$

53. Punând în loc de x,$-x$ obținem relația $f(x)+2f(-x)=\begin{cases}x-3, & \text{pt. } x\in[-1,\infty)\\ -x+3, & \text{pt. } x\in(-\infty,-1)\end{cases}$. Pentru $x\in(-\infty,-1)$ avem deci relațiile $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=-x-3\\ f(x)+2f(-x)=-x+3\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{-x-9}{3}$. Analog, pt. $x\in[-1,1]$ avem relațiile $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=-x-3\\ f(x)+2f(-x)=x-3\end{cases}$, iar pt. $x\in(1,\infty)$ relațiile $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=x+3\\ f(x)+2f(-x)=x-3\end{cases}$ de unde $f(x)=\begin{cases}\frac{-x-9}{3}, & \text{pt. } x\in(-\infty,-1)\\ -x-3, & \text{pt. } x\in[-1,1]\\ \frac{x+9}{3}, & \text{pt. } x\in(1,\infty)\end{cases}$

54. $f(x)=\begin{cases}-\frac{7x}{5}+\frac{14}{5}, & x<-3\\ -5x+\frac{4}{5}, & -3\le< x\le 3\\ \frac{2x}{5}-\frac{11}{5}, & 3<x\end{cases}$

55. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{4}-\frac{19}{8}, & x<-1\\ 1-\frac{x}{2}, & -1\le x\le 1\\ -\frac{x}{4}+\frac{17}{8}, & 1<x\end{cases}$

56. a) Pentru $x=2\Rightarrow mf(2)+nf(-2)=-7\Leftrightarrow 4m-5n=-7.$

Pentru $x=-2\Rightarrow mf(-2)+nf(2)=2\Leftrightarrow -5m+4n=2$ și rezolvând sistemul $\begin{cases}4m-5n=-7\\ -5m+4n=2\end{cases}$ obținem $m=2,n=3.$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{23}{5}, & x<-1\\ -x+\frac{4}{5}, & -1\le x\le 1\\ -\frac{x}{5}+\frac{22}{5}, & 1<x\end{cases}$

58. a) $m\ge 2$; b) $m=2$.

59. $x\in\left(\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right]$.

60. a) Căutăm o funcție $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de forma $f(x)=ax+b$ astfel încât $f(f(x))=9x+1\Longrightarrow a^2x+ab+b=9x+1\Longleftrightarrow a=\pm 3$ și $b\in\left\{\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right\}$. Funcțiile $f_1(x)=\begin{cases}3x+\frac{1}{4}, & \text{pt. } x\in\mathbb{Q};\\ -3x-\frac{1}{2}, & \text{pt. } x\in R\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

și $f_2(x)=\begin{cases}-3x-\frac{1}{2}, & \text{pt. } x\in\mathbb{Q};\\ 3x+\frac{1}{4}, & \text{pt. } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ satisfac enunțul.

b) Avem $(f\circ f)(x)=9x+1$. Înlocuind pe x, cu $f(x)$ obținem $f(f(f(x)))=9f(x)+1\Longleftrightarrow f(9x+1)=9f(x)+1$. Înlocuind din nou pe x cu $f(x)$ obținem $f(9f(x)+1)=9(9x+1)+1\Longleftrightarrow f(9f(x)+1)=81x+10$.

Ecuația din enunț devine $81x+10=91\Rightarrow x=1$.

62. Funcția este crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,1)$ și $(2,\infty)$. Pentru a fi crescătoare pe $[1,2]$ este necesar ca $a>0$. Pentru a fi crescătoare pe $(-\infty,2]$ este necesar ca $f_1(1)\le f_2(1)$ unde $f_1(x)=2x+1$ și $f_2(x)=ax+1$. Pentru a fi crescătoare pe $[1,+\infty)$ este necesar ca $f_2(2)\le f_3(2)$ unde $f_3(x)=x+5$. În concluzie f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă: $\begin{cases}a>0\\ f_1(1)\le f_2(1)\\ f_2(2)\le f_3(2)\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}a>0\\ 3\le a+1\\ 2a+1\le 7\end{cases}\Rightarrow a\in[2,3]$.

63. $a\in[-5,-2]$.

64. $\begin{cases}a>0\\ -3\le -a+b\\ a+b\le 3\end{cases}$

65. O condiție necesară ca f crescătoare pe $\mathbb{R}$ este ca f crescătoare pe $(-1,\infty)$, deci $a>0$. $(b,a+1)\in G_f\Rightarrow a+1=f(b)$. Dacă $b\in(-\infty,-1]\Rightarrow a+1=b+a\Rightarrow b=1$, iar dacă $b\in(-1,\infty)\Rightarrow ab+b=a+1$ și cu $a>0\Rightarrow b=1$. În concluzie $b=1$. Pentru ca f crescătoare pe $\mathbb{R}$ se mai impune condiția $f_1(-1)\le f_2(-1)$ unde $f_1(x)=x+a$ și $f_2(x)=ax+1$ și deci $a\in(0,1]$

66. $a \in (0, 2]$

67. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow a^2 + b = b^2 + a \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$. Cum $a \neq b \Rightarrow b = 1 - a$, $a, b \in \mathbb{Z}$, și $a \neq b$.

68. $a \in [2, +\infty)$.

69. $f(x+5) = \begin{cases} 2x+9, & x \leq 4 \\ -x-1, & x > -4 \end{cases}$, $f(4-x) = \begin{cases} x, & x < 3 \\ -2x+7, & x > 3 \end{cases}$ și $2f(x+5) + 3f(4-x) = \begin{cases} 7x+18, & x \leq -4 \\ x-2, & x \in (-4, 3) \\ 19-8x, & x \geq 3 \end{cases}$. Rezultă $2f(x+5) + 3f(4-x) + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 3\}$.

70. $2f(x+4) - 3f(3-x) = \begin{cases} x+14, & x \leq -4 \\ -5x+6, & x \in (-4, 3) \\ 4x-27, & x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-25; 1; 4\}$.

71. a) $m = 2$; b) $m = \frac{2}{3}$; c) $m = -1$; d) $m \in (-\infty, 4)$.

Teste de evaluare

Test 1 **pagina 137**

1. $x = 2$.

2. $x \in (-\infty, 2)$.

3. $A(-1; -1)$.

4. $a = -2; b = 3$.

5. $x = -4, y = 6$.

6. $(f \circ f)(x) = \begin{cases} x+4, & x < -3 \\ 2x+7, & -3 \leq x < -1 \\ 4x+9, & x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x < -4$.

7. $k = 20$.

8. $g(x) = -2x - 1$.

9. $(-\infty, 2]$.

Test 2 **pagina 138**

1. $x \in \left(-1; \frac{5}{4}\right]$.

2.

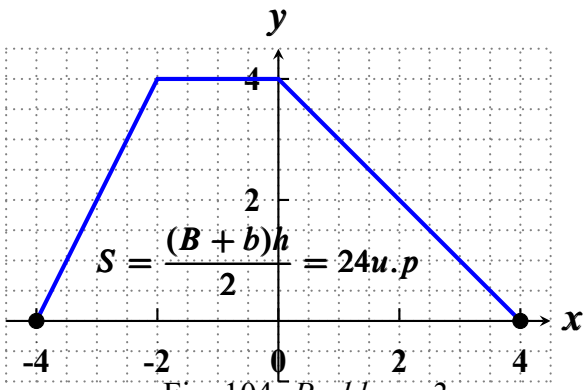


Fig. 104: *Problema 2*

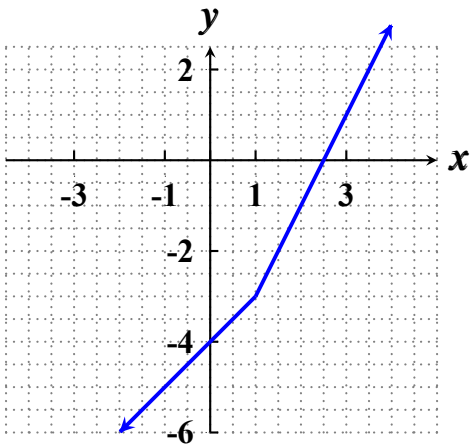


Fig. 105: *Problema 4*

3. a) $\begin{cases} y = f_0(x) \\ y = f_1(x) \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 2$ și se arată că $A(0;2) \in G_{f_m},\ \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) $f(-1) = 2 \Rightarrow m = 1$; c) $m \in (-\infty, -1) \cup (2; +\infty)$; d) $f(m) = m + 3 + \dfrac{2}{m-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 3; 4\}$.

4. a) $a > 0,\ f(-1) = -5;\ f(1) = 3 \Rightarrow a = 2,\ b = -5$.

b) Vezi Figura 103. $f(x) < 0$ pentru $x < \dfrac{5}{2}$; $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$; $f(x) > 0$ pentru $x > \dfrac{5}{2}$.

Test 3 **pagina 138**

1. a) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x_1 - 1}{x_1 + 1} = \dfrac{3x_2 - 1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow (3x_1 - 1)(x_2 + 1) = (3x_2 - 1)(x_1 + 1) \Rightarrow x_1 = x_2$.

b) $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{3x - 1}{x + 1} = y \Rightarrow x = \dfrac{y + 1}{3 - y},\ y \neq 3$.

c) Vezi tabelul de semne.

x	$-\infty$			-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	$+$	‖	$-$	0	$+$	$+$	

2.

a)

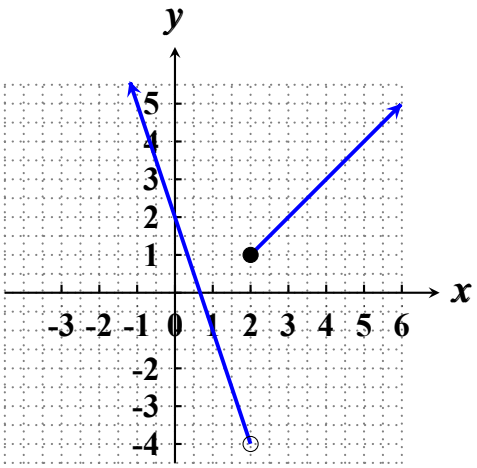


Fig. 106: *Problema 3*

b) f strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty, 2)$ și strict crescătoare pentru $x \in [2, +\infty)$;
c) $G_f \cap Ox \Rightarrow A(1;0)$ și $G_f \cap Oy \Rightarrow B(0;2)$;
d) $Im\ f = (-4; +\infty)$;
e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 14 - 6x & x \leq 0 \\ 2 + x & 0 < x \end{cases}$

3. $ii)$ $g(f(2)) = 2 \Rightarrow f(g(f(2))) = f(2)$. Compunerea funcțiilor fiind asociativă, obținem $(f \circ g)(f(2)) = f(2)$ și ținând cont de $i)$ obținem $f^2(2) - 3f(2) + 4 = f(2) \Leftrightarrow (f(2) - 2)^2 = 0 \Rightarrow f(2) = 2$ și din $ii) \Rightarrow g(2) = 2$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in (-\infty, 0) \\ -x + 2, & x \in [0; 2] \\ 2x - 4, & x \in (2; +\infty). \end{cases}$

1. a) $f(x) = 3x^2 - 3x$; b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; c) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$; d) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

2. a) $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{63}{8}$; b) $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$; c) $f(x) = -(x-2)^2 + 9$; d) $f(x) = (x+2)^2$; e) $f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$; f) $f(x) = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$; g) $f(x) = 5\left(-\frac{1}{20}\right)^2 + \frac{239}{80}$; i) $f(x) = -\frac{7}{10}\left(x - \frac{5}{7}\right)^2 + \frac{53}{70}$; j) $f(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{16}$.

3. a) $x \in \{-7; 0\}$; b) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$; c) $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; d) $x \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$; e) $x \in \{-3; 3\}$; f) $x \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}$; g) $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$; h) $x \in \left\{\frac{2 \pm \sqrt{29}}{3}\right\}$; i) $x \in \left\{\frac{-10 \pm \sqrt{30}}{7}\right\}$; j) $x \in \{1 \pm \sqrt{3}\}$; k) $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; l) $x \in \left\{-\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right\}$.

4. a) 2; b) 1; c) 2; d) 2; e) 2; f) 0.

5. a) $x = 2$; b) $x \in \{-8; 0\}$; c) $x \in \{0; 8\}$; d) $x \in \{4; 5\}$; e) $x \in \left\{-\frac{13}{5}; 0\right\}$.

6. *Indicație.* Considerăm ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$ și determinăm coeficienții a, b, c.
a) $a = 1, b = -b^2 + 4ac, c = 5 \Rightarrow (a, b, c) \in \{(1, -5, 5), (1, 4, 5)\}$;

b) $a=1,b=1,c=2(b^2-4ac)\Rightarrow (a,b,c)\in\left\{(1,1,\frac{2}{9})\right\}$;

c) $a=1,b=4ac-b^2,c=-\frac{b}{a}\Rightarrow (a,b,c)\in\{(1,0,0),(1,-5,5)\}$;

d) $a=b^2-4ac,b=-\frac{c}{a},c=-\frac{b}{a}\Rightarrow (a,b,c)\in\{(-1;-2-\sqrt{3},-2-\sqrt{3}),(-1;-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{3}),(-1;-2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}),(-1;-2+\sqrt{5},2-\sqrt{5})\}$

e) $a=1,b=-\frac{c}{a},c=b^2-4ac\Rightarrow (a,b,c)\in\{(1,0,0),(1,-5,5)\}$

f) $a=1,b=\frac{c}{a},c=-\frac{b}{a}+1\Rightarrow a=1,b=c=\frac{1}{2}$.

7. a) $x\in\{2;3;4\}$; b) $x\in\left\{-\frac{3}{2};1;2\right\}$ c) $x\in\{1,2,3\}$; d) $x\in\{2;4\}$.

8. a) $x\in\{-3;-1;1;3\}$; b) $x\in\{-1,1\}$; c) $x\in\varnothing$; d) $x\in\left\{-1;-\frac{5\sqrt{17}}{17};\frac{5\sqrt{17}}{17};1\right\}$; e) $x\in\{-3;1\}$;

f) $x\in\left\{-\sqrt[3]{\frac{26}{3}};2\right\}$.

9. a) $\left\{-1,3,1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\right\}$; b) $x\in\{-2;1\}$; c) $x\in\left\{\frac{1}{2}(3-\sqrt{17});\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})\right\}$;

d) $x\in\left\{1;2;\frac{1}{2}(3-\sqrt{13});\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})\right\}$.

10. a) $x\in\left\{-4;-1;\frac{1}{2}(-5-\sqrt{41});\frac{1}{2}(-5+\sqrt{41})\right\}$; b) $x\in\{1-2\sqrt{5};1-\sqrt{5};1-\sqrt{5};1+2\sqrt{5}\}$; c) $x\in\{-4-\sqrt{10};-4;-4+\sqrt{10}\}$; d) $x\in\{-3-2\sqrt{6};-3+2\sqrt{6};-3-\sqrt{17};-3+\sqrt{17}\}$; e) $x\in\{2;3\}$.

11. a) $x=-2$; b) $x\in\{-\sqrt{2};\sqrt{2};5\}$; c) $x=1$; d) $x=-9$; e) $x=5$; f) $x\in\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3}{2}\right\}$.

12. Ecuațiile sunt echivalente cu: a) $(x^2+x-m)(x^2-x+m)=0$; b) $(x^2-3x+m)(x^2-x+m)=0$; c) $(x^2-x+m)(x^2+2x-m)=0$; d) $(x^2-x+m)(x^2-3x+m)=0$.

13. a) $\{m=0;x=0\}$; b) $m=-\frac{3}{2};x=\frac{1}{2}$; c) $\{m=2;x=1\}$; d) $\{m=0;x=1\}$; $\left\{m=-\frac{5}{3};x=-\frac{2}{3}\right\}$; e) $\{m=-1,x=-1\};\{m=0;x=0\};\{m=1;x=1\}$; f) $\{m=-2;x=-1\};\{m=0;x=1\};\{m=1;x=2\}$.

14. a) $m=1$; b) $m=7,\ n=2$; c) $n=1$; d) $m=1,\ n=-2$; e) $m=4,\ n=2$

16. a) $x_i,i=1;2$ verifică $x_i^2+x_i-13=0\Rightarrow \frac{x_1}{x_2^2+x_2-12}+\frac{x_2}{x_1^2+x_1-12}=\frac{x_1}{x_2^2+x_2-13+1}+\frac{x_2}{x_1^2+x_1-13+1}=x_1+x_2=-1$; b) $\frac{x_1}{x_2^2+2x_2-13}+\frac{x_2}{x_1^2+2x_1-13}=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=-\frac{37}{13}$; c) Se arată că $S_n=-S_{n-1}+13S_{n-2}$ și inducție după n.

17. a) $\frac{43}{3}$; b) $\frac{79}{21}$; c) $\frac{239}{101}$; d) Cum $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=d>0\Rightarrow d^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}\Leftrightarrow d^2=7+2\sqrt{3}\Rightarrow d=\sqrt{7+2\sqrt{3}}$; e) $\sqrt{37}$; f) $46\sqrt{37}$; g) Cum $x_1^2-7x_1+3=0\Rightarrow x_1^2=7x_1-3$. Analog $x_2^2=7x_2-3\Rightarrow \frac{x_1^2-3x_1+4}{x_2^2-3x_2+4}+\frac{x_2^2-3x_2+4}{x_1^2-3x_1+4}=\frac{4x_1+1}{4x_2+1}+\frac{4x_2+1}{4x_1+1}=\ldots=\frac{746}{77}$.

18. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3+3\Leftrightarrow x_1x_2(x_1+x_2)+1=0\Leftrightarrow \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)+1=0\Leftrightarrow a^2=bc$.

19. a) $m=\frac{2}{9}$; $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{2}{3}$; b) $m=-\frac{3}{4}$, $x_1=-\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3}{2}$; c) $m=-6$; $x_1=-2$; $x_2=3$; d) $m=-6$; $x_1=-2$; $x_2=3$; e) $m=0$, $x_1=0$; $x_2=1$; f) $m=-2$; $x_1=-1$; $x_2=2$.

20. $m\in\{7;11\}$.

21. a) $4x_1x_2-x_1-x_2-6=0$; b) $11(x_1+x_2)-4x_1x_2+1=0$; c) $2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4=0$; d) $x_1^2x_2^2+x_1x_2+x_1+x_2+1=0$; e) $2x_1x_2+x_1+x_2-3=0$; f) $(x_1-x_2)^2-6(x_1+x_2)-9=0$.

22. a) $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=4\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)=2\Leftrightarrow (a+1)^2-(a^2-3)-2(a+1)=2$.

b) $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=4\Rightarrow \begin{cases}(x_1-1)^2\le 4\\(x_2-1)^2\le 4\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}-2\le x_1-1\le 2\\-2\le x_2-1\le 2\end{cases}\Rightarrow x_{1,2}\in[-1;3]$.

23. a) $(x,y)\in\{(5,10),(10,5)\}$; b) $(x,y)\in\{(2,3),(3,2)\}$; c) $(x,y)\in\{(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}),(2+\sqrt{2},2-\sqrt{2})\}$; d) $(x,y)\in\{(-2,3),(3,-2)\}$.

24. a) $(x,y)\in\{(-11,-9),(-9,-11),(9,11),(11,9)\}$; b) $(x,y)\in\{(5,7),(7,5)\}$; c) $(x,y)\in\{(2,5),(5,2)\}$; d) $(x,y)\in\{(2,3),(3,2)\}$; e) $(x,y)\in\{(2,3),(3,2)\}$; f) $(x,y)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

25. a) $\max f(x)=\frac{37}{4}$; b) $\min f(x)=-\frac{49}{4}$; c) $\min f(x)=-\frac{25}{24}$; d) $\max f(x)=\frac{1}{20}$; e) $\min f(x)=\frac{1}{4}$; f) $\max f(x)=\frac{45}{4}$.

26. a) $V_{min}(-2,-2)$; b) $V_{min}\left(\frac{1}{3},-\frac{16}{3}\right)$; c) $V_{max}(2,0)$; d) $V_{min}(3,0)$; e) $V_{max}(3,9)$; f) $V_{max}(-2,10)$.

29. $\begin{cases}m<0\\-\frac{\Delta}{4a}=-1\end{cases}\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$.

30. $m=2\sqrt{2}$.

31. a) $a=-6$; $b=8$; b) $a=4$; $b=8$; c) $a=-14$; $b=58$.

32. $\alpha=\frac{-m+1}{m}, \beta=\frac{m-1}{m}$.

33. $(a,b,c) \in \left\{(-4,4,0), \left(-\frac{1}{4},4,-15\right)\right\}$.

34. a) $y_V = -1 \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$; b) $E(m) = \frac{1}{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2} = \frac{1}{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - m + 1} = \frac{4}{4m^2+5} \Rightarrow E_{max} = \frac{4}{5}$.

35.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

d) $f(x) = x^2 + 6x$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\infty$

e) $f(x) = -x^2 - 4x + 6$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

f) $f(x) = -x^2 + 4x$

36.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$		

c) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

d) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

e) $f(x) = 25 - x^2$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$		

f) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

38. a) $x \in (1;2) \cup (5,+\infty)$; b) $x \in (-1;1)$; c) $x \in (0,1) \cup (2,5)$; d) $x \in (-4,-3) \cup (-3,-1) \cup (2,4)$.

39. a) $x \in \left(-1-\sqrt{2}, \frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}, -1+\sqrt{2}\right)$; b) $x \in (-3,-2) \cup \left(-\frac{13}{11}, -1\right) \cup (1,2) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ c) $x \in (-\infty, -1+\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$; d) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \{2\}$; e) $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$; f) $x \in (1,6)$.

41. a) $m \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$; b) $m \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ c) $m \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ d) $m \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

42. a) $m \leq 0$; b) $m = 0$; c) $m < 0$; d) $m > 0$.

48. a) $m \in (-1,0)$; b) $m \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; c) $m \in \left[\frac{1}{8}, +\infty\right)$; d) $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}, \right)$; e) $m = 0$.

50. a) $m \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$; b) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; c) $m \in (-7, 1)$.

52. $a \geq \frac{10}{3}$.

53. $m \in [-11; 5]$.

54. $m \in \left(\frac{1}{4}, 1+2\sqrt{2}\right)$.

55. $a = 3m-2, b = -2(m+4), c = m+4$.

a) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(2) < 0 \\ a \cdot f(3) > 0 \\ \frac{-b}{2a} < 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{19}{11} < m < \frac{20}{9}$; b) $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) < 0 \\ af(0) < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{3} < m < \frac{2}{3}$; c) $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) < 0 \\ -\frac{b}{2a} > -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{2}{3} < m < 3$; d) $\begin{cases} \Delta >= 0 \\ a \cdot f[0] > 0 \\ a \cdot f[3] > 0 \\ 0 < -\frac{b}{2a} < 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{19}{11} < m \leq 3.$

56. a) $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; b) $x \in \varnothing$; c) $m \in \left(-1, -\frac{3}{5}\right)$; d) $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

57. a) $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$; b) $x \in \left(\frac{2}{5}, 1\right)$; c) $x \in \varnothing$; d) $x \in \varnothing$.

58. a) $m \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$; b) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

59. a) Notăm $t = \sqrt[3]{x^2+1} \geq 1$ și $H = \{m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mid (m+1)t^2 + 2(m-3)t + m > 0, \forall t \geq 1\}$ $\Rightarrow H = \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$; b) Două rădăcini reale.

62.

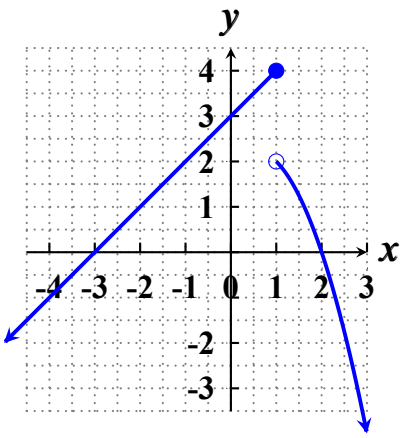


Fig. 108: *Prob 62 f*

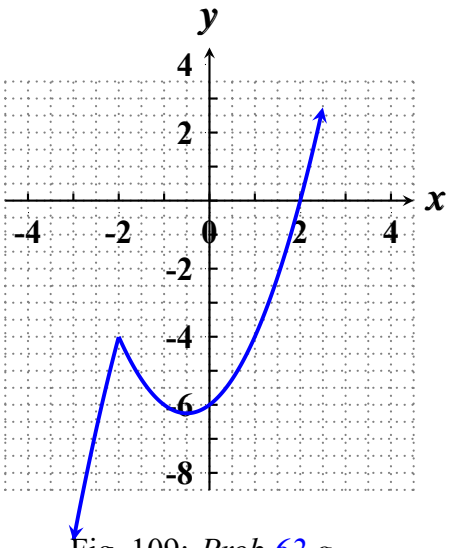


Fig. 109: *Prob 62 g*

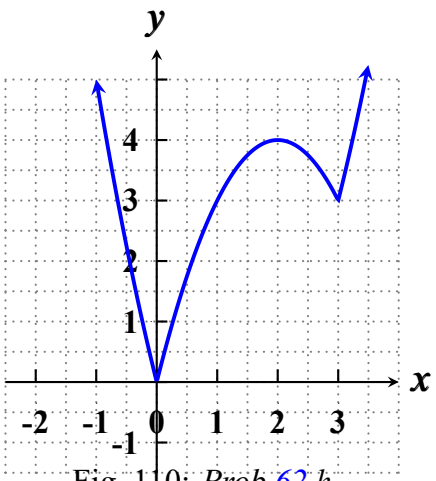


Fig. 110: *Prob.62 h*

63.

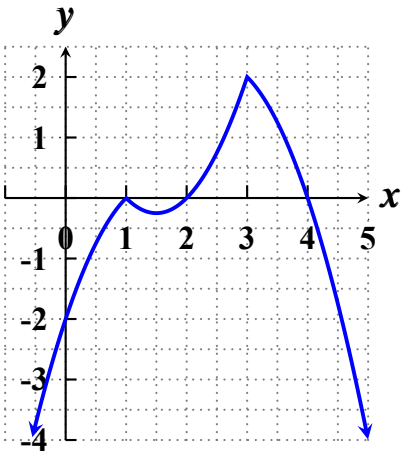


Fig. 111: *Prob 53 a*

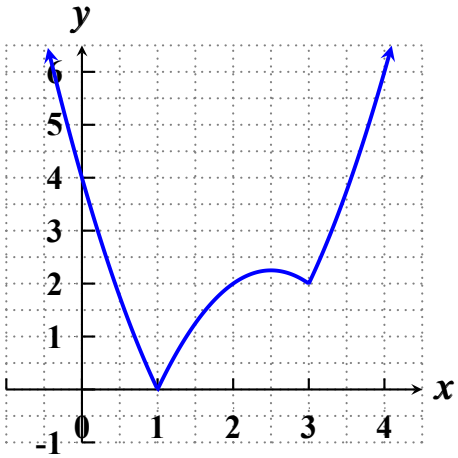


Fig. 112: *Prob 53 b*

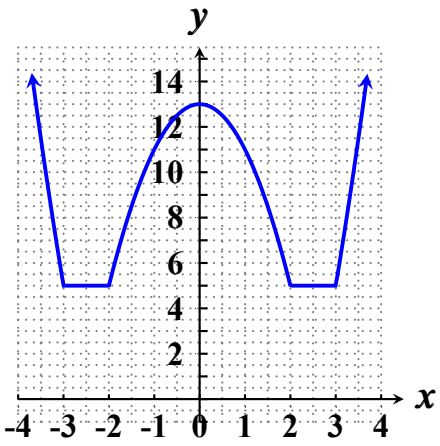


Fig. 113: *Prob 53 c*

64. a) $a \in \left(-\frac{49}{48}, +\infty\right)$; b) $a \in \left(-\frac{13}{12}, +\infty\right)$; c) $a \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; d) $m \in \mathbb{R}$; f) $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

65. a) $a \in \left\{-\frac{18}{5}, -\frac{2}{3}\right\}$; b) $a \in \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$; c) $a \in \left\{-\frac{8\sqrt{85}}{85}, \frac{8\sqrt{85}}{85}\right\}$; d) $a \in \left\{-\frac{2}{3}, 3\right\}$;
e) $a \in \left\{\frac{-1-2\sqrt{6}}{3}, \frac{-1+2\sqrt{6}}{3}\right\}$;

66. a) $m \in (-2,-1) \cup (8,\infty)$; b) $m \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$; c) $m \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$.

67. a) $m \in \left(-2, -\frac{6}{5}\right) \cup (2, \infty)$; b) $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; c) $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

68. a) $m = 0$; b) $m = 1$; c) $m = -\frac{3}{4}$.

69. a) parabola $y = -x^2 - 2x + 5$; b) dreapta $x + 2y - 1 = 0$; c) dreapta $4x - y + 3 = 0$ d) parabola $y = -x^2 + 2x - 2$; e) parabola $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{19}{3}$; f) parabola $y = 2x^2 - 8x + 3$.

70. a) $A(1, 1)$; b) $A(1, -9)$; c) $A(1, 2)$ și $B(2, 0)$; d) $A(1, 0)$.

71. a) $\operatorname{Im} f = [-1, +\infty)$; b) $\operatorname{Im} f = [-1, 8]$; c) $\operatorname{Im} f = [-14, -5] \cup \left[-2, \frac{9}{4}\right]$; d) $\operatorname{Im} f = [-1, +\infty)$.

72. a) $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{13}{3}, -1\right)$; b) $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right)$; c) $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, \frac{2}{7}\right]$; d) $\operatorname{Im} f = (-\infty, -9 - 2\sqrt{21}) \cup (-9 + 2\sqrt{21}, +\infty)$; e) $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{3}, 5\right]$.

73. $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$ pentru $x = -1$.

74. $m = 4$.

75. Deoarece $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ dubla inegalitate este echivalentă cu

$$\begin{cases} x^2 + mx - 2 > -3(x^2 - x + 1) \\ x^2 + mx - 2 < 2(x^2 - x + 1) \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (m-3)x + 1 > 0 \\ x^2 - (m+2)x + 4 > 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = (m-3)^2 - 16 < 0 \\ \Delta_2 = (m+2)^2 - 16 < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-1; 2).$$

76. *Soluție 1*: $-3 \le \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 - x + 1} \le 2, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (m-3)x + 4 \ge 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ -x^2 + (m+2)x - 1 \le 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta_1 = (m+3)^2 - 64 \le 0 \\ \Delta_2 = (m+2)^2 - 4 \le 0 \end{cases} \Rightarrow m \in [-4; 0].$$

Soluție 2: Fie $\frac{x^2 + mx + 1}{x^2 - x + 1} = y \Leftrightarrow (1-y)x^2 + (m+y)x + 1 - y = 0, \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \ge 0 \Rightarrow (m+y)^2 - 4(1-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (2+m-y)(-2+m+3y) \ge 0$; $\left(y_1 = m - 2, y_2 = \frac{2-m}{3}\right)$ și deosebim cazurile

1) $m < -1 \Rightarrow y \in \left[m - 2, \frac{2-m}{3}\right] \subset [-3, 2] \Rightarrow m \in [-4, -1)$.

2) $m = -1 \Rightarrow y = 1 \in [-3; 2]$.

3) $m > -1 \Rightarrow y \in \left[\frac{2-m}{3}, m + 2\right] \subset [-3, 2] \Rightarrow m \in (-1, 0]$.

Din 1),2) și 3) $m \in [-4, 0]$.

77. $m \in [-11; 5]$.

78. $m = 1$.

79. $m \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

80.

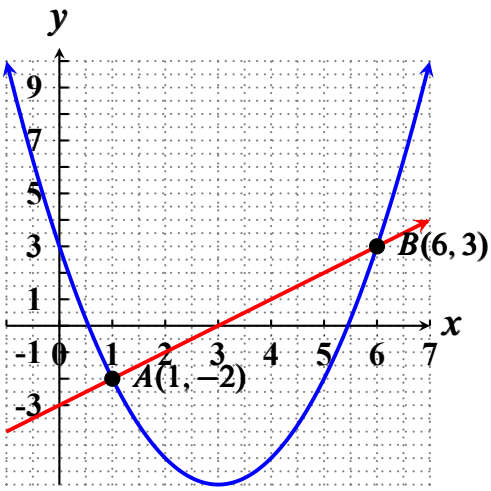


Fig. 114: *Prob 67 a*

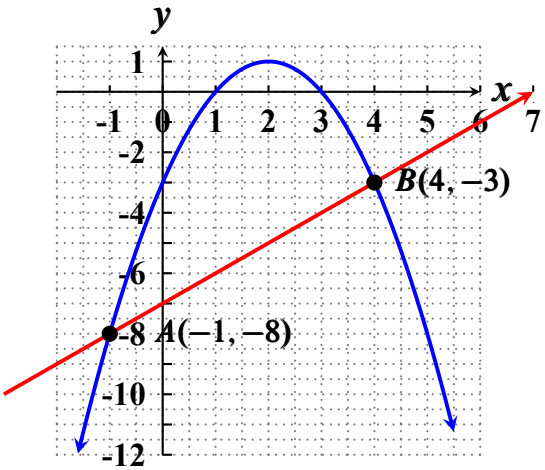


Fig. 115: *Prob 67 b*

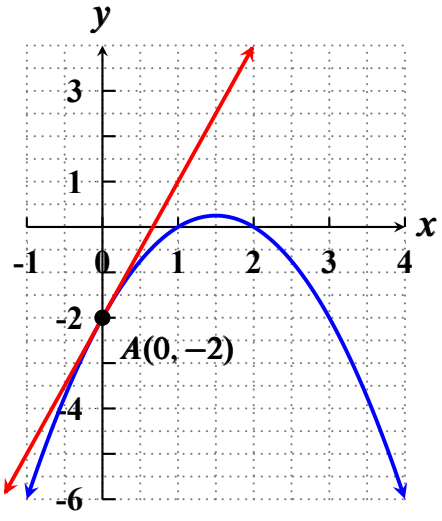


Fig. 116: *Prob.67 c*

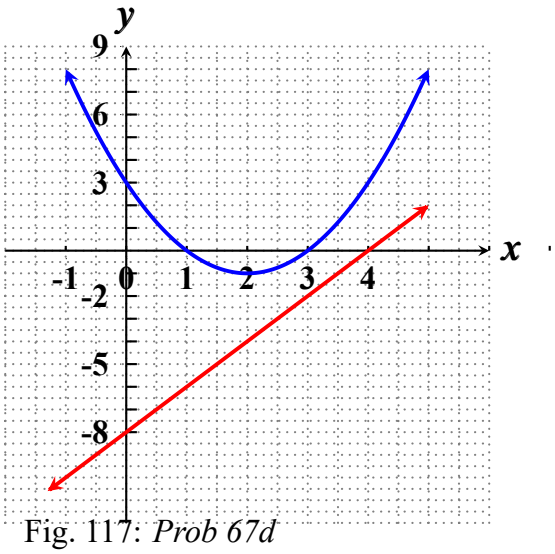


Fig. 117: *Prob 67d*

81. a) $m \in (1; 6)$; b) $m \in \{1; 6\}$. Pentru $= 1 \Rightarrow T(-1, -1)$, iar pentru $m = 6 \Rightarrow T\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

82. a) $m \in \{-2; 2\}$; b) $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

83. a) $m \in (-4;0)$; b) $m \in \{-4;0\}$; c) $m \in (-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$.

84. a) $(x,y) \in \{(1,1);(2,0)\}$; b) $(x,y) \in \{(-1,6);(1,0)\}$; c) $(x,y) \in \{(1,-3)\}$; d) $(x,y) \in \varnothing$.

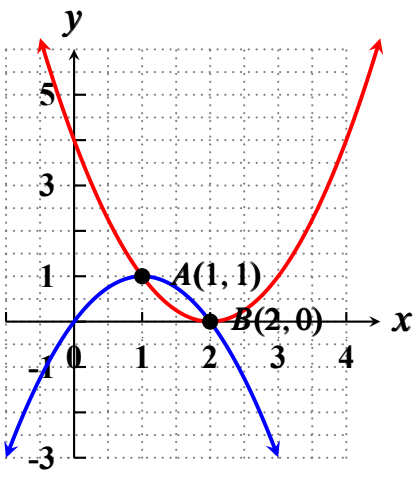


Fig. 118: *Prob 71 a*

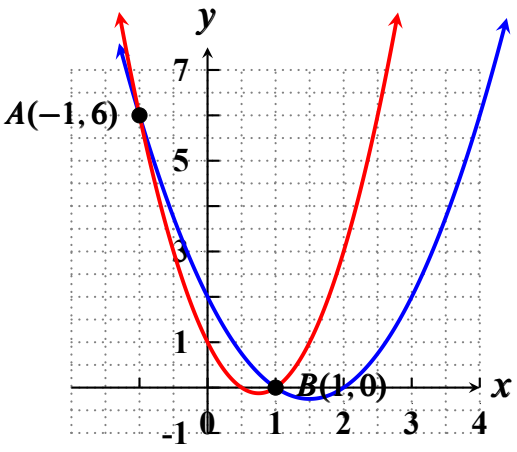


Fig. 119: *Prob 71 b*

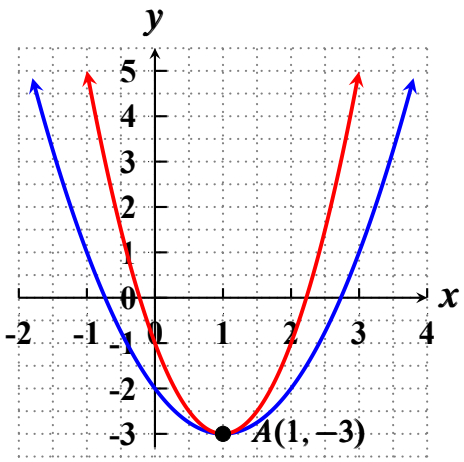


Fig. 120: *Prob.71 c*

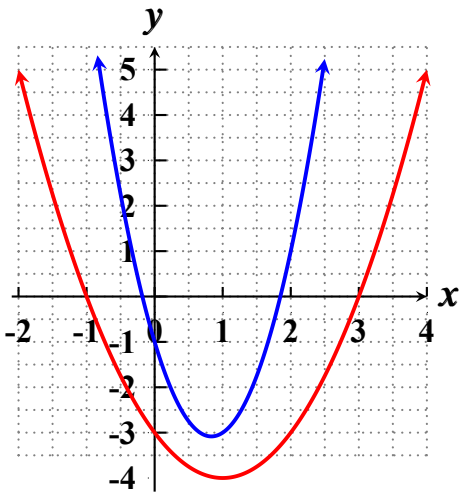


Fig. 121: *Prob.71 d*

85. a) $a \in \left(\frac{2}{3};2\right)$; b) $a \in \left\{\frac{2}{3};2\right\}$; c) $a \in \left(-\infty,\frac{2}{3}\right) \cup (2,+\infty)$.

86. a) $a \in (-\infty,-1) \cup \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$; b) $x \in \left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$; c) $x \in \left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

87. $x=1$ rădăcină $\Rightarrow m^2+a^2-2a+1-2am=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(a-m)^2=0 \Rightarrow a=1, m=a=1, x_2=-\frac{1}{3}$.

88. Dacă $x_1,x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 \cdot x_2-3(x_1+x_2)=\frac{5}{2} \in \mathbb{Z}$ fals.

89. $a=1;\ b=4.$

90. $a=5; b=1.$

91. Fie $f(x)=x^2+ax+b.$ Se impune condiția $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)<0\Rightarrow b\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{a}{3}+b\right)<0$ Se poate lua de exemplu $a=3, b=-1$ sau $a=-4, b=1.$

92. a) Pentru $a=2, b=1\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow 1\in A$; b) Pentru $a=2, b=-1\Rightarrow f(1+\sqrt{2})=0\Rightarrow 1+\sqrt{2}\in A$; c) $\begin{array}{l|l} x_1^2-ax_1+b=0 & \cdot x_1^{n-1} \\ x_2^2-ax_2+b=0 & \cdot x_2^{n-1} \end{array}\Rightarrow \begin{array}{l} x_1^n=ax_1^{n-1}-bx_1^{n-2} \\ x_2^n=ax_2^{n-1}-bx_2^{n-2} \end{array}$ și prin adunarea celor două relații, rezultă $x_1^n+x_2^n=a(x_1^{n-1}+x_2^{n-2})-b(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}), \forall n\geq 2$ d) Pentru $a=-2, b=-1\Rightarrow f(\sqrt{2}-1)=0\Rightarrow \sqrt{2}-1\in A\Rightarrow \sqrt{2}-1\in A\cap\left(0;\frac{1}{2}\right).$

93. Ținând cont de relațiile dintre rădăcini și coeficienți avem: $\begin{cases} a+b=2b-1 \\ a\cdot b=3b-4a \end{cases}\Rightarrow (a,b)\in \{(-3,-2);(1;2)\}.$

95. $\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)=((b-c)^2-a^2)((b+c)^2-a^2)=(a-b-c)(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)<0.$

96. $m\in[5,+\infty).$

97. $A(1,0), B(m,0), V\left(\frac{m+1}{2},\frac{(m-1)^2}{4}\right)\Rightarrow S=\frac{(m-1)^3}{8}=1\Rightarrow m=3.$

98. a) $\Delta=1>0, \forall a\in\mathbb{R}$; b) $a\in\left[0,\frac{6}{5}\right]$

100. a) $y=2x^2-8x+3$; b) $x_1x_2\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$; c) $x_1^2+x_2^2-4x_1-4x_2+3=0$; d) $\frac{x_1}{x_2}\in(-\infty,7-2\sqrt{15}]\cup[7+2\sqrt{15},+\infty).$

101. $m\in\left(-\frac{1}{5},0\right)\cup\left(3,\frac{16}{5}\right).$

102. $\Delta_1=a^2-4b;\ \Delta_2=c^2-4d\Rightarrow\Delta_1+\Delta_2=a^2+c^2-4(b+d)=a^2+c^2-2ac=(a-c)^2\geq 0\Rightarrow$ sau $\Delta_1\geq 0$ sau $\Delta_2\geq 0.$

103. $B=\{(a,b)\mid a>0, b\geq -1, 2a+b<1\}$=triunghiul cu catetele egală cu $1\Rightarrow$ Aria B $=\frac{1}{2}.$

104. a) $x\in\{-1;0\}$; b) $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$; c) $m\in\left\{1;\frac{9}{5}\right\}$; d) $m\in\left(1,\frac{9}{5}\right).$

105. a) $\Delta=(m-1)^2+28>0$; b) $m=-13$; c) $x_1^2+x_2^2=m^2-4m+19=(m-2)^2+15\geq 15$ și minimul se atinge pentru $m=2.$

106. a) $m \in [-1;3]$ b) $x_1\left(m^2-3x_1\right)+x_2\left(m^2-3x_2\right)=(m-3)(m^2+9m+9) \Rightarrow m \in \left\{3, \frac{-9 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$.

107. a) $x_1^3+x_2^3=-44$; b) $f(2)+(f \circ f)(2)+(f \circ f \circ f)(2)=6$; c) $f(x)=(x+1)^2-7 \Rightarrow (f \circ f)(x)=((x+1)^2-6)^2-7 \Rightarrow$ minimul funcției $(f \circ f)(x)$ este -7 și se realizează când $(x+1)^2-6=0$. In concluzie $Imf=[-7,+\infty)$.

108. a) $m \in (0,+\infty)$; b) $f(x)=(x-3)^2+m \Rightarrow V_{min}(3,m)$; c) $(f \circ f)(x)=\left(x^2-6x+6\right)^2 \Rightarrow x \in \{3-\sqrt{3};3+\sqrt{3}\}$.

109. Ordonând după puterile lui m avem: $m^2x^2-6mx+x^2-8x+21=0, m \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \Delta_m=36x^2-4x^4+32x^3-84x^2=-4x^2(x^2-8x+12) \geq 0 \Rightarrow x \in [2,6]$.

Notând $mx=y$ avem $y^2-6y+x^2-8x+21=0 \Leftrightarrow x^2-8x+y^2-6y+21=0$ și $\Delta_x=-4(y^2-6y+5) \geq 0 \Rightarrow y=mx \in [1,5]$.

Avem $(1+m^2)x^2-2(4+3m)x+2=0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x=-4(12m^2-24m+5) \geq 0 \Rightarrow m \in \left[1-\frac{\sqrt{21}}{6}, 1+\frac{\sqrt{21}}{6}\right]$.

110. Ecuația se mai poate scrie $m^2x^2-6mx+x^2-8x+24=0$ și cum $m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_m=-x^2(x^2-8x+15) \geq 0 \Rightarrow x \in [3,5]$.

Notând $mx=y \Rightarrow x^2-8x+24+y^2-6y=0$ și $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x=-y^2+6y-8 \geq 0 \Rightarrow y \in [2,4]$.

111.

a) $(x,y) \in \{(1,-2),(6,3)\}$; b) $m \in \left\{1, \frac{15}{4}\right\}$;

c) Pentru $m=2$ este o dreaptă, iar pentru $m \neq 2$ parabole;

d) $m \in (1;2)$; e) $m \in (1;6)$;

f) $g(x)=\begin{cases}-1, & x<-2\\ 2x+3, & -2 \leq x<-1\\ -(x+1)^2, & x \geq -1\end{cases}$

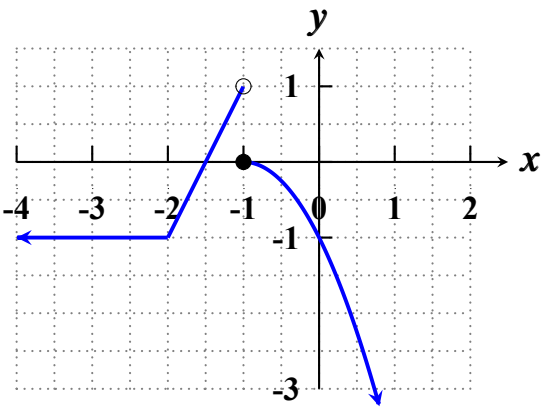


Fig. 122: *Problema 111.*

112. a) $m=-3$; b) $m \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty) \setminus \{-3\}$; c) $A(1;0)$; d) $m \in \left\{-\frac{9}{5};0\right\}$; e) $g(x)=\begin{cases}9x+4, & x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\\ -3x-2, & x \in \left[-\frac{1}{2},1\right)\\ -3x^2+2x+1, & x \in [1,+\infty)\end{cases}$

113. a) $m=1$; b) $m\in(2;3)$; c) $A(1,0)$; d) m=0; e) $g(x)=\begin{cases}-4, & x\in(-\infty,-1)\\ 6x+2, & x\in[-1,1)\\ -3x^2+4x-1 & x\in[1,+\infty)\end{cases}$

114. a) $x_1=m, x_2=\dfrac{6}{m+1}\Rightarrow m\in\{1;2;5\}$; b) $m\in\{-3;-2;2;3\}$;

c) $g(x)=\begin{cases}-3x+4, & x\in(-\infty,-2)\\ -x+8, & x\in[-2,1)\\ 2x^2-8x+6, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$

115. $y=nx+n\Rightarrow a+b=2n$.

116. $m=\dfrac{23}{16}$.

117. a) $y=x^3-x^2-3x+2$; b) $m\in(-2,0)$; c) $m\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

118. $\dfrac{b}{2a}=m, f(m)=m(7+m); f(1)=9m-1\Rightarrow a=-1,\ b=2m,\ c=7m\Rightarrow a+b+c=9m-1$.

119. $A(1,0)\Rightarrow a+b=1$.

120. $A(1,0)\Rightarrow a+b=1$.

121. $m\in(-1,5)$.

122. $\Delta=4m^2-4m+4>0, \forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow A=\{x_1;x_2\}$ și $x_1\neq x_2$.

a) $|A\cap(0,\infty)|=2\Rightarrow 0<x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2m>0\\ x_1x_2=m-1>0\end{cases}\Rightarrow m>1$.

b) $|A\cap(0,\infty)|=1\Rightarrow x_1<0<x_2\Rightarrow x_1x_2<0\Rightarrow m<1$.

c) $|A\cap(0,\infty)|=0\Rightarrow x_1<x_2<0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2m<0\\ x_1x_2=m-1>0\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing$.

d) $|A\setminus(0,\infty)|=1\Rightarrow x_1<0<x_2\Rightarrow m<1$.

123. a) Vezi tabelul de mai jos

m	$-\infty$		-3		-2		8		12		$+\infty$
$\Delta_1=-4m^2+24m+64$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\Delta_2=4m^2-36m-144$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

b) $x_{v1} = x_{v2} \Rightarrow \dfrac{m+4}{m+1} = 1$ imposibil.

c) $\begin{cases} x_{v1} = 1 + \dfrac{3}{m+1} \in \mathbb{Z} \\ y_{v1} = m - 7 - \dfrac{9}{m+1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow (m+1)|3 \Rightarrow m \in \{-4; -2; 0; 2\} \Rightarrow$ punctele de coordonate întregi sunt (0,-8);(-2;0);(4;-16) ;(2;-8).

10.7 Test de evaluare

pag. 163

1.

(a) A $m = 0$; B $m = -1$; ☑ $m = 3$; D $m = \frac{1}{2}$; E $m = -\frac{1}{2}$.

(b) A $m \in \varnothing$; B $m \in (0;1)$; C $m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$; ☑ $m \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$; E $m \in (2, +\infty)$.

(c) A $m = -3$; B $m = 2$; C $m = -1$; ☑ $m = 4$; E $m = 5$.

(d) A $m \in (0, +\infty)$; ☑ $m \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$; C $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; D $m \in \varnothing$; E $m \in (-5, -3)$.

(e) A $m \in \{-1, 1\}$; ☑ $m \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$; C $m = 10$; D $m \in \{-1; 4\}$; E $m = 1$.

(f) A $m = 1$; B $m = \frac{5}{2}$ C $m = -\frac{3}{2}$; D $m \in \{-1; 4\}$; E $m = 1$. ☑ $m = \frac{3}{2}$;

(g) ☑ $m \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$; B $m \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$;
C $m \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$; D $m \in (-\infty, -1) \cup (1; +\infty)$;
E $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. F $m \in (-\infty, -2) \cup (4; +\infty)$;

(h) A $2(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$; B $x_1 + x_2 - 5 = 6x_1x_2$; C $x_1^2 + x_2^2 + 3 = 9x_1x_2$;
D $7x_1^2x_2^2 - 2(x_1 + x_2) = 3$. E $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = 1$; ☑ $x_1 + x_2 + 3 = 8x_1x_2$.

(i) A $m \in (0;1)$; B $m \in (-1;1)$; ☑ $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$; D $m \in \varnothing$;
E $m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; F $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$; G $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Test de evaluare

pag. 164

1. $m = -12$.

2. $x = 1$.

3. $m \in [3; +\infty)$.

4. $m = 9$.

5. patru.

6. $m = 4$

7. $\text{Im}(f) = [1, \infty)$

8. $m \in \{0; 2\}$.

9. $A = \{-2; -1; 1; 2\}$

Test de evaluare **pag. 164**

1. Numărul de funcții din mulțimea M este 9.

Numărul de funcții pentru care ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții reale este 6.

Numărul de funcții pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluții reale este 3.

Numărul de funcții pentru care ecuația $f(x) = 0$ are soluții reale și egale este 1.

Numărul de elemente ale mulțimii S este 4.

Suma elementelor mulțimii S este $-\frac{9}{2}$.

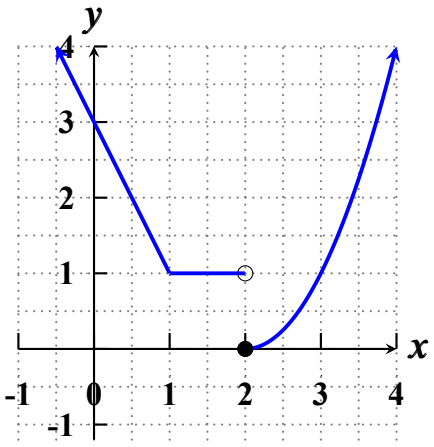
2. $m \in \{7; 11\}$.

3. $a + b = 0$;

Test de evaluare **pag. 165**

1. a) $A(1,1)$; $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; b) $m = 3$; c) Pentru $m = 2$ o dreaptă și pentru $m \neq 2$ parabole. d) $m \in (1; 2)$; e) $m \in (3, +\infty)$; f) $2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 4 = 0$;

g) $g(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{pt. } x \geq 1 \\ 1 & \text{pt. } x \in [1, 2) \\ (x-2)^2 & \text{pt. } x \geq 2 \end{cases}$.



Vectori în plan **pag. 166**

2. a) $AB = 4 \cdot OC$, $AC = 6 \cdot OC$, $OB = 3 \cdot OC$ și deci $3AB - AC + 3OB - 7OC = 8 \Leftrightarrow 12 \cdot OC - 6 \cdot OC + 9 \cdot OC - 7 \cdot OC = 8 \Leftrightarrow OC = 1$, $AB = 4$, $AC = 6$, $OB = 3$. b) A, C, O, B.

9. a) Cercul de centru O și rază $|\overline{AB}|$. b) Dreapta ce trece prin O și este paralelă cu $\overline{AB}$. c) Semidreapta cu originea în O paralelă cu $\overline{AB}$ și având același sens cu $\overline{AB}$.

10. a) $\{\overline{BC}, \overline{OD}, \overline{AO}, \overline{FE}\}$; $\{\overline{OC}, \overline{ED}, \overline{AB}, \overline{FO}\}$; $\{\overline{DE}, \overline{CO}, \overline{BA}, \overline{OF}\}$; $\{\overline{OA}, \overline{EF}, \overline{DO}, \overline{CB}\}$.

b) 1) $\overline{OD}, \overline{AB}, \overline{OC}$; 2) $\overline{OF}, \overline{OC}, \overline{FC}$; 3) $\overline{ED}, \overline{FC}, \overline{AB}$.

11. a) $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{D'C'}\}$; $\{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{A'D'}\}$; $\{\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}\}$.

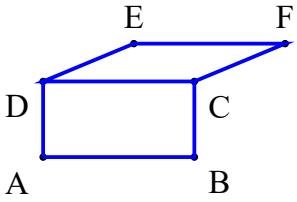
b) $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{D'C'}\}$; $\{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{A'D'}\}$; $\{\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}\}$.

c) $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{D'C'}\}$; $\{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{C'B'}\}$; $\{\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}\}$.

d) $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{D'C'}\}$; $\{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{C'B'}\}$; $\{\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}\}$.

12.

$ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow AB \| DC, AB = DC$. Din $\overline{FE} \sim \overline{DC} \Rightarrow FE \| DC$ și $FE = DC$. Rezultă $AB \| FE$ și $AB = FE$, adică $\overline{AB} \sim \overline{FE}$.



13. Conform distribuției punctelor pe dreaptă A$\underbrace{\qquad}_{a}$B$\underbrace{\qquad\qquad}_{b}C\underbrace{\quad}_{c}$D avem $AC = a + b$, $BD = b + c$, $AB = a$, $CD = c$, $AD = a + b + c$ și $BC = b$ și egalitatea cerută este echivalentă cu $(a + b)(b + c) - ac = (a + b + c)b$ ce se verifică prin calcul.

14. Ordinea punctelor este A,D,B,C unde $CD = a$, $BD = b$, $AB = a$.

$$A\underbrace{\qquad\qquad D}_{a}\overbrace{\qquad}^{b}B\overbrace{\qquad\qquad}^{a-b}C$$

16. a) $\overline{BC} \sim \overline{AB} \sim \overline{CD} \sim \overline{DE}$, $\overline{DB} \sim \overline{CA} \sim \overline{EC}$, b) $\overline{CA} \sim \overline{DB}$.

17. Fie coordonatele punctelor pe dreaptă: $O = 0$, $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$.

$\overline{OC} \sim \overline{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow c - 0 = d - a \Rightarrow c = d - a$. Avem: $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = c - b = (c) - (c - a) = a \\ \overrightarrow{CD} = d - c = (d) - (d - a) = a \end{cases}$.

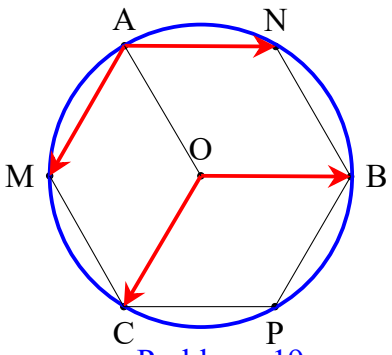
Prin urmare: $BC = |c - b| = |a| = |d - c| = CD$.

19. a) A, B, C sunt vârfurile neconsecutive ale hexagonului înscris în cerc.

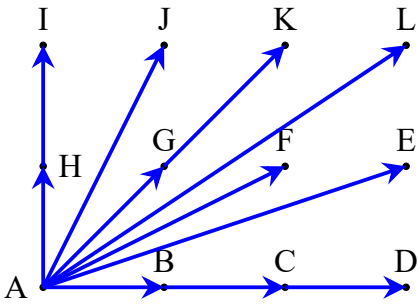
20. a) Fie $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$ cele 12 vârfuri. Obținem 22 de clase de echipolență.

b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}$ respectiv $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{LA}, \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{JA}, \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{IA}$.

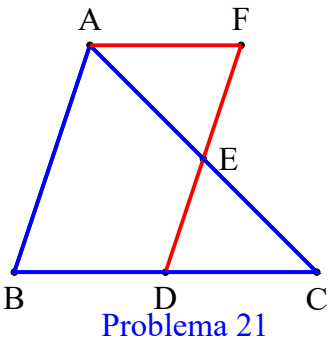
21. $AF \| BC, AB \| FD \Rightarrow$ AFDB paralelogram $\Rightarrow AF = BD$, $AE = EC$ și $ED \| AB \Rightarrow BD = DC$, $AF = DC$ și $AF \| DC \Rightarrow$ ADCF paralelogram și deci $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC}$.



Problema 19



Problema 20



Problema 21

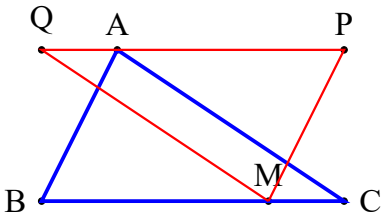
22. a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow BMPA$ paralelogram$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow AP \| BC$ (1)

$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow QMCA$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow QA \| BC$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $AP \| AQ$ și deci Q, A, P sunt coliniare.

b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BM}|$; $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow |\overrightarrow{QA}| = |\overrightarrow{MC}|$ și $QP = QA + AP = MC + BM = BC$

c) $QBCP$ paralelogram $\Rightarrow QC \cap BP = \{O\}$și $BO = OP$; $ABMP$ paralelogram $BO = OP \Rightarrow O \in AM$. În concluzie $QC \cap BP \cap AM = \{O\}$.



23. Se arată că $\triangle ANO \equiv \triangle BQO, \triangle AMO \equiv BPO, \triangle OMN \equiv POQ \Rightarrow \triangle AMN \equiv \triangle BPQ \Rightarrow MN = QP$ și cum $\widehat{NMO} = \widehat{QPO} \Rightarrow MN \| QP$ și deci $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Test de evaluare **pag.170**

1. a) F; b) A; c) F; d) A; e) A; f) A; g) A.

2. $MN = \dfrac{AC}{2} = QP$ și $MN \parallel AC \parallel QP$.

3. 8.

4. Segmentul [MD].

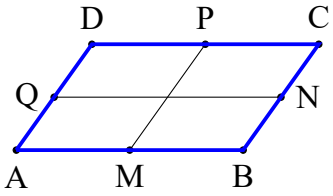
5. $n = 20$.

6. a) $d = R - r$ sau $d = R + r$; b) $R - r < d < R + r$; c) $d < R - r$ sau $d > R + r$.

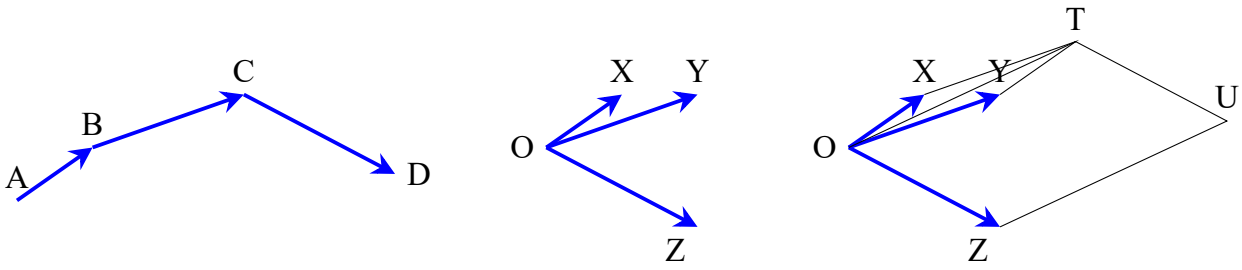
Adunarea vectorilor **pag.171**

2. a) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$;

b) $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$; c) $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$; d) $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC}$; e) $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{AO}$; f) $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$.



4.



$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{YT} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{ZU} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TX} = \overrightarrow{ZO} + \overrightarrow{YO} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$.

5. a) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$.

b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FB}$.

6. a) $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DF}$; b) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF}$; c) $\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA}$; d) $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CG}$; e) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$; f) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD}$; g) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BA}$; h) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EB}$; i) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}$; j) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD}$; k) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

8. a) Folosind (1.2) grupăm vectorii aflați în situația (1.1) și apoi aplicăm asociativitatea și suma se mai scrie: a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}) + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}) + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FD} = (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BE}$; d) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$.

9. a) $\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{XE}$; b) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{YA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{OZ}$; c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{XE} = \overrightarrow{FY} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FY} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DY}$; d) $\overrightarrow{YB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{YB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{YE} + \overrightarrow{EX} = \overrightarrow{YX}$.

14. Să utilizăm situația (1.4) folosind câte un punct de „tranzit” convenabil ales; $\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_kA_j}$ și $\overrightarrow{A_lA_k} = \overrightarrow{A_lA_j} + \overrightarrow{A_jA_k}$ și $\overrightarrow{A_kA_j} = -\overrightarrow{A_jA_k}$ de unde $\overrightarrow{A_iA_j} + \overrightarrow{A_lA_k} = \overrightarrow{A_iA_k} + \overrightarrow{A_lA_j}$.

15. Considerăm conturul poligonului închis $MNPQRSM$ și avem $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{0}$. Cum $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{0}$.

16. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ și deci ABCD este paralelogram.

17. Fie ABCD patrulaterul convex și $\{O\} = AC \cap BD$. Din ipoteză $OA = OC$ și $OB = OD$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}$, deci ABCD paralelogram.

18. $\begin{cases} \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$ și problema s-a redus la problema 16.

19. $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8.$

20. $\overrightarrow{MA} + \underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{=\vec{0}} = \overrightarrow{MA} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = |MA| = \frac{BC}{2} = 4.$

21. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$, deci $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{5}$. ΔAOB dreptunghic$\Rightarrow$ $OBDA$ dreptunghi și $AP = PB, OP = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}OC$, CP mediană și $OP = \frac{1}{3}CP \Rightarrow$ O este centrul de greutate al triunghiului.

22. Presupunem prin absurd că O_1 este mijlocul lui (AC), O_2 mijlocul lui (BD) și $O_1 \neq O_2$. Avem $\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_2D} + \overrightarrow{O_2B} = \vec{0}$; Împreună cu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ conduc la $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2} = \vec{0}$, de unde $O_1 = O_2 = O$.

23. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. În primul caz $BC = 2\sqrt{3}, CD = 2 \Rightarrow BD = 4 \Rightarrow \widehat{CBD} = 30^0 \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{38}$. În al doilea caz $\widehat{CBD} = 30^0 \Rightarrow \widehat{ABD} = 30^0$ și $\Delta ABD \equiv \Delta DCB \Rightarrow AD = CD = 2$.

b) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2d(B, AC) = 2 \cdot 3 = 6$.

c) În primul caz $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = \sqrt{50 + 2\sqrt{76}}$ și $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}| = 4$. În al doilea caz $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 4$ și $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}| = 4$.

Test de evaluare **pag.176**

1. a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FD} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

2. ABC triunghi$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Avem $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CP} \Rightarrow \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

3. a) Notăm $E = AC \cap BD$ și avem $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC}) = 2\overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{OE} \end{cases} \Rightarrow$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. Analog $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}) = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ și se plică punctul a).

4. a)

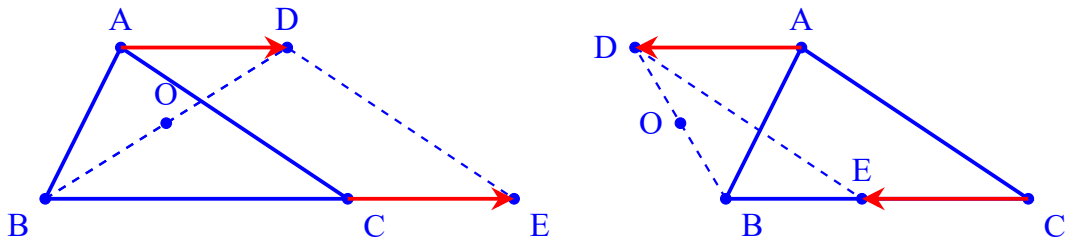


Fig. 141: *Problema nr.4*

b) Avem $\left|\overrightarrow{DA}-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ED})\right| = \left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DE}\right| = \left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}\right| = \left|\overrightarrow{DO}\right| = \frac{1}{2}BD$ și $\left|\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DE}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$.

Înmulțirea cu scalari a vectorilor **pag.176**

3. $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$ sunt vectori coliniari$\Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AD} = k_1\overrightarrow{AB}$, $k_1 = \frac{AD}{AB}$. $\overrightarrow{AE}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt vectori coliniari$\Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AE} = k_2\overrightarrow{AC}$, $k_2 = \frac{AE}{AC}$.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE} = -k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Dar $\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt vectori coliniari și deci există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = k(-k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow (kk_1-1)\overrightarrow{AB} = (kk_2-1)\overrightarrow{AC}$. Cum $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ nu sunt coliniari, rezultă $\begin{cases} kk_1-1=0 \\ kk_2-1=0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2$ și deci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

4. a) $M \in (AB)$ sau $B \in (AM) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; $A \in (BM) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -k\overrightarrow{AB}$.

b) $M \in (AB)$ sau $B \in (AM) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$; $A \in (BM) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -k\overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{NP} = (1-k)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CP} = (k-1)\overrightarrow{BC}$.

5. Cazul $\frac{AO}{OD} = k \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{OC}$. Cazul $\frac{AO}{AD} = k \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1-k}{k}\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{BO} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OC}$.

6. Din ipoteză rezultă $BM = \frac{1}{4}BC$, $MC = \frac{3}{4}BC$, $NC = \frac{1}{3}AC$, $AN = \frac{2}{3}AC$, $AP = \frac{1}{3}AB$, $BP = \frac{2}{3}AB$ și $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b} = \frac{3}{4}(-\vec{b}-\vec{c})+\frac{1}{3}\vec{c} = \frac{5}{12}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$. Analog $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ și $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

7. Indicație: $\triangle AFE \sim \triangle ABC$ și $\triangle ACB \sim \triangle ECD$.

8. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-n\overrightarrow{AB}$, $\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC} \\ \vec{b} = (1-n)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{mn-m+1}\vec{a}-\frac{m}{mn-m+1}\vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{n-1}{mn-m+1}\vec{a}+\frac{1}{mn-m+1}\vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+$

$\overrightarrow{BC} = \frac{n}{mn-m+1}\vec{a} - \frac{m-1}{mn-m+1}\vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \frac{n-1}{mn-m+1}\vec{a} + \frac{m+1}{mn-m+1}\vec{b}$; $\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND} = (1-m)\overrightarrow{BC} + (1+n)\overrightarrow{AB} = \frac{m-mn+2n}{mn-m+1}\vec{a} - \frac{mn+2m-1}{mn-m+1}\vec{b}$; $\overrightarrow{MC} = (1-m)\overrightarrow{BC} = \frac{(1-m)(1-n)}{mn-m+1}\vec{a} + \frac{1-m}{mn-m+1}\vec{b}$; $\overrightarrow{ND} = (n-1)\overrightarrow{AB} = \frac{n-1}{mn-m+1}\vec{a} + \frac{m-mn}{mn-m+1}\vec{b}$.

9.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \Leftrightarrow c\vec{v} + \overrightarrow{BC} - b\vec{v} - a\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (b-c)\vec{v} + a\vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = a\vec{u} + b\vec{v}$; $\overrightarrow{BD} = c\vec{v} - a\vec{u}$; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = a\vec{u}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{b-c}{2}\vec{v} + a\vec{u}$; $\overrightarrow{AN} = a\vec{u} + \frac{b}{2}\vec{v}$; $\overrightarrow{CM} = \frac{c-b}{2}\vec{v} - a\vec{u}$.

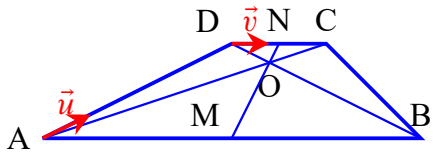


Fig. 145: *Problema 9*

12. $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$. Avem $\frac{BM}{MC} = k \Leftrightarrow BM = kMC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$. Analog $\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BA}}{1+k}$ și $\overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{1+k}$. Cum $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{k+1}(\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}_{=\vec{0}} + k(\underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}}_{=\vec{0}})) = \vec{0} \Rightarrow AM,\ BN,\ CP$ pot fi laturile unui triunghi.

13. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$;
$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{AO}$;
$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$.

14. Avem relațiile: $\sum \vec{x} = \vec{0}, \sum \vec{a} = \vec{0}$ și

$$\begin{array}{lll} \vec{x} + \vec{a} = 2\vec{y} & \Rightarrow & \vec{x} = 2\vec{y} - \vec{a} \\ \vec{y} + \vec{b} = 2\vec{z} & \Rightarrow & \vec{y} = 2\vec{z} - \vec{b} \\ \vec{z} + \vec{c} = 2\vec{t} & \Rightarrow & \vec{z} = 2\vec{t} - \vec{c} \\ \vec{t} + \vec{d} = 2\vec{x} & \Rightarrow & \vec{t} = 2\vec{x} - \vec{d} \end{array}$$

Atunci $\vec{z} = 2(2\vec{x} - \vec{d}) - \vec{c} = 4\vec{x} - 2\vec{d} - \vec{c} = 8\vec{y} - 4\vec{a} - 2\vec{d} - \vec{c} = 16\vec{z} - 8\vec{b} - 4\vec{a} - 2\vec{d} - \vec{c}$ de unde se află $\vec{z}$. Se construiește D astfel încât $\overrightarrow{C'D} = -\vec{z}$, apoi C încât $\overrightarrow{DC} = -\vec{z}$; După aceea se află B încât $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{B'C}$ etc.

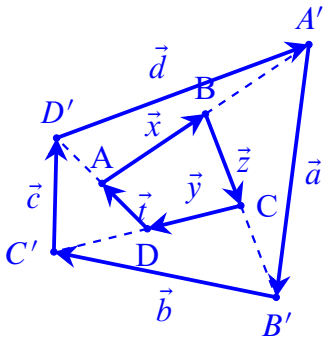


Fig. 146: *Problema 14*

15. a) $\vec{v} = -2\vec{u}$; b) $\vec{v} = -4\vec{u}$; c) $\vec{v} = -\vec{u}$; d) $\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha$.

17. Dacă vectori ar fi necoliniari inegalitatea triunghiului ar fi strictă.

c) Fie $D = pr_{BC}A$. Se analizează cazurile: $D \in (BC)$, $D \in \{B, C\}$, $D \notin [BC]$ și se ține cont că într-un triunghi dreptunghic cateta este mai mică decât ipotenuza.

18. $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ}=4\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=4\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}\|\overrightarrow{AP}$.

19. $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{6\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{5}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overrightarrow{AE}\|\overrightarrow{AF}$.

20. a) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{BA}$ și deci $\overrightarrow{BM}\|\overrightarrow{BA}$. b) M este mijlocul lui AB.

21. $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. $5\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MA}\Leftrightarrow 5(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow 5(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BP})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BN}$ și deci $\overrightarrow{BP}\|\overrightarrow{BN}$.

22. b) M,O,N coliniare $\Rightarrow\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{ON}$. Pe de altă parte $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$ și $2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Cum $\overrightarrow{OB}\|\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OB}=k_1\overrightarrow{OD}$ și $\overrightarrow{OA}\|\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=k_2\overrightarrow{OC}$ și egalitățile se pot rescrie $2\overrightarrow{OM}=k_2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ respectiv $2\overrightarrow{ON}=k_1\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$, adică $\overrightarrow{OM}=\frac{k_2}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{k_1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ care înlocuite în relația $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{ON}\Rightarrow k(\frac{k_2}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD})=\frac{k_1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\left(\frac{kk_2-1}{2}\right)\overrightarrow{OC}=\left(\frac{k_1-k}{2}\overrightarrow{OD}\right)$.

Cum $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}$ nu sunt coliniari egalitatea are loc dacă $\begin{cases}\frac{kk_2-1}{2}=0\\ \frac{k_1-1}{2}=0\end{cases}$ de unde $k=k_1$ și $k_2=\frac{1}{k}$

$\begin{cases}\overrightarrow{BO}=k_1\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{ON}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\frac{OB}{OD}\\ k=\frac{OM}{ON}\end{cases}\underbrace{\Rightarrow}_{k=k_1}\frac{OB}{OD}=\frac{OM}{ON}\Rightarrow AD\|BC$ și $ABCD$ este trapez. Dacă în plus $k=1=k_1\Rightarrow OB=OD$ și $ABCD$ este paralelogram.

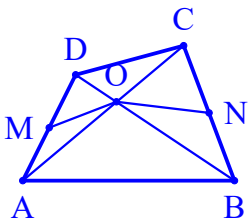


Fig. 147: *Problema 22*

24. a) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ și deci $\overrightarrow{BF}=\frac{5}{2}\overrightarrow{EC}$

b) Din a) $\overrightarrow{BF}=\frac{5}{2}\overrightarrow{EC}\Rightarrow 5\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{FB}+5\overrightarrow{CQ}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{CB}=2\cdot\frac{5}{2}\overrightarrow{CE}+5\overrightarrow{CQ}\Rightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CQ}$ și deci $ECQB$ paralelogram ($CQ\|AB$).

25.

a) $EBB'D$ paralelogram, $C'CFD$ paralelogram.

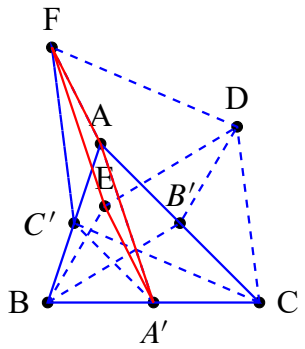


Fig. 150: *Problema 25*

b) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underbrace{(\overrightarrow{FC'} + \overrightarrow{CD})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AA'}$.

26. $m\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow m(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) = m\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{DC}$.

27. a) $\begin{cases} \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \end{cases}$. Adunând membru cu membru cele două relații și ținând cont de vectorii opuși obținem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{EF}$.

b) Soluție sintetică: presupunem că $AB \nparallel CD$ și fie $M \in AC$, mijlocul lui AC și E și F astfel încât $EM \,||\, DC$ și $MF \,\|\, AB$. Se obține în ΔEMF, $EF < \frac{DC}{2} + \frac{AB}{2}$ contradicție.

Soluție vectorială: de la a) rezultă $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = 2|\overrightarrow{EF}|$, dar $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|$ cu egalitate dacă și numai dacă ABCD trapez (v. exercițiul 17); în caz contrar se obține o contradicție (?)

28. 1) $\overrightarrow{DC} \| \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EP} \| \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{PF} \| \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{EP} \| \overrightarrow{PF} \| \overrightarrow{DC} \| \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{EF} \| \overrightarrow{AB}$.

2) $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB})$.

3) $\overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

29. În $\triangle CBD \Rightarrow 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

În $\triangle ABD \Rightarrow 2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

În $\triangle FAC \Rightarrow 2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} \Rightarrow 4\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

30. $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$; $2\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) = \vec{0}$.

31. Fie M mijlocul segmentului BC. $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ și $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} - 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

32. a) $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO}$ și prin însumare membru cu membru rezultă $4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO}$. Dacă $ABCD$ este paralelogram $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{0}$ (perechi de vectori opuși) și deci $\sum \overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{MO}$.
Dacă $\sum \overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{MO}$ atunci $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{0}$ și cum $\overrightarrow{AO} \| \overrightarrow{CO}$ respectiv $\overrightarrow{BO} \| \overrightarrow{DO}$ egalitatea nu poate avea loc decât dacă $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CO}$ și $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$ și deci diagonalele se înjumătățesc și ABCD este paralelogram.

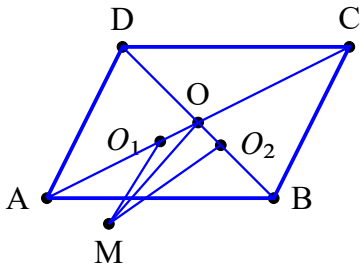


Fig. 152: *Problema 32*

b) Fie $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$. Dacă ABCD nu este paralelogram, fie O_1 mijlocul lui AC, și O_2 mijlocul lui BD. Rezultă $2\overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$ și $2\overrightarrow{MO_2} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ și deci $\overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{MO_2}$ de unde $O_1 = O_2$.(vezi Fig. **??**)

33. a) Fie M și N mijloacele coardelor AB și CD. După cum este știut $OM \perp AB$ și $ON \perp CD$, deci $ONPM$ paralelogram (chiar dreptunghi).

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Deci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2\overrightarrow{OP}$
b) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{PO}$. Prin însumare membru cu membru obținem $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = 4\overrightarrow{PO}$. Din a)$\Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = 2\overrightarrow{PO}$ și deci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

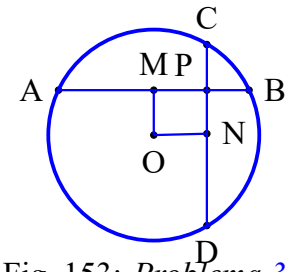


Fig. 153: *Problema 33*

34. a) $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \underbrace{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}}_{=\vec{0}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

b) Din problema 33, pagina 181, avem $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$ și $|\vec{u}| = 2\left|\overrightarrow{PO}\right| = 2\sqrt{OM^2 + ON^2} = 20$.

35. a) Triunghi echilateral b) Dreptunghi de centru O.

36. Pentru M în planul ABCD se obține $\overrightarrow{MO} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}{2}$ și $\overrightarrow{MO} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}}{2}$ unde $O = AC \cap BD$ și deci $2\overrightarrow{MO} = \vec{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \Rightarrow M = O$.

37. În patrulaterul OGEF, conform problemei 27, avem $2\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{EF}$, iar în patrulateru OFDG, avem $2\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DG}$ și în triunghiul DOE, vectorul mediană $2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$. Adunând membru cu membru cele trei relații, avem $2(\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{MR}) = (\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF})+\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$.

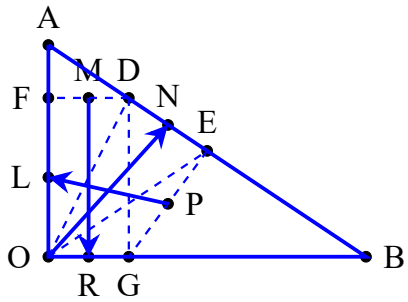


Fig. 154: *Problema 37*

38. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'} = \underbrace{\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}}_{\overrightarrow{0}} + \underbrace{\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}}_{\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$ (vezi problema 31).

39. a) $HB \perp AC$, $CA' \perp AC \Rightarrow HB \| CA'$, analog $A'B \parallel HC$ deci $HBA'C$ paralelogram, $\Rightarrow \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'}$

b) O mijlocul lui $AA', \Rightarrow 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} \Rightarrow 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$

c) $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + \underbrace{\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}}_{2\overrightarrow{HO}} = \overrightarrow{OH}$.

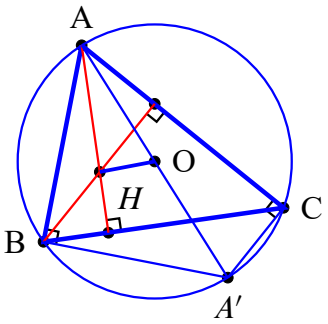


Fig. 155: *Problema 39*

40. a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$. ABCD patrulater oarecare.

b) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ABCD paralelogram.

41. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{0} \Rightarrow N = P$.

42. $AM \cap DB \cap MN \cap QP = \{O\}$. M, O, N coliniare

$\Rightarrow$ conform prolemei 22, ABCD trapez sau paralelogram. Conform problemei 23, MQNP este paralelogram și deci $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}$. Cum $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$ și $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} \Rightarrow OA = OC$ și ABCD este paralelogram.

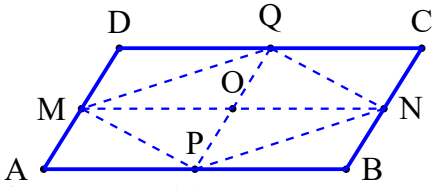


Fig. 156: *Problema 42*

43. Fie N mijlocul lui AB,P mijlocul lui DC și Q mijlocul lui NP. Avem $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ și deci $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = 2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}) = 4\overrightarrow{MQ}$ și

$Q \in \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, Q fix.

44. Fie P mijlocul lui MN. Avem $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2k\overrightarrow{AA'}$.

Test de evaluare **pag.182**

1.

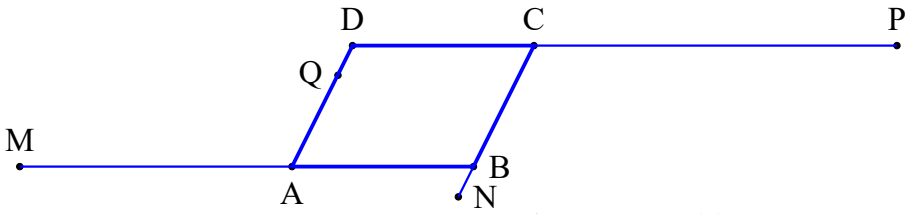


Fig. 157: *Problema 1*

2. a) $\begin{cases} \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NB_1} \\ \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NB_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} = 2\overrightarrow{ON}$.

Analog $\overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4} = 2\overrightarrow{OP}$. Adunând membru cu membru cele două relații obținem $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4} = 2(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{OR} = 4\overrightarrow{OR}$.

b) $3\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{B_3N} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RN}) = \overrightarrow{B_3P} + \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GR} + 3\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{B_3P} + 2\overrightarrow{RN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{B_3P} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{PB_4} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RB_4} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{RB_4}$.

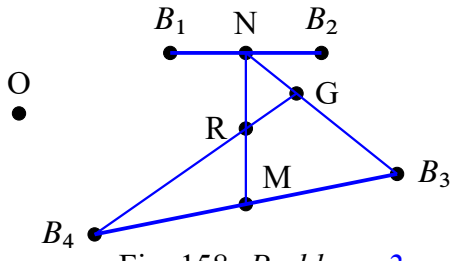


Fig. 158: *Problema 2*

3. $8\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NP} = 8(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}) + 2(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP}) = 8\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = 6\overrightarrow{BC} + \frac{8}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}$.

4. a) Triunghiul fiind echilateral ortocentrul coincide cu centrul de greutate. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor [BC],[AC], respectiv [AB]. Atunci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{B'B} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C'C} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = -\frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}\right) = \vec{0}$.

b) $\left|\overrightarrow{OD}\right| = \left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right| = 2\sqrt{3}$.

Descompunerea unui vector după doi vectori dați **pag.183**

1. a) $AM = MB = \frac{1}{2}AB$, $AN = \frac{3}{4}AC$, $BP = \frac{3}{2}BC$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \| \overrightarrow{MP} \Rightarrow M, N, P$ coliniare

2. a) $x\vec{u}+y\vec{v}=x'\vec{u}+y'\vec{v}\Leftrightarrow(x-x')\vec{u}+(y-y')\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow x-x'=0$ și $y-y'=0\Rightarrow x=x'$ și $y=y'$ b) $\vec{a},\vec{b}$ coliniari$\Rightarrow\exists k$ astfel încât $\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow(\alpha-k\alpha')\vec{u}+(\beta-k\beta')\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\alpha-k\alpha'=0\\ \beta-k\beta'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{\alpha}{\alpha'}\\ k=\dfrac{\beta}{\beta'}\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$$

6. b) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}\Rightarrow\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\Rightarrow$ $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\overset{b)}{\Rightarrow}\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BP}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Conform problemei 5), $\alpha=\frac{1}{4}$ punctele M,N,P sunt coliniare.

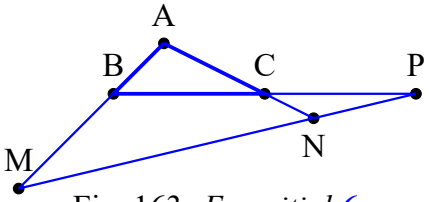


Fig. 163: *Exercițiul 6*

8. a) $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=-\frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\alpha=\beta=-\frac{1}{3}$;

b) $\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}\Rightarrow\alpha=\beta=-\frac{1}{6}$. c) $\overrightarrow{GC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=$ $-\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\alpha=-\frac{2}{3},\ \beta=\frac{1}{3}$; d) $\overrightarrow{GB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\Rightarrow$ $\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=-\frac{1}{3}$.

9. a) $\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=\frac{2}{3}$; b) $\alpha=3,\ \beta=-2$; c) $\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=-\frac{1}{2}$.

10. $\frac{DC}{AB}=\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA}=\frac{a}{b}$ a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{a}{b}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\alpha=1,\beta=\frac{a}{b}$ b) $b\overrightarrow{DO}=a\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow b(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AD})=a(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})\Leftrightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AD}+\frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\alpha=$ $\frac{b}{a+b},\ \beta=\frac{a}{a+b}$; c) $\overrightarrow{CO}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CD}+\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CB}\Rightarrow\alpha=\frac{b}{a+b},\ \beta=\frac{a}{a+b}$; d) $\overrightarrow{BD}=$ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{a}{b}\overrightarrow{BA}\Rightarrow\alpha=\frac{a}{b},\ \beta=1$.

11. $AD=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\Rightarrow DB=\frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}},\ DC=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{c^2}{b^2}\Rightarrow b^2\overrightarrow{BD}=$ $c^2\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow b^2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=c^2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{b^2\overrightarrow{AB}+c^2\overrightarrow{AC}}{b^2+c^2};\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{2}=$ $\frac{b^2\overrightarrow{AB}+(b^2+2c^2)\overrightarrow{AC}}{2(b^2+c^2)}$.

12. a) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FO}=-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OF}\Rightarrow\alpha=1,\beta=-1$; $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{AO}\Rightarrow$ $\alpha=1,\beta=-1$; c) $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CA}\Rightarrow\alpha=1,\beta=-1$ d) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=$ $-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DE}\Rightarrow\alpha=-1,\beta=-1$; e) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OF}\Rightarrow\alpha=1,\beta=-1$; f) $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}\Rightarrow\alpha=-1,\beta=-1$

13. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AM}\right) = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2k}\overrightarrow{AM}$. Punctele M,N,B coliniare dacă $\frac{1}{k} + \frac{3}{2k} = 1 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$.

14. Dacă notăm $\frac{AM}{BM} = m, \frac{DN}{CN} = n, \frac{OB}{OD} = p, \frac{OC}{OA} = q$, atunci:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+1}\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{OD} + \frac{n}{n+1}\overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{p}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC} = -q\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{ON} = -\frac{nq}{n+1}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{p(n+1)}\overrightarrow{OB}$.

Punctele O, M si N sunt coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \| \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{m+1}}{\frac{-nq}{n+1}} = \frac{\frac{m}{m+1}}{\frac{-1}{p(n+1)}} \Leftrightarrow \frac{1}{nq} = mp \Leftrightarrow mnpq = 1 \Leftrightarrow AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD$.

15. Conform exercițiului 7, $\overrightarrow{OM} = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$. Pe de altă parte $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(|AC|\vec{u} + |BD|\vec{v}) = \frac{1}{2}k(\vec{u} + \vec{v})$ unde $|AC| = |BD| = k \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{2\alpha}{k}\overrightarrow{OM}$ și deci $\overrightarrow{PQ} \| \overrightarrow{OM}$.

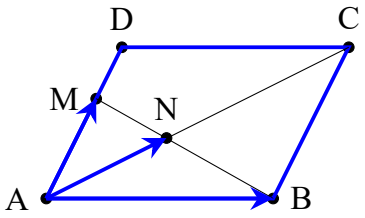


Fig. 165: *Exercițiul 13*

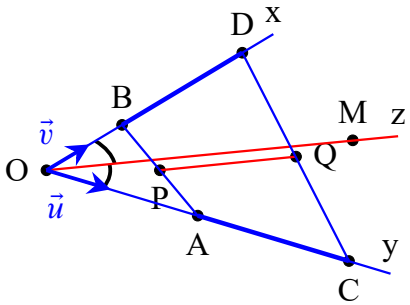


Fig. 166: *Exercițiul 15*

16. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DP} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{AD} - n\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - p\overrightarrow{DC} = (1-n)\overrightarrow{AD} + (1-p)\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AM} \| \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \frac{1}{1-p} = \frac{k}{1-n} \Leftrightarrow k = \frac{n-1}{p-1}$.

17. Fie $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Notăm $\frac{MB}{MA} = k \Rightarrow \frac{NC}{NA} = 1 - k$ și se obține $\overrightarrow{AB} = (k+1)\overrightarrow{AM}$ respectiv $\overrightarrow{AC} = (2-k)\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AG} = \frac{2-k}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{k+1}{3}\overrightarrow{AM}$.

Cum $\frac{2-k}{3}+\frac{k+1}{3}=1$ rezultă (vezi exercițiul 5) M,G,N coliniare. Reciproc, dacă M,N,G coliniare, rezultă că există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AM}+(1-\alpha)\overrightarrow{AN}=\frac{\alpha}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1-\alpha}{1+p}\overrightarrow{AC}$ unde $\frac{MB}{MA}=k$ și $\frac{NC}{NA}=p$. Cum $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\Rightarrow$ $\begin{cases}\frac{\alpha}{k+1}=\frac{1}{3}\\ \frac{1-\alpha}{1+p}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow k+p=1.$

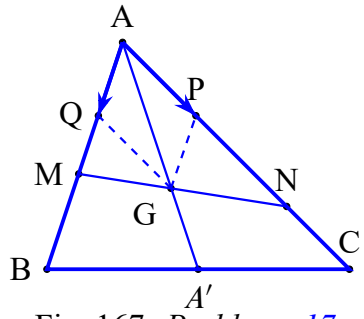


Fig. 167: *Problema 17*

18. Notăm $k=\frac{AD}{DB}=\frac{EC}{EA}$ și Q mijlocul segmentului DE. Avem $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$. Dar $\overrightarrow{AD}=\frac{2k}{1+k}\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{k+1}\overrightarrow{AN}$ și deci $\overrightarrow{AQ}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AN}$. Cum $\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=1\Rightarrow M,N,Q$ coliniare

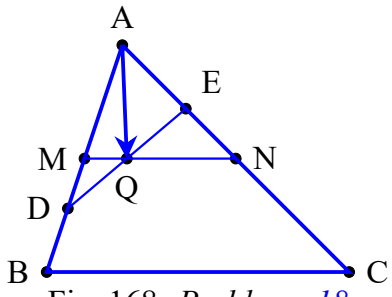


Fig. 168: *Problema 18*

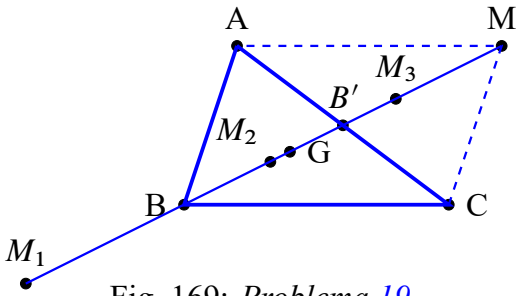


Fig. 169: *Problema 19*

19. Cum $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MB'}$, B' mijlocul lui AC, rezultă că $M\in BB'$. Dacă $\alpha=1$, M este al patrulea vârf al paralelogramului ABCD; Dacă $\alpha=-1, M=G$. Dacă $a=4$, $2\overrightarrow{MB'}=4\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{MB'}=2\overrightarrow{MB}\Rightarrow M=M_1$.

Dacă $\alpha=-2$, $2\overrightarrow{MB'}=-2\overrightarrow{MB}$ sau M mijlocul lui BB', M_2.

Dacă $\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\overrightarrow{MB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}, M=M_3$.

20. Fie $C=pr_{Ox}M$ și $Q=pr_{Oy}M$. În $\triangle MOC$ $\sin a=\frac{MC}{OM}\Rightarrow MC=OM\sin a$. În $\triangle MAC$ $\sin(a+b)=\sin(MAC)=\frac{MC}{AM}=\frac{OM\sin a}{AM}\Rightarrow AM=\frac{OM\sin a}{\sin(a+b)}=OB$. Analog din triunghiurile $\triangle OMQ$ și $\triangle MQB$ obținem $OA=\frac{OM\sin b}{\sin(a+b)}$. In final avem $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{OM\sin b}{\sin(a+b)}\vec{i}+\frac{OM\sin a}{\sin(a+b)}\vec{j}$.

21. a)Fie $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ versorii direcțiilor $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Rezultă $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=\vec{0}$ și $\vec{u}=\vec{e}_1$, $\vec{v}=2\vec{e}_2$, $\vec{w}=3\vec{e}_3$. și $\vec{w}=-3(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\Rightarrow\vec{w}=-3\vec{u}-\frac{3}{2}\vec{v}$, $\vec{e}_1=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, $\vec{e}_2=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. b) $\vec{u}=2\vec{e}_1$, $\vec{v}_2=2\vec{e}_2, \vec{w}=-4(\vec{e}_1+\vec{e}_2)=-2(\vec{u}+\vec{v})$.

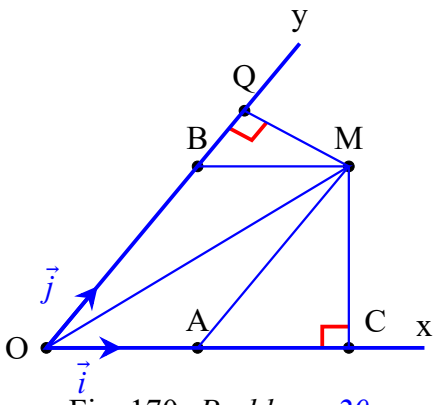


Fig. 170: *Problema 20*

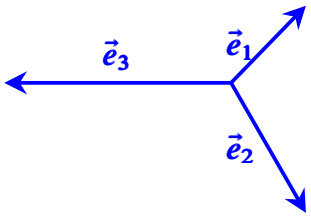


Fig. 171: *Problema 21*

23. b) $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}\Rightarrow M\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\vec{0}\Rightarrow M(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

c) $Q(1,2), B(-1,3)\Rightarrow \begin{cases}1=\dfrac{x-2-1}{2}\\ 2=\dfrac{3+y+3}{2}\end{cases}\Rightarrow x=5, y=-2$. d) $A(-1,2), b(3,0), C(-1,4)$. Fie M mijlocul lui BC$\Rightarrow M(1,2)\Rightarrow A'(3,2)$ unde A' este simetricul lui A față de M.

24. $\overrightarrow{AB}=-\vec{i}+5\vec{j}$; $\overrightarrow{CD}=5\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{EF}=4\vec{i}-2\vec{j}$.

25. a) $\vec{a}=3\vec{j}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{c}=5\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{d}=-4\vec{j}$.

c) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(4,7)=4\vec{i}+7\vec{j}$; $(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})(-4,2)=-4\vec{i}+2\vec{j}$; $(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})(6,7)=6\vec{i}+7\vec{j}$; $(2\vec{c}+\vec{d}-\vec{a})(10,-3)=10\vec{i}-3\vec{j}$; $(-2\vec{c}+\vec{b})(-11,3)=-11\vec{i}+3\vec{j}$.

26. a) $\frac{x-1}{3}=\frac{2}{1}\Rightarrow x=7$; b) $x=\frac{3}{8}$; c) $x=-\frac{1}{3}$; d) $x=\frac{1}{6}$.

27. a) $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{AC}=(\alpha+1)\vec{i}+7\vec{j}$. $\overrightarrow{AB}\|\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\frac{4}{\alpha+1}=\frac{3}{7}\Rightarrow\alpha=\frac{25}{3}$; b) $x_D=\frac{7}{3}$, $y_D=6$; c) $E\left(\frac{7+2\alpha}{3},\frac{14}{3}\right)$; d) $F\left(\frac{\alpha-1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

28. $\begin{cases}2x+1=-1\\ 4=y+1\end{cases}\Rightarrow x=-1,\ y=3.$

29. a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{j}$;)$\overrightarrow{AB}=\vec{v}-\vec{u}=4\vec{i}-2\vec{j}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{w}-\vec{v}=\vec{i}-7\vec{j}$; $\overrightarrow{CA}=\vec{u}-\vec{w}=-5\vec{i}+9\vec{j}$; $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\vec{j}\Rightarrow G\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

30. a) $\alpha=3$; b) $\alpha=\frac{1}{4}$; c) $\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\alpha=\frac{1}{3}$; d) $\alpha=\pm\sqrt{2}$.

Test de evaluare **pag.189**

1. $\vec{a}\parallel\vec{t}\Leftrightarrow\alpha=3\beta+2$; $\vec{a}\parallel\vec{c}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{5}(1-3\beta)$; $\vec{t}\parallel\vec{c}\Leftrightarrow\alpha=-6\beta+2$.

2. a) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; b) $2\overrightarrow{CE} = \vec{EA} \Rightarrow 2(\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}}{3} = \frac{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}}{3} = \frac{\vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}{3} = \frac{\vec{b} - 3\vec{a}}{6}$.

3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$; $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.

4. a) $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}{3}$.

b) $4\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow 4(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}{4}$. Cum $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AN} \Rightarrow A, M, N$ coliniare.

Vectorul de poziție al unui punct în raport cu un pol **pag.190**

1. $m_1 = -1$; $m_2 = -3$.

2. $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}$ sunt coliniari, deci $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CB}$. Avem $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{CM} \Rightarrow -\vec{r}_C + \vec{r}_M = \alpha\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \vec{r}_M = \vec{r}_C + \alpha(\vec{r}_B - \vec{r}_C) \Leftrightarrow \vec{r}_M = \alpha\vec{r}_B + (1-\alpha)\vec{r}_C$. Din ipoteză $\vec{r}_M = -2\vec{r}_B + 3\vec{r}_C \Rightarrow \alpha = -2$ și $\vec{r}_M = -2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CO}$.

3. Fie O un punct de reper în plan. $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{r}_{O_2} - \vec{r}_{O_1} = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_D}{2} - \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C}{2} = \frac{1}{2}(\vec{r}_D - \vec{r}_A) - \frac{1}{2}(\vec{r}_B - \vec{r}_C) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$. Ținând cont de ipoteză, rezultă $\left(m - \frac{1}{2}\right)(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$ și cum $m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ și ABCD paralelogram.

4. Dacă $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ sunt vectorii de poziție a punctelor A,B,C și $\vec{r}_{A'}, \vec{r}_{B'}, \vec{r}'_C$ sunt vectorii de poziție a punctelor A', B', C' avem:

a) $\vec{r}_{A'} + \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'} = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C}{2} + \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C}{2} + \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_A}{2} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$.

b) $\overrightarrow{AA'} = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C}{2} - \vec{r}_A$. Analog $\overrightarrow{BB'} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C}{2} - \vec{r}_B$ și $\overrightarrow{CC'} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2} - \vec{r}_C$. Prin însumare $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

5. Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului ABCD, M mijlocul lui AB, N mijlocul lui BC, P mijlocul lui CD și Q mijlocul lui AD. Presupunem că perpendicularele duse din M și P se intersectează în E_1, iar celelalte două presupunem prin absurd că se intersectează în E_2.

Avem $\begin{cases} PO \perp DC \\ ME \perp DC \end{cases} \Rightarrow PO \| ME_1$ și $\begin{cases} OM \perp AB \\ PE \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ $OM \| PE_1$ și deci OPE_1M este paralelogram și deci $\vec{r}_O + \vec{r}_{E_1} = \vec{r}_N + \vec{r}_P$. Analog se arată că $\vec{r}_O + \vec{r}_{E_2} = \vec{r}_N + \vec{r}_Q$. Conform exercițiului 23 pag.180 MNPQ este paralelogram și deci $\vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q$, și ținând cont de relațiile anterioare rezultă $\vec{r}_O + \vec{r}_{E_1} = \vec{r}_O + \vec{r}_{E_2}$ de unde $E_1 = E_2 = E$.
b) În $\triangle OAB$ avem $2\overrightarrow{OM} = \vec{r}_A + \vec{r}_B$ iar în $\triangle OCD$ avem $2\overrightarrow{OP} = \vec{r}_C + \vec{r}_D$. OEMP paralelogram, implică $2\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OM} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D$.

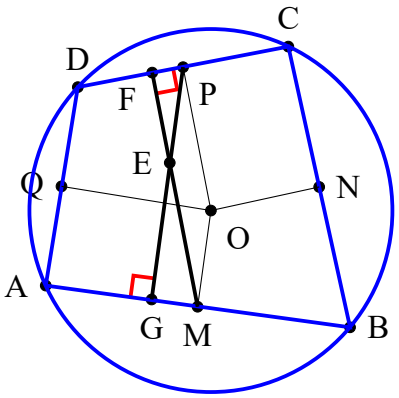


Fig. 176: *Problema 5*

6.

Dacă $P = AB \cap CD$, conform problemei 33, de la pagina 181 avem $\sum \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OP}$. Conform problemei 5, pag.190 avem $\sum \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OE}$ și deci $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow E = P$.
Pentru o soluție sintetică este suficient să arătăm că $R = pr_{AB}E, E$ și mijlocul M al lui CD sunt coliniare. Triunghiul $\triangle CED$ dreptunghic și EM mediană $\Rightarrow EM = MD = MC \Rightarrow \sphericalangle MED = \sphericalangle MDE$ și atunci $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CAB = \sphericalangle REB = \sphericalangle MED$.

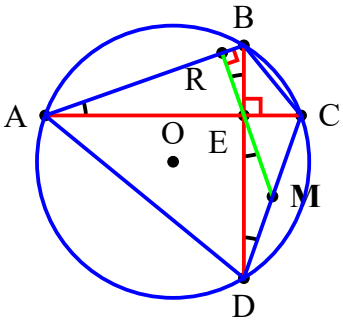


Fig. 177: *Problema 6*

7. Dacă M este mijlocul segmentului BC avem $2\vec{r}_M = \vec{r}_B + \vec{r}_C = \vec{r}_{B_1} + \vec{r}_{B_{n-1}} = \ldots = \vec{r}_{B_k} + \vec{r}_{B_{n-k}}$

8. $\vec{r}_A + \vec{r}_M = \vec{r}_P + \vec{r}_N \Leftrightarrow \vec{r}_A - \vec{r}_P = \vec{r}_N - \vec{r}_M \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$; $\vec{r}_A + \vec{r}_{A'} = \vec{r}_B + \vec{r}_C \Leftrightarrow \vec{r}_A - \vec{r}_C = \vec{r}_B - \vec{r}_{A'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{A'B}$

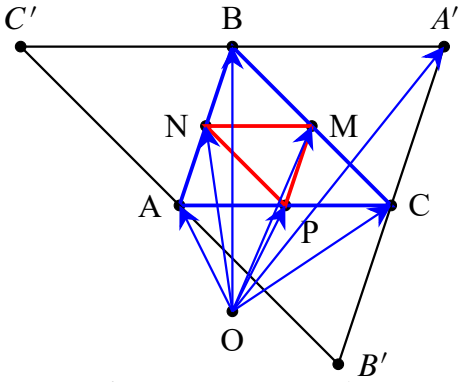


Fig. 178: *Exercițiul 8*

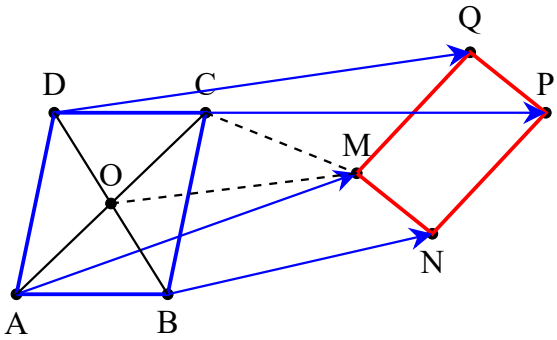


Fig. 179: *Exercițiul 9*

9. Fie punctul de reper O, $\{O\}=AC \cap BD$. Folosind regula (1.4), condiția se reformulează: $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_Q + \vec{r}_N$ și problema sa redus la problema 16, pagina175.

10. Fie O un punct în plan. Folosind relația lui Leibniz, avem: $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM})$, $\overrightarrow{OG_2}\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON})$, $\overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OP})$, $\overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ})$.

Condiția ca $G_1G_2G_3G_4$ să fie paralelogram este ca $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4}$.

Avem

$\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM})$ si

$\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ})$, iar MNPQ paralelogram implică $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$, de unde rezultă că $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

b) $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{CG_3} = \overrightarrow{0G_1}-\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0G_3}-\overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0G_2}+\overrightarrow{0G_4}-\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{DG_4}$.

11. a) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \vec{r}_A - \vec{r}_M = k(\vec{r}_B - \vec{r}_M) \Leftrightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A - k\vec{r}_B}{1-k}$.

b) Fie $MN \parallel OA \Rightarrow \frac{MN}{OA} = \frac{MB}{BA} = \frac{1}{k+1}$ și $\frac{OB}{ON} = \frac{k}{k+1}$.

$OM < ON + MN$ sau $OM < \frac{1}{k+1}OA + \frac{k}{k+1}OB$.

Pentru soluție vectorială trecem la module în relația din (2.1): $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{k+1}|\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}| \le \frac{1}{k+1}|\overrightarrow{OA}| + \frac{k}{k+1}|\overrightarrow{OB}|$.

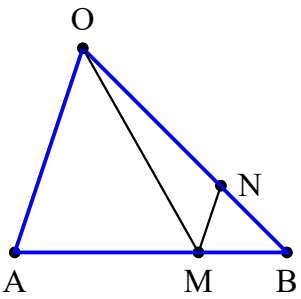


Fig. 181: *Problema 11*

12. $\overrightarrow{AD} = k\cdot\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{r}_D - \vec{r}_A = k(\vec{r}_C - \vec{r}_B) \Leftrightarrow \vec{r}_D = \vec{r}_A + k(\vec{r}_C - \vec{r}_B)$.

13. Dacă $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$ atunci $\vec{r_M} = \frac{\vec{r}_B + k\vec{r}_C}{1+k}, \vec{r_N} = \frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_A}{1+k}, \vec{r_P} = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k}$ și $\vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P = \frac{\vec{r}_B + k\vec{r}_C}{1+k} + \frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_A}{1+k} + \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$. Reciproc. Fie $\frac{BM}{MC} = m$, $\frac{CN}{NA} = n$, $\frac{AP}{PB} = p$. Atunci $\vec{r_M} = \frac{\vec{r}_B + m\vec{r}_C}{1+m}$, $\vec{r_N} = \frac{\vec{r}_C + n\vec{r}_A}{1+n}$, $\vec{r_P} = \frac{\vec{r}_A + p\vec{r}_B}{1+p}$.

Ipoteza $\vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P - \vec{r}_A - \vec{r}_B - \vec{r}_C = \vec{0} \Rightarrow$

$$\frac{mn\vec{r}_A - mp\vec{r}_A + n\vec{r}_A - p\vec{r}_A - mn\vec{r}_B - m\vec{r}_B + np\vec{r}_B + p\vec{r}_B + mp\vec{r}_C + m\vec{r}_C - np\vec{r}_C - n\vec{r}_C}{(m+1)(n+1)(p+1)} = \vec{0} \Rightarrow$$

$mn\vec{r}_A - mp\vec{r}_A + n\vec{r}_A - p\vec{r}_A - mn\vec{r}_B - m\vec{r}_B + np\vec{r}_B + p\vec{r}_B + mp\vec{r}_C + m\vec{r}_C - np\vec{r}_C - n\vec{r}_C = \vec{0} \Rightarrow$

$(m+1)(n-p)\vec{r}_A + (p-m)(n+1)\vec{r}_B + (m-n)(1+p)\vec{r}_C = \vec{0} \Rightarrow m = n = p$.

14. a) $\frac{MA}{MD} = \frac{BN}{CN} = k \Rightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_D}{1+k}, \vec{r}_N = \frac{\vec{r}_B + k\vec{r}_C}{1+k} \Rightarrow \vec{r}_N - \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A + k(\vec{r}_C - \vec{r}_D)}{1+k} =$

b) Ducem $MO \| DC, O \in AC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{OA}{OC} = \frac{NC}{CN} \Rightarrow ON \| AB \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ și ținând cont de ipoteză obținem $\overrightarrow{MO} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}$. $\frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}}{1+k}$.

c) 1) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{DC}\right| \leq \frac{1}{k+1}\left|\overrightarrow{AB}\right| + \frac{k}{k+1}\left|\overrightarrow{DC}\right|$ sau 2) $MN \leq MO + ON$.

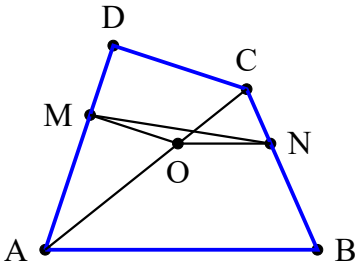


Fig. 182: *Problema 14*

15.

$\vec{u} \| \vec{v} \Rightarrow \exists \alpha$ astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow \vec{r}_A + k\vec{r}_B = \alpha(\vec{r}_C + k\vec{r}_D) \Leftrightarrow \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{k+1} = \alpha\left(\frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_D}{k+1}\right)$. Dar $\frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{k+1} = \vec{r}_P$ este vectorul de poziție al unui punct $P \in AB$ cu proprietatea $\frac{AP}{PB} = k$ și $\frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_D}{k+1} = \vec{r}_Q$ este vectorul de poziție al punctului $Q \in CD$ cu proprietatea $\frac{CQ}{QD} = k$. Cum $\vec{r}_P = \alpha\vec{r}_Q \Rightarrow$ vectorii $\overrightarrow{OP} \| \overrightarrow{OQ}$ și deci O se află pe dreapta PQ.

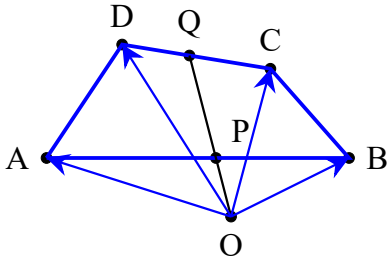


Fig. 183: *Problema 15*

16. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$; $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF})$; $\overrightarrow{ME} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MR} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{MR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MR} \| \overrightarrow{MN}$.

17. a) Fie $\frac{DC}{AB} = k$, de unde $\frac{CQ}{QA} = \frac{DQ}{QB} = \frac{DE}{EA} = \frac{CF}{FB} = k$. Din $\frac{CQ}{QA} = k \Rightarrow \vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_B}{1+k}$ și din $\frac{DQ}{QB} = k \Rightarrow \vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_B}{1+k}$. Avem $\vec{r}_E + \vec{r}_F = \frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_A}{1+k} + \frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_B}{1+k} = \frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_A}{1+k} + \frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_B}{1+k} = 2\vec{r}_Q$. Dar $\vec{r}_E + \vec{r}_F = 2\vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{r}_E - \vec{r}_Q = \vec{r}_Q - \vec{r}_F \Leftrightarrow \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{FQ} \Rightarrow QE = QF$.

b) $\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB}}{1+k} = \frac{\frac{1}{k}\overrightarrow{PD} + \frac{1}{k}\overrightarrow{PC}}{1+k} = \frac{1}{k}\overrightarrow{PN} \Rightarrow \overrightarrow{PN} \| \overrightarrow{PM}$. $\overrightarrow{QN} = \frac{\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QD}}{2} = \frac{k\overrightarrow{QB} + k\overrightarrow{QA}}{2} = k\overrightarrow{QM} \Rightarrow \overrightarrow{QM} \| \overrightarrow{QN} \Rightarrow P, N, Q, M$ coliniare.

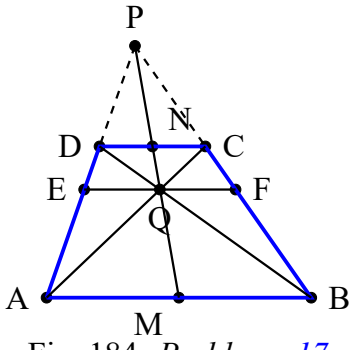


Fig. 184: *Problema 17*

18. $\begin{cases} \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{AP}$. Dacă Q este mijlocul lui $(BC) \Rightarrow 2\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{QA} = 4\overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$.

Atunci, punctele A, P, Q sunt coliniare și P este mijlocul lui AQ. Dar P este mijlocul lui $MN \Rightarrow ANQM$ este paralelogram. Atunci MQ este linie mijlocie $\square$ este mijlocul lui AB și CM este mediană. Analog, și BN este mediană.

19. $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PC} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases}$. Cum $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{PA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Din $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{PB}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{11}{45}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Notând $\frac{AN}{NC} = k \Rightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PC}}{1+k} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2k-1}{3(k+1)}\overrightarrow{AC}$. Cum vectorii $\overrightarrow{PM}$ și $\overrightarrow{PN}$ sunt coliniari, au componentele proporționale de unde deducem $k = \frac{20}{13}$.

20. a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{NC}$ si $k > 0 \Rightarrow M \in [AD], N \in [BC]$

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) = \frac{k}{2(k+1)}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Dar $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$,deci $\overrightarrow{PR} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{PQ}$ de unde rezultă coliniaritatea punctelor PQR

c) Patrulaterul MPNQ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} <\Leftrightarrow k = 1$.

21.

$EF \| BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \alpha \Rightarrow AE = \alpha AB$. Considerăm A ca punct de referință. Avem $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{r}_E = \alpha\vec{r}_B$. Analog $\vec{r}_F = \alpha\vec{r}_C$. Notăm $k = \frac{ME}{MF} = \frac{NB}{NC}$ și obținem $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_E + k\vec{r}_F}{1+k} = \frac{\alpha\vec{r}_B + k\alpha\vec{r}_C}{1+k} = \alpha \cdot \frac{\vec{r}_B + k\vec{r}_C}{1+k} = \alpha\vec{r}_N$, și $\vec{r}_M \| \vec{r}_N$.

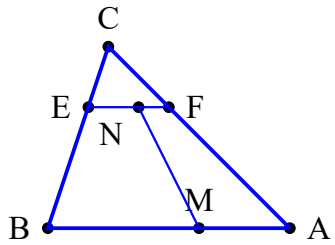


Fig. 185: *Problema 21*

22. $\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC} = \alpha \Rightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B}{1+\alpha}, \vec{r}_P = \frac{\vec{r}_D + \alpha\vec{r}_C}{1+\alpha}$. $\frac{AQ}{QD} = \frac{BN}{NC} = \beta \Rightarrow \vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_A + \beta\vec{r}_D}{1+\beta}, \vec{r}_N = \frac{\vec{r}_B + \beta\vec{r}_C}{1+\beta}$. Presupunem prin absurd că există un alt punct $O_1 \in QN$ și un alt punct $O_2 \in MP$ așa încât $\frac{O_1Q}{O_1N} = \alpha$ și $\frac{O_2M}{O_2P} = \beta$. Se obține că $\vec{r}_{O_1} = \frac{\vec{r}_M + \beta\vec{r}_P}{1+\beta} = \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B}{1+\alpha} + \beta\frac{\vec{r}_D + \alpha\vec{r}_C}{1+\alpha}\right) = \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)}(\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B + \beta\vec{r}_D + \alpha\beta\vec{r}_C)$. Analog $\vec{r}_{O_2} = \frac{\vec{r}_Q + \alpha\vec{r}_N}{1+\alpha} = \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)}(\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B + \beta\vec{r}_D + \alpha\beta\vec{r}_C)$ și deci $\vec{r}_{O_1} = \vec{r}_{O_1} \Rightarrow O_1 \equiv O_2 \equiv O$.

23. Notăm $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{DQ}{QA}=k\Rightarrow \vec{r}_M=\frac{\vec{r}_A+k\vec{r}_B}{k+1}$, $\vec{r}_Q=\frac{k\vec{r}_A+\vec{r}_D}{k+1}$, $\vec{r}_N=\frac{\vec{r}_B+k\vec{r}_C}{k+1}$, $\vec{r}_P=\frac{\vec{r}_C+k\vec{r}_D}{k+1}$. MNPQ paralelogram $\Leftrightarrow \vec{r}_M+\vec{r}_N=\vec{r}_N+\vec{r}_Q\Leftrightarrow \vec{r}_M+\vec{r}_N-\vec{r}_N-\vec{r}_Q=0\Leftrightarrow \frac{(k-1)\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B+\vec{r}_C-\vec{r}_D\right)}{k+1}=0\Leftrightarrow \vec{r}_A-\vec{r}_B+\vec{r}_C-\vec{r}_D\Leftrightarrow \vec{r}_A+\vec{r}_C=\vec{r}_B+\vec{r}_D=0\Leftrightarrow$ ABCD paralelogram.

24. a) Notăm $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BN}=n\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CP}=p\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{DQ}=q\overrightarrow{DA}$ și obținem $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=(1-m)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD},\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}=-p\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AD},\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP}=(1-p)\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}=-m\overrightarrow{AB}+(1-q)\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=(2-m-p)\overrightarrow{AB}+(n+q)\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP}=(-m-p)\overrightarrow{AB}+(2-n-q)\overrightarrow{AD}$. Dacă $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP})\|\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \frac{2-m-p}{1}=\frac{n+q}{1}\Rightarrow n=2-m-p-q\Rightarrow \overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP}=(-m-p)\overrightarrow{AB}+(2-n-q)\overrightarrow{AD}=(-m-p)\overrightarrow{AB}+(m+p)\overrightarrow{AD}=(m+p)(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(m+p)\overrightarrow{BD}\Rightarrow (\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP})\|\overrightarrow{BD}$ și reciproc.

25. Deoarece M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABE, rezultă:

Din $\frac{PE}{PD}=\frac{QC}{QD}=2$ obținem: $\vec{r}_M=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$ si $\vec{r}_N=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_E)$ (1) respectiv $\vec{r}_Q=\frac{1}{3}(\vec{r}_C+2\vec{r}_D)$ si $\vec{r}_P=\frac{1}{3}(\vec{r}_E+2\vec{r}_D)$ (2)

Din relațiile (l) si (2) deducem: $\overrightarrow{MQ}=\vec{r}_Q-\vec{r}_M=\frac{1}{3}(\vec{r}_C+2\vec{r}_D-\vec{r}_A-\vec{r}_B-\vec{r}_C)=\frac{1}{3}(2\vec{r}_D-\vec{r}_A-\vec{r}_B)$ si $\overrightarrow{NP}=\vec{r}_P-\vec{r}_N=\frac{1}{3}(\vec{r}_E+2\vec{r}_D-\vec{r}_A-\vec{r}_B-\vec{r}_E)=\frac{1}{3}(2\vec{r}_D-\vec{r}_A-\vec{r}_B)$, de unde rezultă concluzia.

26. $\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2G_2};\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2G_2};\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2G_2}$. Se adună membru cu membru cele trei relații și se ține cont că $\sum\overrightarrow{G_1A_1}=\vec{0}$ respectiv $\sum\overrightarrow{G_2A_2}=\vec{0}$.

27. Presupunem că cele două triunghiuri au același centru de greutate. Avem $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{GB'}$ respectiv $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{GC'}$ de unde $\underbrace{\sum\overrightarrow{GA}}_{=\vec{0}}+\sum\overrightarrow{AA'}=\underbrace{\sum GA'}_{=\vec{0}}\Rightarrow$ $\sum\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$.

Reciproc, $\sum\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$ și presupunem că cele două triunghiuri au centre de greutate diferite. Conform problemei anterioate (26), $\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{3}\sum\overrightarrow{AA'}=0$, de unde $G_1=G_2$.

28. Notăm cu $a=BC,b=CA,c=AB$. Conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$, $\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{BA}=\frac{a}{c}$, $\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$. De aici deducem: $BD=\frac{c}{b+c}BC$, $CE=\frac{a}{a+c}CA$, $AF=\frac{b}{a+b}AB$. Exprimăm vectorii $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AF}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$. Avem: $\overrightarrow{BD}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}=\frac{c}{b+c}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{CE}=\frac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}=-\frac{a}{a+c}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Suma

lor: $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF}=\left(\frac{b}{a+b}-\frac{c}{b+c}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{c}{b+c}-\frac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{AC}$. Dacă această sumă este vectorul nul, atunci coeficienții sunt nuli: $\frac{b}{a+b}=\frac{c}{b+c}$, $\frac{c}{b+c}=\frac{a}{a+c}$. Prima egalitate dă $b(b+c)=c(a+b)$, adică $b^2+bc=ac+bc$, deci $b^2=ac$. A doua dă $c(a+c)=a(b+c)$, adică $ac+c^2=ab+ac$, deci $c^2=ab$. Din $b^2=ac$ și $c^2=ab$ rezultă $b^3=abc=c^3$, deci $b=c$, iar apoi $a=b=c$. Astfel triunghiul ABC este echilateral.

Reciproc, dacă ABC este echilateral, atunci $a=b=c$ și din expresiile de mai sus avem $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, iar suma $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$.

29.
$$\begin{array}{lll}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{GA'} & \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{GB'} & \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{GC'}\\ \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{GA'} & \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{GB'} & \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{GC'}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{GA'} & \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{GB'} & \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{GC'}\end{array}$$

Însumând cele 9 relații membru cu membru obținem $3(\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}})+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{CC'}=3(\underbrace{\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}}_{=\vec{0}})$.

30. a) $\vec{r}_G=\frac{1}{3}\left(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{r}_M+\vec{r}_N+\vec{r}_P\right)$ (vezi problema (13)),pagina 191.

$\vec{r}_{G_1}=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_M+\vec{r}_P)$, $\vec{r}_{G_2}=\frac{1}{3}(\vec{r}_B+\vec{r}_M+\vec{r}_N)$, $\vec{r}_{G_3}=\frac{1}{3}(\vec{r}_C+\vec{r}_P+\vec{r}_N)$.

Fie G' centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$.
$\vec{r}_{G'}=\frac{1}{3}(\vec{r}_{G_1}+\vec{r}_{G_2}+\vec{r}_{G_3})=\frac{1}{9}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+2(\vec{r}_M+\vec{r}_N+\vec{r}_P))=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)=\vec{r}_G\Rightarrow G=G'$.

b) Luând D pol, avem $3\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DG_1}+\overrightarrow{DG_2}+\overrightarrow{DG_3}\Rightarrow\left|3\overrightarrow{DG}\right|=\left|\overrightarrow{DG_1}+\overrightarrow{DG_2}+\overrightarrow{DG_3}\right|<\left|\overrightarrow{DG_1}\right|+\left|\overrightarrow{DG_2}\right|+\left|\overrightarrow{DG_3}\right|\Leftrightarrow 3DG<DG_1+DG_2+DG_3$.

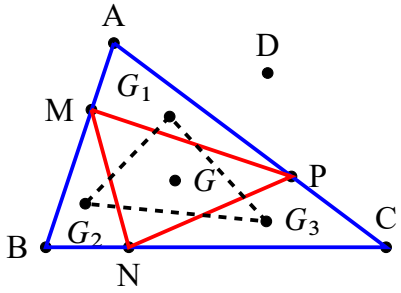


Fig. 191: *Problema 30*

31. Notând cu G_1,G_2,G_3,G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AOB,BOC,COD respectiv AOD, obținem $\vec{r}_{G_1}=\frac{1}{3}(\vec{r}_O+\vec{r}_A+\vec{r}_B)$, $\vec{r}_{G_2}=\frac{1}{3}(\vec{r}_O+\vec{r}_C+\vec{r}_D)$, $\vec{r}_{G_3}=\frac{1}{3}(\vec{r}_O+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$, $\vec{r}_{G_4}=\frac{1}{3}(\vec{r}_O+\vec{r}_A+\vec{r}_D)$. Condiția ca $G_1G_2G_3G_4$ să fie paralelogram este $\vec{r}_{G_1}+\vec{r}_{G_3}=\vec{r}_{G_2}+\vec{r}_{G_4}$ (vezi problema 16, pagina 175) ce se verică prin calcul.

32. $\vec{r}_{G_1}=\frac{1}{3}(\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D)$, $\vec{r}_{G_2}=\frac{1}{3}(\vec{r}_C+\vec{r}_D+\vec{r}_A)$, $\vec{r}_{G_3}=\frac{1}{3}(\vec{r}_D+\vec{r}_A+\vec{r}_B)$, $\vec{r}_{G_4}=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$ de unde $\overrightarrow{G_1G_2}=\vec{r}_{G_2}-\vec{r}_{G_1}=\frac{1}{3}(\vec{r}_B-\vec{r}_A)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Analog $\overrightarrow{G_2G_3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{G_3G_4}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{G_4G_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

33. $ABGH$ este paralelogram dacă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH}$.

În $\triangle BCD$ avem $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
În $\triangle ACD$ avem $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Scăzând membru cu membru cele două relații obținem $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB}$. Dar $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GO}$ și $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH} \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow G = O$.

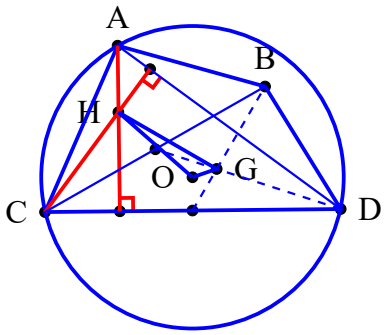


Fig. 192: *Problema 33*

34. a) Aplicăm relația lui Sylvester. În $\triangle MAB \Rightarrow \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. În $\triangle MAB \Rightarrow \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. În $\triangle MAB \Rightarrow \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. În $\triangle MAB \Rightarrow \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$. Avem $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{H_3H_4} = \overrightarrow{OH_4} - \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$. Din ultimele două relații rezultă că $H_1H_2 \| H_3H_4$ și $H_1H_2 = H_3H_4$ deci $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

b) $\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Pe de altă parte $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ respectiv $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$. Prin insumare rezultă $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{H_1H_3}$.

35. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (Sylvester), $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (Sylvester), $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (vectorul mediană).

O centrul de greutate al triunghiului $\Delta HKL \Rightarrow \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{3}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$. Fie M mijlocul lui CD $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ și avem $\frac{3}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OL} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{OM} \Rightarrow M, O, L$ coliniare. Dar $OL \perp AB, OM \perp CD \Rightarrow AB \| CD \Rightarrow ABCD$ trapez inscriptibil, deci isoscel.

36. Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, respectiv ACD. Vom arăta că $O_1 = O_2$. Avem: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{O_1H_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{O_1H_1} - \overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1H_1} + \overrightarrow{H_2O_2} = \overrightarrow{DC}$. Pe de altă parte $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2O_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = -\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{H_1H_2}$ și $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow O_1 = O_2$

37. $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BH_1} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{BH_2} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{DH_1} = \overrightarrow{BH_2}$.

38. Fie cercul (ABC) și $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, deci $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM}$, adică se construiește un triunghi de ortocentru M. Se ia un A arbitrar și se construiește paralelogramul OAMN, unde $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON}$ iar $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, deci ON mediatoarea lui BC, etc.

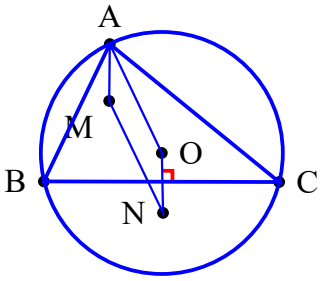


Fig. 193: *Problema 38*

39. a) În **3.1**,pagina 193 se ia în loc de O punctul M.

b) În **3.2 c** se ia în loc de O,M.

c) Conform punctului b) avem $\vec{v} = (a+b+c)\overrightarrow{GI}$, iar conform punctului a) $\vec{u} = 3\overrightarrow{IG}$. Rezultă $3\vec{v} = -(a+b+c)\vec{u} \Rightarrow \vec{v} \| \vec{u}$ și $3|\vec{v}| = (a+b+c)|\vec{u}|$.

40. Dacă în **3.2**,pagina 193 alegem O=I rezultă $\sum a\overrightarrow{AI} = \vec{0}$. Reciproc, dacă $\sum a\overrightarrow{AI} = \vec{0} \Rightarrow a(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI}) + b(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OI}) + c(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$, O arbitrar.

41. Din **3.4 d** pagina 196, $\dfrac{HG}{GO} = 2 = \dfrac{H_1G_1}{G_1O_1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MG} = \dfrac{\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO}}{3}, \\ \overrightarrow{MG} = \dfrac{\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO}}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO} \\ 3\overrightarrow{MG1} = \overrightarrow{MH_1} + 2\overrightarrow{MO_1} \end{cases}$ $3\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MH_1} + 2\overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH_1} + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO_1}) = \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO} + \underbrace{\overrightarrow{HH_1} + 2\overrightarrow{OO_1}}_{=\vec{0}} = \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow G = G_1$.

42. a) Din ipoteză $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}$ și $\dfrac{AQ}{QA} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \dfrac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$, și $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = -\dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{AB} + \dfrac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$.

b) Fie $\{A'\} = AI \cap BC$. Aplicând teorema bisectoarei (vezi **3.2**, pag. 193) în triunghiul ABC obținem $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$ și $\overrightarrow{AI} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$. $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AP} = -\dfrac{a^2+ac-b^2}{(a+b)(a+b+c)}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$. Vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PI}$ sunt coliniari dacă și numai dacă au componentele proporționale, adică dacă $\dfrac{-\dfrac{a}{a+b}}{-\dfrac{a^2+ac-b^2}{(a+b)(a+b+c)}} = \dfrac{\dfrac{a}{a+c}}{\dfrac{c}{a+b+c}} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$, adică triunghiul ABC este dreptunghic în A.

43. Notăm $\dfrac{CQ}{CM} = k \Rightarrow \overrightarrow{CQ} = k\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NP} = \dfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AC} + 2\cdot\overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AC} - 2\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AC} = -2\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{6}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} =$

$\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{MQ}{CM}\cdot\overrightarrow{CM};\ \frac{CQ}{CM}=k\Rightarrow\frac{CM+MQ}{CM}=k\Rightarrow\frac{MQ}{CM}=k-1,\ \overrightarrow{CM}=\vec{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+(k-1)\cdot(-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{k}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-(k-1)\cdot\overrightarrow{AC};$

Vectorii $\overrightarrow{AP}$ și $\overrightarrow{AQ}$ fiind coliniari $\Rightarrow\frac{-2}{k}=\frac{\frac{6}{5}}{-(k-1)}\Rightarrow k=\frac{5}{4}$.

44. Notăm $AB=c, AC=b, BC=a, \overrightarrow{AI}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}, \overrightarrow{BI}=\frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{a+b+c}, \overrightarrow{CI}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}$. Din $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ obținem $(3b-4a)\overrightarrow{AB}+(3c-5a)\overrightarrow{AC}+(4c-5b)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$. Cum $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ relație este echivalentă cu $(8b-4a-4c)\overrightarrow{AB}+(7c-5a-5b)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ și deoarece vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari, rezultă $\begin{cases}8b-4a-4c=0\\7c-5a-5b=0\end{cases}$ de unde $b=\frac{4a}{3}$ și $c=\frac{5a}{3}$. Folosind reciproca teoremei lui Pitagora, obținem $m(\sphericalangle C)=90^o$.

45. *Soluție 1*: Fie C astfel încât $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}$ și D astfel încât $\overrightarrow{MD}=5\overrightarrow{MB}$ și N mijlocul segmentului CD Avem $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{2}=\overrightarrow{MA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{MB}$. Fie $\{P\}=MN\cap AB$ și $k\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{AP}{PB}=k\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{MA}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{MB}$. Cum $\overrightarrow{MP}$ și $\overrightarrow{MN}$ sunt coliniari avem și $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MP}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{MB}=\alpha\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{MA}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{MB}\right)$ de unde $k=\frac{5}{2}$ și P fix.

Soluție 2. Fie P un punct pe AB astfel încât: $2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$.

Pentru orice punct M, avem:

$$2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA})+5(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PB})=7\overrightarrow{MP}+(2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB})=7\overrightarrow{MP}.$$

Deci: $2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=7\overrightarrow{MP}$. Aceasta arată că vectorul $2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}$ este coliniar cu $\overrightarrow{MP}$ și trece prin punctul fix P.

46. Fie $AC\cap DB=\{O\}$.Avem $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$, $VON=\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OC}$, $VOM=\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OD}$ și $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OD}\right)$. Cum $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$ rezultă $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$ și deci $G\in(AC)$.

47. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OC}=0\Leftrightarrow3\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow3\overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow I=G$ unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC

48. Aplicând teorema bisectoarei obținem: $\overrightarrow{AP}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, $\overrightarrow{BQ}=\frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{a+c}=\frac{c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-a\overrightarrow{AB}}{a+c}$, $\overrightarrow{CR}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b}=\frac{-a\overrightarrow{AC}-b(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})}{a+b}$ și $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=$

$\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{c}{a+c}-1\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Cum $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{AC}$ egalitatea anterioară are loc dacă și numai dacă

$$\begin{cases}\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}-1=0\\ \frac{c}{b+c}+\frac{c}{a+c}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$$

49. Dacă $\triangle ABC$ este echilateral bisectoarele, sunt mediane, deci

$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}, 2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\Rightarrow 2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$

Reciproc, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$. Notăm $BC=a, AC=b, AB=c$. Atunci $\overrightarrow{AD}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}, \overrightarrow{BF}=\frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{a+c}, \overrightarrow{CE}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{b+a}$

$(b^2-a^2)c\overrightarrow{AB}+(c^2-b^2)a\overrightarrow{BC}+(a^2-c^2)b\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$

Dar, $\overrightarrow{CA}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$ si astfel $(b^2c-a^2c-ba^2+bc^2)\overrightarrow{AB}+(ac^2-ab^2-ba^2+bc^2)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ nefiind coliniari rezultă $\begin{cases}(b^2c-a^2c-ba^2+bc^2=0\\ ac^2-ab^2-ba^2+bc^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b+c)(bc-a^2)=0\\ (a+b)(c^2-ab)=0\end{cases}\Rightarrow$ $a=b=c$.

50. Aplicând teorema bisectoarei obținem:

$\overrightarrow{AP}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}, \overrightarrow{BQ}=\frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{a+c}=\frac{c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-a\overrightarrow{AB}}{a+c}, \overrightarrow{CR}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b}=\frac{-a\overrightarrow{AC}-b(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})}{a+b}$ și $(b+c)\overrightarrow{AP}+(a+c)\overrightarrow{BQ}+(a+b)\overrightarrow{CR}=\vec{0}\Leftrightarrow(2b-a-c)\overrightarrow{AB}+(2c-a-b)\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2b-a-c\\ 2c-a-b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$

51. Folosim **3.2 c**,pagina 193, $\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OI}$ și $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=(a+b+c)\overrightarrow{OG}$ adică $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow G=I$.

52. Folosim **3.1 d** pagina 193, $\sum\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OG}=0\Rightarrow G=O$ și cum $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{GO}=0\Rightarrow H=G$.

53. Consideram triunghiul ABC in care M, N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar I centrul cercului înscris in triunghi.

Folosim **3.1 d** pagina 193, unde luăm ca pol punctul A și avem $\overrightarrow{AI}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}, \overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AM}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}-\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{b-a-c}{2(a+b+c)}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AN}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}-$

$\frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c-a-b}{2(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$. Presupunem prin absurd ca punctele M, I, N sunt coliniare, deci vectorii $\vec{MI}, \vec{NI}$ au componentele proporționale.

De unde rezultă că $a = b + c$. Fals! Deci punctele M, I, N nu pot fi coliniare.

54.

$EH_1 \perp AB, CH \perp AB \Rightarrow EH_1 || CH$
Cum $AE = EC \Rightarrow H_1$ este mijlocul segmentului AH.
Analog H_2 este mijlocul segmentului BH, H_3 este mijlocul segmentului CH și $\vec{0} = \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_3} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OH}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OH}}{2} = \frac{4\overrightarrow{OH}}{2} = 2\overrightarrow{OH}$ deci $O = H \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral.

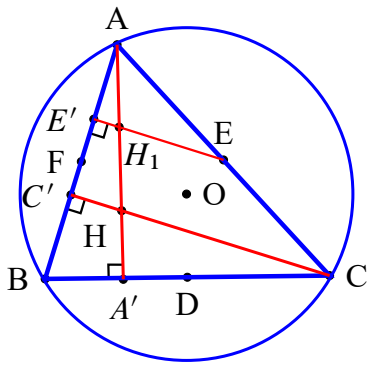


Fig. 194: *Problema 54*

55. Notăm raportul $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = k$, atunci $\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{DA_1} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{DC_1}$ sau, folosind ipoteza, $b \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{1}{1+k}a \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{k}{1+k}c \cdot \overrightarrow{DC}$, de unde $\overrightarrow{DB} = \frac{a}{b(1+k)} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{kc}{b(1+k)} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Dar vectorul $\overrightarrow{DB}$ se mai scrie $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ şi cum scrierea într-o bază este unică, rezultă egalitățile $\frac{a}{b(1+k)} = 1$ și $\frac{kc}{b(1+k)} = 1$, care prin împărțire ne conduc la $k = \frac{a}{c}$. Înlocuind k în $\frac{a}{b(1+k)} = 1$, obținem relația $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$. Folosind acum inegalitatea dintre media armonică şi cea geometrică, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} \le \sqrt{ac}$ avem $2b \le \sqrt{ac}$.

Egalitate avem când dreapta este paralelă cu AC.

Test de evaluare **pag.200**

1. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB}}{5}$.

2. a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. b) $3(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) + 6(-\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = -\frac{9}{2n}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{9}{2}\vec{v} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.

3. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$. Cum $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right| = 14 \Rightarrow \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}\right| = 14 \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = 6 \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$.

4. a) Soluție 1. $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\alpha}{\gamma}\Rightarrow\overrightarrow{OB_1}=\frac{\overrightarrow{OC}+\frac{\alpha}{\gamma}\overrightarrow{OA}}{1+\frac{\alpha}{\gamma}}=\frac{\gamma\overrightarrow{OC}+\alpha\overrightarrow{OA}}{\alpha+\gamma}$. Analog $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow$ $\overrightarrow{OC_1}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}}{\alpha+\beta}$. Cum C, M, C_1 coliniare (vezi problema 5,pag.184) avem $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OC}+(1-m)\overrightarrow{OC_1}=m\overrightarrow{OC}+(1-m)\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}}{\alpha+\beta}$. Analog B, M, B_1 coliniare $\Rightarrow\overrightarrow{OM}=n\overrightarrow{OB}+(1-n)\overrightarrow{OB_1}=n\overrightarrow{OB}+(1-n)\frac{\gamma\overrightarrow{OC}+\alpha\overrightarrow{OA}}{\alpha+\gamma}$ și deci $m\overrightarrow{OC}+(1-m)\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}}{\alpha+\beta}=n\overrightarrow{OB}+(1-n)\frac{\gamma\overrightarrow{OC}+\alpha\overrightarrow{OA}}{\alpha+\gamma}$. In această relație, punctul O fiind arbitrar luăm O=A și obținem $m\overrightarrow{AC}+(1-m)\frac{\beta\overrightarrow{AB}}{\alpha+\beta}=n\overrightarrow{AB}+(1-n)\frac{\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\gamma}\Leftrightarrow\left(\frac{(1-m)\beta}{\alpha+\beta}-n\right)\overrightarrow{AB}+\left(m-\frac{(1-n)\gamma}{\alpha+\gamma}\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Cum vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ nu sunt coliniari avem $\begin{cases}\frac{(1-m)\beta}{\alpha+\beta}-n=0\\(m-\frac{(1-n)\gamma}{\alpha+\gamma}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\\n=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}$. In final $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OC}+(1-m)\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\left(1-\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$

Soluție 2. Aplicăm teorema lui **Van Aubel** (vezi pag. 201) pentru ceviana $AA_1\Rightarrow\frac{MA}{MA_1}=\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma+\beta}{\alpha}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{\gamma+\beta}{\alpha}\overrightarrow{OA_1}}{1+\frac{\gamma+\beta}{\alpha}}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+(\gamma+\beta)\overrightarrow{OA_1}}{\alpha+\beta+\gamma}$. Din $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\gamma}{\beta}\Rightarrow\overrightarrow{OA_1}=\frac{\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\gamma+\beta}$ și deci $\overrightarrow{OM}=\frac{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha+\beta+\gamma}$

b) $\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}+\gamma\cdot\overrightarrow{MC}=\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})+\beta(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})+\gamma(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}-(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OM}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OM}-(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OM}=\vec{0}$.

Probleme de concurență și coliniaritate **pag.200**

1. Conform problemei 1, pag.201 $\overrightarrow{OM}=\frac{k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}}{k_1+k_2+k_3}$.

a) Centrul de greutate. M=G. În (1) luăm $k_1=k_2=k_3=1\Rightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\Rightarrow\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_V+\vec{r}_C}{3}$

Centrul cercului înscris în triunghi M=I. Conform teoremei bisectoarei $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{c}{b};\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{a}{c};\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{b}{a}\Rightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{a\cdot\overrightarrow{IA}+b\cdot\overrightarrow{IB}+c\cdot\overrightarrow{IC}}{a+b+c}$

b) H ortocentrul. În $\triangle BA_1A\Rightarrow\operatorname{tg}B=\frac{AA_1}{BA_1}$. In $\triangle CA_1A\Rightarrow\operatorname{tg}C=\frac{AA_1}{A_1C}$ și $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}$. Analog $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}C};\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A}\Rightarrow\overrightarrow{OH}=\frac{\operatorname{tg}A\cdot\vec{r}_A+\operatorname{tg}B\cdot\vec{r}_B+\operatorname{tg}AC\cdot\vec{r}_C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}$.

O centrul cercului circumscris triunghiului.

Se arată că $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$ și analoagele.

3. Soluție vectorială:

Notăm cu M,N,P,Q mijloacele laturilor AB,BC,CD respectiv DA, cu X mijlocul diagonalei AC și cu Y mijlocul diagonalei DB. Fie $\{O\} = PM \cap QN$. Avem $\begin{cases} 2\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \\ 2\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OX} + 2\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{OY} \Rightarrow O \in (XY)$.

Soluție sintetică: Se observă că XY, PM și QN sunt diagonale în paralelogramele QMNP, QXNY, MXPY .

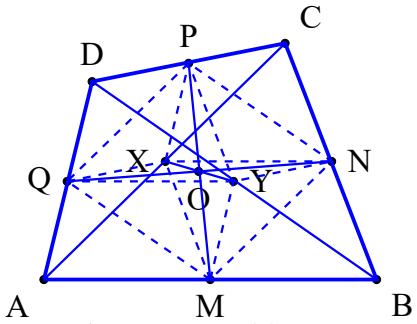


Fig. 196: *Problema 3*

4. a) vezi problema 3, pag. 201. b) Fie $\{O\} = MP \cap NQ$. Din ipoteză $\overrightarrow{DG_1} = 2\overrightarrow{G_1N} \Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} \Rightarrow A, O, G_1$ coliniare$\Rightarrow O \in AG_1$. Analog se rată că $O \in BG_2$, $O \in CG_3$ și $O \in DG_4$ și deci $AG_1 \cap BG_2 \cap CG_3 \cap DG_4 = \{O\}$.

5.

Soluție sintetică: Fie $P \in AC$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} = \frac{DN}{NC} = k$. Conform reciprocei teoremei lui Thales $PN \| AD$ și $PM \| BC$. În triunghiul MNP, $MN \leq MP + PN$ cu egalitate dacă M,P,N sunt coliniare. $\frac{PN}{AD} = \frac{1}{k+1}$ și $\frac{MP}{BC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow MP + PN = \frac{1}{k+1}AD + \frac{k}{k+1}BC$.

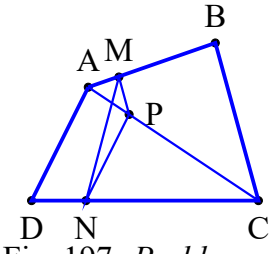


Fig. 197: *Problema 5*

Soluție vectorială: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AD}$ și $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}\right| \leq \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right| + k\left|\overrightarrow{BC}\right|}{1+k}$.

6. a) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$ și analoagele (1) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{k+1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{k}{k+1}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \vec{0}$.

b) Din (1), $AN < \frac{1}{k+1}AB + \frac{k}{k+1}AC$ și analoagele. Prin adunare obținem concluzia

7. Considerăm reperul determinat de dreptele perpendiculare AB şi AC, cu versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ și M mijlocul lui AC .

Triunghiul fiind dreptunghic, rezultă $BC = 5a$.

$\frac{DA}{DB}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{DA}{AB}=\frac{3}{8}\Rightarrow\overrightarrow{DA}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}=-\frac{3a}{2}\vec{i};\ \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3a}{2}\vec{j};\ \overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)=\frac{-8a\vec{i}+3a\vec{j}}{6}$ și $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}=-\frac{a}{6}\vec{i}+a\vec{j}$

Deci $DG=\left\|\overrightarrow{DG}\right\|=\sqrt{\left(-\frac{a}{6}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{37a^2}{36}}=a\frac{\sqrt{37}}{6}>a\frac{\sqrt{36}}{6}=a.$

8. a) Avem că $P\in(AC)\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ și $\frac{AP}{CP}=\frac{3}{2}$, $Q\in(AB)$ și $\frac{AQ}{BQ}=\frac{2}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Folosind relația $31\cdot\overrightarrow{RA}+18\cdot\overrightarrow{RB}+6\cdot\overrightarrow{RC}=\vec{0}$ obținem $31\cdot\overrightarrow{RA}+18\cdot\overrightarrow{RB}+6\cdot\overrightarrow{RC}=\vec{0}\Leftrightarrow 31\cdot\overrightarrow{RA}+18\cdot\left(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AB}\right)+6\cdot\left(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AR}=\frac{18}{55}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{6}{55}\cdot\overrightarrow{AC}$. Cum $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AP}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{QA}=-\frac{4}{55}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{55}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{11}\overrightarrow{QP}\Rightarrow\overrightarrow{QR}\|\overrightarrow{QP}\Rightarrow R,Q,P$ coliniare.

b) Notăm $\frac{BM}{CM}=k\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$. Cum $\overrightarrow{AR}\|\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$ componentele sunt proporționale, rezultă $k=-\frac{1}{3}$.

9. Notăm $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{DA}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|},\vec{v}=\frac{\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DC}\right|},\vec{i}=\frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|},\vec{j}=\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$. Avem $\overrightarrow{ST}=\frac{\overrightarrow{SA}+k\overrightarrow{SC}}{1+k}=\frac{\overrightarrow{SQ}+\overrightarrow{QA}+k(\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{PC})}{1+k}$. $\frac{QS}{SP}=k\Rightarrow\overrightarrow{SQ}=-k\overrightarrow{SP}$ și $\frac{AQ}{CP}=k\Rightarrow AQ=kCP\Rightarrow\overrightarrow{QA}=\left|\overrightarrow{QA}\right|\vec{u}=k\left|\overrightarrow{PC}\right|\vec{u}$ și $\overrightarrow{PC}=\left|\overrightarrow{PC}\right|\vec{v}$. Obținem $\overrightarrow{ST}=\frac{k}{1+k}\left|\overrightarrow{PC}\right|(\vec{u}+\vec{v})$. Analog $\overrightarrow{UT}=\frac{\overrightarrow{UA}+k\overrightarrow{UC}}{1+k}=\ldots=\frac{k}{1+k}\left|\overrightarrow{NC}\right|(\vec{i}+\vec{j})$. Cum $\vec{u}+\vec{v}$ ne dă direcția bisectoarei unghiului ADC, iar $\vec{i}+\vec{j}$ direcția bisectoarei unghiului ABC, rezultă că dacă S,T,U coliniare atunci cele două bisectoare sunt paralele și $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC$ și reciproc.

10. Notăm $\overrightarrow{CD}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b},\frac{DE}{ED}=k\Rightarrow\overrightarrow{CE}=\frac{\overrightarrow{CD}+k\overrightarrow{CB}}{1+k}=\frac{\vec{a}+k\vec{b}}{1+k},\overrightarrow{CO}=\frac{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CE}=\frac{(k-1)\vec{a}+(1-k)\vec{b}}{2(1+k)}$. Cum EO linie mijlocie în triunghiul ACF, rezultă $\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{EO}\Leftrightarrow\overrightarrow{FA}=\frac{k-1}{k+1}\vec{a}+\frac{1-k}{k+1}\vec{b}$. Pe de altă parte $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HA}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ și cum descompunerea după direcțiile $\vec{a},\vec{b}$ este unică, rezultă $\alpha=\frac{k-1}{k+1}$ și $\beta=\frac{1-k}{k+1}$, adică $\overrightarrow{FH}=\frac{k-1}{k+1}\vec{a}=\overrightarrow{GA}$ și $\overrightarrow{HA}=\frac{1-k}{k+1}\vec{b}=\overrightarrow{FG}$. Avem $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{HA}=\frac{k-1}{k+1}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{k-1}{k+1}\overrightarrow{CA}$ și deci $\overrightarrow{GH}\|\overrightarrow{C}A$. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA}=\frac{\vec{a}+k\vec{b}}{1+k}-(\vec{b}+\vec{a})=-\frac{k}{k+1}\vec{a}-\frac{1}{k+1}\vec{b}$. $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{k}{k+1}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{k}{k+1}\overrightarrow{CA}$ și deci $\overrightarrow{HE}\|\overrightarrow{AC}$. Din $\overrightarrow{GH}\|\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{HE}\|\overrightarrow{AC}$, rezultă $\overrightarrow{GH}\|\overrightarrow{HE}\Leftrightarrow G,H,E$ coliniare.

11. a) $\frac{PD}{PC}=\frac{QB}{QA}=r\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OD}+r\overrightarrow{OC}}{1+r}$ și $\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OA}}{1+r}$. Deoarece $O=AC\cap BD$, există $\alpha,\beta>0$ cu $\overrightarrow{OA}=-\alpha\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OB}=-\beta\overrightarrow{OD}$ (întrucât O este între A,C și respectiv între B,D). Astfel $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{1+r}(-r\alpha\overrightarrow{OC}-\beta\overrightarrow{OD})$ respectiv $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+r}(r\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$. Vectorii $\overrightarrow{OP}$ și $\overrightarrow{OQ}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\exists\lambda$ cu $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}$, adică: $-r\alpha\overrightarrow{OC}-\beta\overrightarrow{OD}=\lambda(r\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$. Deoarece $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ sunt liniar independenți $\Rightarrow\begin{cases}-r\alpha=\lambda r\\-\beta=\lambda\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta$. Deci : $\overrightarrow{OP}\parallel\overrightarrow{OQ}\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Pe de altă parte, $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$ înseamnă că $\exists\mu$ cu $\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})\Leftrightarrow -\beta\overrightarrow{OD}+\alpha\overrightarrow{OC}=\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})\Leftrightarrow\mu=\alpha=\beta$.

Deci $\vec{AB}\parallel\vec{DC}\Leftrightarrow\alpha=\beta\Leftrightarrow\vec{OP}\parallel\vec{OQ}$.

b) Pentru $r=1$: P este mijlocul lui DC, Q este mijlocul lui AB.

Din analiza de mai sus, $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\alpha=\beta$. Se arată că oricare din cele trei condiții de coliniaritate este echivalentă cu $\alpha=\beta$.

12. Avem: $\vec{r}_D=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_O+\vec{r}_E}{3}$, $\vec{r}_C=\frac{\vec{r}_B+\vec{r}_O+\vec{r}_F}{3}$, de unde $\vec{r}_C-\vec{r}_D=\frac{\vec{r}_B-\vec{r}_A+\vec{r}_F-\vec{r}_E}{3}$. $ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow\vec{r}_B-\vec{r}_A=\vec{r}_C-\vec{r}_D\Rightarrow\vec{r}_B-\vec{r}_A=\frac{\vec{r}_B-\vec{r}_A+\vec{r}_F-\vec{r}_E}{3}\Leftrightarrow 3(\vec{r}_B-\vec{r}_A)=\vec{r}_B-\vec{r}_A+\vec{r}_F-\vec{r}_E\Leftrightarrow 2(\vec{r}_B-\vec{r}_A)=\vec{r}_F-\vec{r}_E\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$.

13. $\vec{r}_M=\frac{k_1r_B+r_A}{1+k_1},\vec{r}_N=\frac{k_2r_C+r_A}{1+k_2},\vec{r}_{M'}=\frac{\vec{r}_M-l_1\vec{r}_C}{1-l_1}=\frac{-l_1r_C+\frac{k_1r_B+r_A}{1+k_1}}{1-l_1},\vec{r}_{N'}=\frac{\vec{r}_N-l_2\vec{r}_B}{1-l_2}=\frac{-l_2r_B+\frac{k_2r_C+r_A}{1+k_2}}{1-l_2}$. Condiția ca M',A,N' să fie coliniare este echivalentă cu vectorii $\overrightarrow{AM'}$ și $\overrightarrow{AN'}$ să fie coliniari, adică $\overrightarrow{AM'}=\lambda\cdot\overrightarrow{AN'}$

$\overrightarrow{AM'}=\vec{r}_{M'}-\vec{r}_A=\frac{k_1}{(1-l_1)(1+k_1)}(\vec{r}_B-\vec{r}_A)-\frac{l_1}{1-l_1}(\vec{r}_C-\vec{r}_A)$. Analog $\overrightarrow{AN'}=\frac{-l_2}{1-l_2}(\vec{r}_B-\vec{r}_A)+\frac{k_2}{(1-l_2)(1+k_2)}(\vec{r}_C-\vec{r}_A)$. Cum $\vec{r}_B-\vec{r}_A=\overrightarrow{AB}$ și $\vec{r}_C-\vec{r}_A=\overrightarrow{AC}$ condiția $\overrightarrow{AM'}=\lambda\cdot\overrightarrow{AN'}$, prin identificarea coeficienților vectorilor $\vec{r}_B-\vec{r}_A$ și $\vec{r}_C-\vec{r}_A$ obținem: $\begin{cases}\frac{k_1}{(1-l_1)(1+k_1)}=t\cdot\frac{-l_2}{1-l_2}\\\frac{-l_1}{1-l_1}=t\cdot\frac{k_2}{(1-l_2)(1+k_2)}\end{cases}$

Împărțind prima ecuație la a doua (eliminăm t): $\frac{k_1}{(1+k_1)(-l_1)}=\frac{-l_2(1+k_2)}{k_2}\Leftrightarrow k_1k_2=l_1l_2(1+k_1)(1+k_2)$.

14. $\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}$, $\vec{r}_{G_A}=\frac{\vec{r}_M+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}$, $\vec{r}_{G_B}=\frac{\vec{r}_M+\vec{r}_C+\vec{r}_A}{3},\vec{r}_{G_C}=\frac{\vec{r}_M+\vec{r}_B+\vec{r}_A}{3}$, $\vec{r}_{G_A}=\frac{\vec{r}_{A'}+\vec{r}_N}{2}\Rightarrow\vec{r}_{A'}=2\vec{r}_{G_A}-\vec{r}_N=\frac{2\vec{r}_M+2\vec{r}_B+2\vec{r}_C}{3}-\vec{r}_N$. Analog $\vec{r}_{B'}=\frac{2\vec{r}_M+2\vec{r}_C+2\vec{r}_A}{3}-\vec{r}_N$, $\vec{r}_{C'}=\frac{2\vec{r}_M+2\vec{r}_A+2\vec{r}_B}{3}-\vec{r}_N$. Definim punctul P prin vectorul de poziție $\vec{r}_P=\frac{2}{5}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+$

$\vec{r}_C + \vec{r}_M) - \frac{3}{5}\vec{r}_N$ și arătăm că el se găsește pe dreptele AA', BB' și CC'. Avem $\overrightarrow{AA'} = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \frac{2\vec{r}_M + 2\vec{r}_B + 2\vec{r}_C - 3\vec{r}_N - 3\vec{r}_A}{3}$ și $\overrightarrow{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = \ldots = \frac{1}{5}(2\vec{r}_M + 2\vec{r}_B + 2\vec{r}_C - 3\vec{r}_N - 3\vec{r}_A) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AA'}$ și deci $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AA'} \Rightarrow P \in AA'$. Analog se arată că $P \in BB'$ și $P \in CC'$.

Prin calcul direct se verifică că $5(\vec{r}_P - \vec{r}_G) + 2(\vec{r}_N - \vec{r}_G) = 2(\vec{r}_M - \vec{r}_G)$.

15. În triunghiul CBE aplicând teorema lui Menelaus avem: $\frac{AE}{AB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{IC}{IE} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{IC}{IE} = 1 \Rightarrow \frac{IC}{IE} = 2$. Pe de altă parte $\frac{HE}{HG} \cdot \frac{DG}{DC} \cdot \frac{IC}{IE} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ și conform reciprocei teoremei lui Menelaus H, G, I sunt coliniare.

16. a) Se știe că $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow (\forall) O \in$ planului avem: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{k+1}, k \neq -1$ Dacă $\alpha = \beta = r \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OC}}{\alpha + 1}$; $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + \alpha\overrightarrow{OA}}{\alpha + 1}$; $\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}}{\alpha + 1}$

Dacă G este centrul de greutate al triunghiului $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, şî dacă G' este centrul de greutate al triunghiului ΔMPQ, atunci $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ Deci

$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OC}}{\alpha + 1} + \frac{\overrightarrow{OC} + \alpha\overrightarrow{OA}}{\alpha + 1} + \frac{\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}}{\alpha + 1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(1+\alpha)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}{1 + \alpha}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OG}$.

În concluzie, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} \Leftrightarrow G = G'$.

b) Se aplică teorema lui Ceva: dreptele AM, BP, CQ sunt concurente dacă şi numai dacă $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.

c) Din ipoteză, $m > 0$, de unde rezultă că punctul $N \notin [BC]$. Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul ΔABC pentru punctele N, S, Q cu

$NQ \cap (AC) = \{S\} : \frac{AS}{SC} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{QB}{QA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SC} = \frac{NB}{NC} \cdot \frac{QA}{QB} = m \cdot \gamma$. Deci raportul căutat este $-m \cdot \gamma$, deoarece $S \in (AC)$.

17. a) În $\Delta ABA'$ cu transversala $C'C$ aplicăm teorema lui Menelaus si obtinem:

$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{BC}{A'C} \cdot \frac{MA'}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{C'A}{C'B} = \frac{A'C}{BC} \cdot \frac{MA}{MA'}$

În $\Delta ACA'$ cu transversala BB' aplicăm teorema lui Menelaus si obtinem:

$\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{BC}{BA'} \cdot \frac{MA'}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{B'A}{B'C} = \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{MA}{MA'}$

Adunând relațiile obținem $\frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C} = \left(\frac{A'C}{BC} + \frac{BA'}{BC}\right)\frac{MA}{MA'} = \frac{MA}{MA'}$. Deci $\frac{MA}{MA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C}$.

b) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0}$.

Rezultă că $\frac{BA'}{BC}\overrightarrow{BC}+\frac{CB'}{CA}\overrightarrow{CA}+\frac{AC'}{AB}\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\frac{BA'}{BC}-\frac{CB'}{CA}\right)\overrightarrow{BC}+\left(\frac{AC'}{AB}-\frac{CB'}{CA}\right)\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$

Cum vectorii $\overrightarrow{BC}$ si $\overrightarrow{AB}$ sunt necoliniari rezultă că $\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=k$, adică

$\frac{A'C}{BC}=\frac{B'A}{CA}=\frac{C'B}{AB}=1-k.$

Din teorema lui Ceva avem că$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{BA}\cdot\frac{C'A}{CB}=1$, adică $k^3=(1-k)^3\Rightarrow k=\frac{1}{2}$. Deci A', B', C' sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

18. a) Fie E mijlocul diagonalei BD. Avem $PM\le PE+EM$ cu egalitate dacă P,E,M sunt coliniare.

$$\left.\begin{array}{l}PM\le PE+EM\Leftrightarrow PM\le\frac{AD}{2}+\frac{BC}{2}\Leftrightarrow 2PM\le AD+BC\\ QN\le QE+EN\Leftrightarrow QN\le\frac{AB}{2}+\frac{DC}{2}\Leftrightarrow 2QN\le AB+DC\end{array}\right|\Rightarrow$$

$2(PM+QN)\le AB+BC+CD+DA$ cu egalitate dacă $2PM=AD+BC$ și $2QN=AB+DC$, adică dacă P,E,M respectiv Q,E,N sunt coliniare. $EP\|AD, EM\|BC, P, E, M$ coliniare, implică $PM\|AD\|BC$. Analog $QN\|AB\|DC$ și $ABCD$ paralelogram.

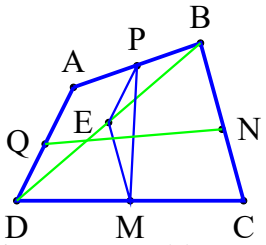


Fig. 198: *Problema 18*

b) $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}$ și prin însumarea celor două relații obținem $2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$. Analog, $2\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. În final $2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.

20. Vezi problema 5,pag. 202

a) $\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{BC}}{1+k}$; $\overrightarrow{QN}=\frac{\overrightarrow{DC}+k\overrightarrow{AB}}{1+k}$; $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}{1+k}=\frac{\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AC}}{1+k}=\overrightarrow{AC}$.

b) Din a)$\Rightarrow$ $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}{1+k}$ și ținând cont de problema 5,pag. 202$\Rightarrow$ $MP+QN\le\frac{AD+DC+k(AB+BC)}{1+k}$ cu egalitate dacă $\left(MP=\frac{AD+kBC}{1+k}\Leftrightarrow AD\|BC\right)$ și $\left(QN=\frac{DC+kAB}{1+k}\Leftrightarrow AB\|DC\right)$ adică ABCD paralelogram.

21. Vezi problema 5,pag. 202 $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{BC}}{1+k}$ și $MN\le\frac{AD+kBC}{1+k}$. Cum $AD=BC$ rezultă $MN\le AD$ și $MN\le BC$ cu egalitate dacă $AD\|BC$.

22. a) $\frac{DQ}{QC}=k\Rightarrow\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MD}+k\overrightarrow{MC}}{1+k}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+k(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})}{1+k}$.

$\frac{CN}{ND}=k\Rightarrow\overrightarrow{PN}=\frac{\overrightarrow{PC}+k\overrightarrow{PD}}{1+k}=\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+k(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD})}{1+k}$.

$$\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=\frac{(1+k)(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PA}}{1+k} \quad (1).$$

Dar $\frac{AM}{MB}=k \Rightarrow \overrightarrow{MA}=-k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Analog $\frac{PB}{PA}=k \Rightarrow \overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PA}=\vec{0}$.
Înlocuind în (1) obținem $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

b) $\frac{CN}{ND}=k \Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}}{1+k}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+k(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DB})}{1+k}$.

$\frac{DQ}{QC}=k \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{PD}+k\overrightarrow{PC}}{1+k}=\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BD}+k(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})}{1+k}$.

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\frac{(1+k)(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PA})}{1+k}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

23. Reformulăm problema

Să se determine mulțimea punctelor din planul patrulaterului cu proprietatea:
$\left|a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}\right|=k$, unde a,b,c,d,k sunt numere reale strict pozitive.

Se consideră punctul $E \in AB$ astfel încât $\overrightarrow{AE}=\frac{b}{a}\overrightarrow{EB}$ și de aici, vectorul de poziție al punctului E va fi $\overrightarrow{r_E}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\frac{b}{a}\overrightarrow{r_B}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}}{a+b}$.

Considerăm acum punctul $F \in EC$ astfel încât $\overrightarrow{EF}=\frac{c}{a+b}\overrightarrow{FC} \Rightarrow \overrightarrow{r_F}=\frac{\overrightarrow{r_E}+\frac{c}{a+b}\overrightarrow{r_C}}{1+\frac{c}{a+b}}=\frac{a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}$.

Construim punctul $G \in FD$ astfel încât $\overrightarrow{FG}=\frac{d}{a+b+c}\overrightarrow{GD}$. La fel ca mai înainte se arată că $\overrightarrow{r_G}=\frac{a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}+d\overrightarrow{r_D}}{a+b+c+d}$ sau $\overrightarrow{MG}=\frac{a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}}{a+b+c+d}$.

Prin urmare $\left|\overrightarrow{MG}\right|=\frac{k}{a+b+c+d}=k' \in (0,\ \infty)$.

Deoarece G este punct fix, va rezulta că M este situat pe cercul cu centrul în punctul G și de rază k'.

Se arată și reciproc.

Problema se reduce la a înlocui $a=2, b=3, c=4, d=5$.

24. Alegem ca reper vectorii necoliniari $\left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right\}$.

a) $O \in (AC) \Rightarrow \overrightarrow{OC}=-a\,\overrightarrow{OA}, \quad a=\frac{OC}{OA}; \quad O \in (BD) \Rightarrow \overrightarrow{OD}=-b\,\overrightarrow{OB}, \quad b=\frac{OD}{OB}$

$P \in (CD) \Rightarrow \exists\, x \in (0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{OP}=x\,\overrightarrow{OC}+(1-x)\,\overrightarrow{OD}=-ax\,\overrightarrow{OA}-b(1-x)\,\overrightarrow{OB}$. M mijlocul lui $AB \Rightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Cum vectorii $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{OP}$ sunt coliniari $\Rightarrow -2ax=$

$-2b(1-x) \Rightarrow x = \dfrac{b}{a+b}$ și $\boxed{\overrightarrow{OP} = -\dfrac{ab}{a+b}\overrightarrow{OA} - \dfrac{ab}{a+b}\overrightarrow{OB}}$;

$Q \in (AD) \Rightarrow \exists\, y \in (0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{OQ} = y\,\overrightarrow{OA} + (1-y)\,\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = y\,\overrightarrow{OA} - b(1-y)\,\overrightarrow{OB}$.
N mijlocul lui $BC \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} = -\dfrac{a}{2}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OQ}$ și $\overrightarrow{ON}$ sunt coliniari $\Rightarrow \dfrac{y}{2} = \dfrac{ab(1-y)}{2} \Rightarrow y = \dfrac{ab}{1+ab}$ și $\boxed{\overrightarrow{OQ} = \dfrac{ab}{1+ab}\overrightarrow{OA} - \dfrac{b}{1+ab}\overrightarrow{OB}}$

b) Fie G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ANP, respectiv CMQ.
$3\,\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \left(1 - \dfrac{a}{2} - \dfrac{ab}{a+b}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{ab}{a+b}\right)\overrightarrow{OB}$ și
$3\,\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = \left(\dfrac{1}{2} - a + \dfrac{ab}{1+ab}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{1+ab}\right)\overrightarrow{OB}$

$G_1 = G_2 \Rightarrow 3\,\overrightarrow{OG_1} = 3\,\overrightarrow{OG_2}$, deci: $1 - \dfrac{a}{2} - \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{1}{2} - a + \dfrac{ab}{1+ab}$ și $\dfrac{1}{2} - \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{1+ab}$
$\Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} \Rightarrow O$ este mijlocul lui AC și $BD \Rightarrow ABCD$ paralelogram.

25. $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$. Punctele A,F, E coliniare $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AD} + (1-\lambda)\overrightarrow{AE} = \dfrac{\lambda\overrightarrow{AB}}{4} + \dfrac{(1-\lambda)\,\overrightarrow{AC}}{3}$. Vectorii $\overrightarrow{AF}$ și $\overrightarrow{AM}$ sunt coliniari $\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AF} = t \cdot \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\lambda}{4} - \dfrac{t}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{\lambda}{3}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Cum $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{4} - \dfrac{t}{2} = 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{\lambda}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{4}{7} \\ t = \dfrac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow k = 7.$$

26. Caz particular al problemei 23, pagina 204, $a = 1, b = 2$.

Test de autoevaluare **pag.205**

1. A -2; ☑ 0; C -1; D 2; E 4.

2. A $\dfrac{1}{2}$; B $-\dfrac{1}{2}$; C $-\dfrac{5}{2}$; ☑ $\dfrac{5}{2}$; E 2.

3. A $\dfrac{2}{3}$; ☑ $-\dfrac{2}{3}$; C $\dfrac{3}{2}$; D $-\dfrac{3}{2}$; E 3;

4. A $\begin{cases} m=0, \\ n=2 \end{cases}$ B $\begin{cases} m=2, \\ n=0 \end{cases}$ ☑ $\begin{cases} m=0, \\ n=-2 \end{cases}$ D $\begin{cases} m=1, \\ n=-1 \end{cases}$ E $\begin{cases} m=-1, \\ n=-1 \end{cases}$

5. ☑ G; B H; C I; D O; E A.

6. A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; B 2; ☑ $\sqrt{3}$; D $2\sqrt{3}$; E $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. A 12; ☑ 13; C $8\sqrt{3}$; D $\frac{25}{2}$; E 10.

8. A 2; B -2; C -3; D $\frac{1}{3}$; ☑ 3.

9. A 2; B 3; C 0; D $\frac{5}{2}$; ☑ 5.

Test de evaluare pag.206

1. a) $\vec{r}_A = -\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{r}_B = -5\vec{i} + \vec{j}, \vec{r}_C = 7\vec{i} + 4\vec{j}$; b) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = 12\vec{i} + 3\vec{j}$; c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 10$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 3\sqrt{17}$; d) $M\left(1, \frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{AM} = 2\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j}$; e) $A_1(-1;2)$; f) $I\left(-1, \frac{21-\sqrt{17}}{2}\right)$; g) $A_{\triangle ABC} = 24up$

2. a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$.

3. a) $\frac{DM}{MC} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3\overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})}{5} = \frac{5\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}}{5}$.

b) $\frac{DN}{NB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}}{7}$. Cum $\overrightarrow{AM} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AN} \Rightarrow$ A, N, M coliniare.

Cercul trigonometric pag.207

1. $15^0 = \frac{\pi}{12}$; $22^030' = \frac{\pi}{8}$; $30^0 = \frac{\pi}{6}$; $37^030' = \frac{5\pi}{24}$; $45^0 = \frac{\pi}{4}$; $67^030' = \frac{3\pi}{8}$; $75^0 = \frac{5\pi}{12}$; $105^0 = \frac{7\pi}{12}$; $135^0 = \frac{3\pi}{4}$; $150^0 = \frac{5\pi}{6}$; $247^030' = \frac{11\pi}{8}$; $315^0 = \frac{7\pi}{4}$; $420^0 = \frac{7\pi}{3}$.

2. $\frac{\pi}{12} = 15^0$, $\frac{\pi}{8} = 22^030'$, $\frac{3\pi}{4} = 135^0$, $\frac{5\pi}{4} = 225^0$, $\frac{5\pi}{3} = 300^0$, $\frac{7\pi}{3} = 420^0$, $\frac{7\pi}{20} = 63^0$, $\frac{19\pi}{30} = 114^0$, $\frac{173\pi}{20} = 155^0$, $\frac{397\pi}{20} = 3573^0$.

3. a) $l = -\frac{3\pi}{20}$; b) $l = \frac{19\pi}{60}$; c) $l = \frac{5\pi}{21}$; d) $l = \frac{\pi}{3}$.

4. a) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; b) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; c) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; d) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; e) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; f) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; g) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; h) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; i) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; j) $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. a) Cadranul I; b) Cadranul IV; c) Cadranul III; d) Cadranul I; e) Cadranul IV; f) Cadranul I; g) Cadranul I; h) Cadranul II.

6. a) $45^0 = \frac{\pi}{4}$; b) $99^0 = \frac{11\pi}{20}$.

7. a) 150^0; b) 15^0; c) 105^0.

Funcțiile trigonometrice pagina 210

2. a) $x \in \mathbb{R}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k\frac{\pi}{3}; (2k+1)\frac{\pi}{6}\right\}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k\pi; k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right\}$; d) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\left[2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left[\pi + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

3. a) $\mathbb{R}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{6}\right\}$ c) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$; e) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$; f) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)\right\}$; g) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\pi, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right\}$; h) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\pi, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right\}$.

6. a) $-$; b) $+$; c) $+$; d) $-$; e) $+$; f) $+$; g) $-$.

8. a) $f_1(x+T_1) = f(x) \Leftrightarrow \sin[2(x+T_1)+3] = \sin(2x+3) \Leftrightarrow \sin[(2x+3)+2T_1] = \sin(2x+3) \Leftrightarrow 2T_1 = 2\pi \Rightarrow T_1 = \pi$.

b) $f_2(x+T_2) = f_2(x) \Leftrightarrow \sin(3x+3T_2) - tg(12x+12T_2) = \sin 3x - \operatorname{tg} 12x \Leftrightarrow 3T_2 = 2k\pi$ și $12T_2 = m\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$ adică $T_2 = \frac{2k\pi}{3} = \frac{m\pi}{12}$ $k, m \in \mathbb{Z}$. Egalitatea este verificată pentru $k = 1$ și $m = 8$ (cele mai mici valori întregi ale lui m și k). Deci $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

c) $f_3(X+T_3) = f_3(x) \Leftrightarrow \cos(x+T_3) \cdot ctg(x+T_3) = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x \Longrightarrow T_3 = 2k\pi$ sau $T_3 = m\pi$ și din egalitatea $2k\pi = m\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$ care este verificată pentru $k = 1$ și $m = 2$ rezultă $T_3 = 2\pi$.
d) $T_4 = \frac{\pi}{5}$

9. a) $T = \frac{2\pi}{3}$; b) $T = 10\pi$; c) $T = \frac{2\pi}{a}$; d) $T = \frac{2\pi}{7}$; e) $T = 8\pi$; f) $T = \frac{2\pi}{m}$; g) $T = 4\pi$; h) $T = \frac{\pi}{2}$; i) $T = \frac{\pi}{3}$; j) $T = \frac{\pi}{5}$.

10. a) $T = 2\pi$; b) $T = 2\pi$; c) $T = 2\pi$; d) $T = 12\pi$; e) $T = \pi$; f) $T = \pi$.

11. a) Presupunem că există $T > 0$ astfel încât $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow T + \sin(x+T) = \sin x$. Pentru $x = 0$, respectiv $x = \pi$ obținem $\begin{cases} T + \sin T = 0 \\ T - \sin T = 0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2T = 0$ de unde $T = 0$, contradicție cu $T > 0$. b) Analog $T + \cos^2(x+T) = \cos^2 T$. Pentru $x = 0$, respectiv $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} T + \cos^2 T = 1 \\ T + \sin^2 T = 0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$ $2T = 0 \Rightarrow T = 0$ c) Funcția $3\sin(x\sqrt{2})$ este periodică cu perioada generală $T_1 = \frac{2\pi k_1}{\sqrt{2}}, k_1 \in \mathbb{Z}$ iar funcția $2\cos(x\sqrt{7})$ are perioada generală $\frac{2\pi k_2}{\sqrt{7}}, k_2 \in \mathbb{Z}$. Pentru ca funcția $f(x) = 3\sin(x\sqrt{2}) +$

$2\cos(x\sqrt{7})$ să fie periodică ar trebui să găsim $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $T_1 = T_2 \Leftrightarrow \frac{2\pi k_1}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi k_2}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{k_2}{k_1}$. Cum $\frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}$ și $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ egalitatea este imposibilă.

12. a) Impară; b) Pară; c) Nici pară nici impară; d) Pară; e) Impară; f) Pară; g) Pară.

13. a) $f(x) \in [-1, 5]$; b) $f(x) \in [1, 5]$; c) $f(x) \in \mathbb{R}$ d) $f(x) \in [4, 9]$; e) $f(x) \in \mathbb{R}_+$; f) $f(x) \in [-1, 4]$; g) $f(x) \in [3, 4]$; h) $f(x) \in [3, 4]$.

16. a) Se folosește inegalitatea $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pentru $a, b > 0$; b) Se arată că $f\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$; c) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 11$.

Reducerea la primul cadran **pag. 215**

2. a) $\sin 2503^0 = -\sin 15^0$; b) $\cos 7507^0 = \cos 53^0 c$; c) $\operatorname{tg} 3757^0 = -\operatorname{tg} 23^0$;

d) $\sin(-7575) = -\sin 15^0$; g) $\sin 1275\pi = -1$; j) $\operatorname{ctg} 4957^0 = -\operatorname{ctg} 83^0$;

e) $\cos(-1750^0) = \cos 50^0$; h) $\cos(-275\pi) = -1$; k) $\operatorname{ctg}(-736^0) = -\operatorname{ctg} 16^0$;

f) $\operatorname{tg}(-2795^0) = \operatorname{tg} 85^0$; i) $\operatorname{tg}(867, 7\pi) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{10}\right)$; l) $\operatorname{ctg}(893, 2\pi) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

4. $E_1 = 0$; $E_2 = \frac{3}{2}$.

5. $A = 0$; $B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; $C = 1$.

6. a) $\operatorname{ctg} a$; b) 0; c) 1; d) -1.

7. a) $6a + b$; b) $\frac{3b - 4a}{2}$.

8. a) $\frac{1}{2}$; b) $-1 - \sqrt{2}$; c) 1; d) -1.

9. A) a) Din enunț $a + b = 23 \Rightarrow \sin B + \sin C = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b + c}{a} = \frac{23}{17}$; b) $\hat{A} = 90^0 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow (b + c)^2 - 2bc = a^2 \Rightarrow bc = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2} = \frac{23^2 - 17^2}{2} = 120$, deci $\cos B \cos C = \frac{bc}{a^2} = \frac{120}{289}$; c) $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{a^2}{bc} = \frac{289}{120}$.

11.

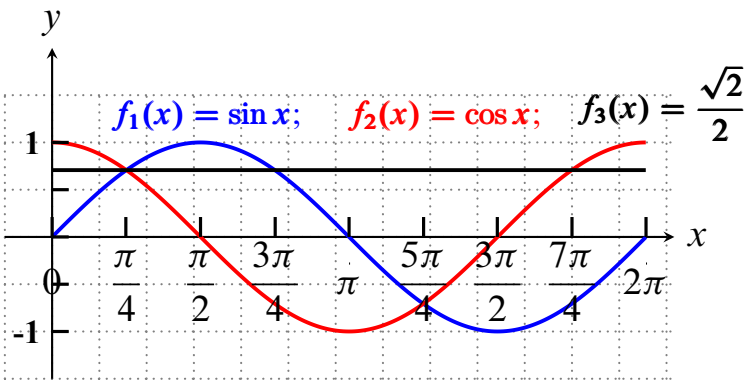


Fig. 213: *Problema 11*

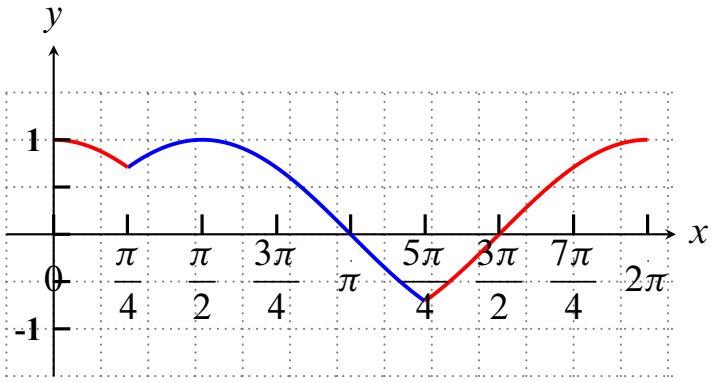


Fig. 214: *Problema 11 g(x)*

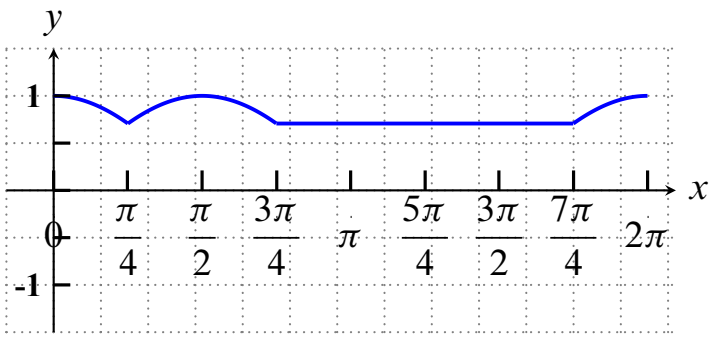


Fig. 215: *Problema 11 h(x)*

14. a) $\cos\alpha = \sqrt{-1+\sqrt{3}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$; b) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2 = \sqrt{3}$; d) $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$; e) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{15}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$; g) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$; f) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$.

15. a) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$; d) $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$; e) $\sin\alpha = a \in (-1;0)$.

16. a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; c) $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$; d) $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

17. a) $\sin x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; b) $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; c) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; d) $\sin x = \frac{1}{2}$.

18. a) $\sin a = \frac{2}{3}$; $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos b = \frac{1}{2}$; $\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos b = \frac{1}{3}$; $\sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\sin a = \frac{2}{3}$; $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

20. $E = \frac{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + 1).}{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - 1)} = -7.$

21. $F = \frac{3 + 2\operatorname{ctg}\alpha}{2 - 3\operatorname{ctg}\alpha} = 1.$

22. Avem: $\sqrt{1 - \sin^2\alpha(1 + \cos^2\alpha)} = \sqrt{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)} = \sqrt{\cos^4\alpha} = |\cos^2\alpha| = \cos^2\alpha$. Analog $\sqrt{1 - \cos^2\alpha(1 + \sin^2\alpha)} = \sin^2\alpha$ și deci $E = \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

26. Ținând cont de relațiile dintre rădăcini și coeficienți avem:

$x_1 + x_2 = \sin\alpha + \cos\alpha$ și $x_1x_2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha)}{(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 2\sin\alpha.$

27. a) $E_1 = -\operatorname{ctg} x$; b) $E_2 = 1$.

28. a) $E_1 = 1$; b) $E_2 = 1$; c) $E_3 = \frac{2}{3}$; d) $E_4 = 3$; e) $E_5 = -1$; f) $E_6 = 1$.

29. $E = -\frac{3}{7}$.

30. $f = \frac{13}{17}$.

32. $\sin x + \cos x = a|^2 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{a^2 - 1}{2}$, $\sin 3x + \cos^3 x = b \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) = b \Leftrightarrow a(1 - \frac{a^2 - 1}{2}) = b \Leftrightarrow a^3 - 3a + 2b = 0.$

33. a) $\Delta = \sin^2 a\sin^2 b \geq 0$; b) $x_{1,2} = \cos(a \pm b)$.

34. $x^2 + y^2 - m^2 = x^2 + y^2 - (x\cos a + y\sin a)^2 = x^2(1 - \cos^2 a) + y^2(1 - \sin^2 b) - 2\cos a\sin b = x^2\sin^2 a + y^2\cos^2 b - 2\cos a\sin b = (x\sin a - y\cos b)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq m^2.$

35. Notăm $\sin x + \cos x = a > 0\ |^2 \Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Notăm $\sin x - \cos x = d > 0$ $\left(x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow 1 - 2\sin x \cos x = d^2 \Rightarrow d^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Din $\begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{41}{125}$.

36. $\frac{337}{144}$.

37. $\operatorname{tg} 1^0 \cdot \operatorname{tg} 89^0 = \operatorname{tg} 1^0 \cdot \operatorname{ctg} 1^0 = 1$ *etc*.

39. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m \Big|^2 \Rightarrow \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} = m^2$. Notăm $2\sin x \cos x = t$ și obținem $\frac{4(1+t)}{t^2} = m^2$, de unde $t = \frac{2(1 \pm \sqrt{1+m^2})}{m^2}$. Cum $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow E < 0$ adică $E = \frac{2(1-\sqrt{1+m^2})}{m^2}$.

40. $f(x) = \frac{\sin^2 x(\cos x - 1)}{\cos^2 x(\sin x - 1)} > 0$ deoarece pentru $x \neq \frac{k\pi}{2}, \sin x$ și $\cos x < 1$.

41. a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ b) $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in Z} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$; c) $E(m) = \frac{m^3 - m + 2}{m(m^2-1)}$; d) $F(m) = \frac{2}{m^2+1}$; $F_{max}(x) = 2$; e) $m \in \{-1, 0, 1\}$.

47. $\cos\alpha = \frac{1}{7} < \frac{13}{14} = \cos\beta \Rightarrow \alpha > \beta$. Avem $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{14} \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

48. $\sin\alpha = -\frac{15}{17},\ \cos\beta = \frac{4}{5},\ \cos(\alpha+\beta) = -\frac{13}{85}$.

49. $\cos(x-y) = \frac{56}{65}$.

50. $\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{30}}{6} - \frac{1}{12};\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{15}}{12}; \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{9\sqrt{15}}{7} + \frac{32\sqrt{2}}{7}$; $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{9\sqrt{15}}{7} + \frac{32\sqrt{2}}{7}$.

51. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{25}{257};\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = -\frac{205}{157}$.

52. a) $\operatorname{tg}(A+B) = -\frac{16}{63};\ \operatorname{tg}(A-B) = \frac{56}{33}$. b) $\cos(A+B) = \frac{63}{65}; \cos(A-B) = \frac{33}{65}$.

54. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

55. $\sin\alpha = \frac{1+\sqrt{105}}{12}$.

56. $\cos\alpha = -\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$.

58. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

59. Avem : $\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2(\sin\alpha\cos\beta+\cos a\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$
$\frac{2(\sin\alpha\cos\beta+\cos a\sin\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=tg\alpha+\operatorname{tg}\beta.$

65. $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\frac{17\sqrt{50}}{250};\ \sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=\frac{7\sqrt{50}}{50}.$

66. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\alpha\beta-\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=1\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}.$

72. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos(k-1)\alpha\cdot\cos k\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\alpha-(k-1)\alpha)}{\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(k-1)\alpha)=$
$\frac{\operatorname{tg}n\alpha}{\sin\alpha}.$

73. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos(\alpha+(k-1)\beta)\cdot\cos(\alpha+k\beta)}=\frac{1}{\sin\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\alpha+k\beta-(\alpha+(k-1)\beta)}{\cos(\alpha+(k-1)\beta)\cdot\cos(\alpha+k\beta)}=$
$\frac{1}{\sin\beta}\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{tg}(\alpha+k\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+(k-1)\beta))=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+n\beta)-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}.$

74. $\cos 2\alpha=-\frac{17}{32};\ \sin 2\alpha=-\frac{7\sqrt{15}}{32};\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{7\sqrt{15}}{17};\ \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{17\sqrt{15}}{105}.$

75. $\sin 2\alpha=\frac{8\sqrt{33}}{49};\ \cos 2\alpha=\frac{17}{49};\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{8\sqrt{33}}{17}.$

76. $\sin 2\alpha=\frac{3}{5};\ \cos 2\alpha=-\frac{4}{5};\ \operatorname{tg}2\alpha=-\frac{3}{4};\ \sin 4\alpha=-\frac{24}{25};\ \cos 4\alpha=\frac{7}{25};\ \operatorname{tg}4\alpha=-\frac{24}{7}.$

77. $E+\frac{(7m+1)u^2-8m+4}{4};\ m=-\frac{1}{7}.$

79. $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{16}{13}.$

80. $\sin(2\alpha+\beta)=\frac{1443}{1445};\cos(2\alpha-\beta)=\frac{1364}{1445}$

82. $\sin 3\alpha=\frac{99}{125}.$

83. $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$

84. $\cos 3\alpha=\frac{118}{125}.$

86. Avem: $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ și $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ de unde: $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$ și $\cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$, deci membrul stâng se mai poate scrie: $\frac{\cos 3x(\cos 3x+3\cos x)}{4}+$

$\frac{\sin 3x(3\sin x-\sin 3x)}{4}=\frac{\cos^2 3x-\sin^2 3x+3(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x)}{4}=\frac{\cos 6x+3\cos 2x}{4}=$
$\frac{\cos 3\cdot 2x+3\cos 2x}{4}=\frac{4\cos^3 2x-3\cos 2x+3\cos 2x}{4}=\cos^3 2x.$

87. $\sin\alpha=\frac{7}{25};\ \cos\alpha=\frac{24}{25};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{24}.$

88. $\sin 22^0 30'=\sin\frac{45^0}{2}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}},\ \cos 22^0 30'=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}},\ \operatorname{tg}22^0 30'=\sqrt{2}-1.$

89. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10};\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$

91. $E=\frac{3}{2}.$

93. $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5};\ \sin 2\alpha=-\frac{336}{625}.$

94. $\frac{m}{n}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$

96. $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10};\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3\sqrt{10}}{10};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3};\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3.$

100. $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\ \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\ \cos\frac{\pi}{16}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};\ \sin\frac{\pi}{16}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};$
$\cos\frac{\pi}{32}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};\ \sin\frac{\pi}{32}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$

101. $p=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\Rightarrow p^2=\frac{\sin^2 2x}{4(1+\sin 2x)}\Rightarrow 4p^2+2=E(x).$

102. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\frac{\sin\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}}=$
$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$

103. a) $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\left\{\pm\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\right\}$; c) $\operatorname{tg}\alpha\in\left\{2;\frac{1}{3}\right\}$; d) $\sin 4x=-\frac{24}{25};\ \cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$

104. a) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; b) $2\sin^2\left(\frac{41\pi}{9}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{9}-x\right)-1\neq 0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\neq\cos\left(\frac{\pi}{18}+x\right)$ etc.; c) $E=0.$

105. $E=-\frac{32}{13}$.

106. $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$.

107. $E=-\frac{1}{10}$.

108. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{4}{3};\ \operatorname{tg}4\alpha=-\frac{24}{7}$.

109. a) $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}$; b) $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}$; c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{9\sqrt{3}+8\sqrt{2}}{23}$.

110. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{336}{527};\ \operatorname{tg}4\alpha=\frac{354144}{164833}$.

113. $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=2$.

116. $\operatorname{tg}9^0+\operatorname{tg}81^0-(\operatorname{tg}27^0+\operatorname{tg}63^0)=\frac{\sin(9^0+81^0)}{\cos 9^0\cos 81^0}-\frac{\sin(27^0+63^0)}{\cos 27^0\cos 63^0)}=\frac{1}{\cos 9^0\sin 9^0}-\frac{1}{\cos 27^0\sin 27^0}=\frac{2}{\sin 18^0}-\frac{2}{\sin 54^0}=\frac{2(\sin 54^0-\sin 18^0)}{\sin 18^0\sin 54^0}=\frac{4\sin\frac{54^0-18^0}{2}\cos\frac{54^0+18^0}{2}}{\sin 18^0\sin 54^0}=\frac{4\sin 18^0\cos 36^0}{\sin 18^0\cos 36^0}=4$.

117. $\sin\frac{5\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}=\cos\frac{7\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}=2\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}=2\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}}{2}$.

118. a) $E_1=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$; b) $E_2=4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$;
c) $E_3=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)$; d) $E_4=-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)$.

119. $E=4\cos 2x\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

120. $E=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{24}$.

121. $E=\frac{1+\cos 12x}{2}+\frac{1-\cos 10x}{2}+\frac{\cos 10x-\cos 12x}{2}=1$.

124. E=$\frac{\sin 25^0\cos 25^0+\sin 30^0\cos 30^0+\sin 35^0\cos 35^0}{\cos 25^0\cos 30^0\cos 35^0}=\frac{\sin 50^0+\sin 60^0+\sin 70^0}{2\cos 25^0\cos 30^0\cos 35^0}=\frac{\sin 60^0+2\sin 60^0\cos 10^0}{2\cos 25^0\cos 30^0\cos 35^0}=\frac{\sin 60^0\left(\frac{1}{2}+\cos 10^0\right)}{\cos 25^0\cos 30^0\cos 35^0}=\frac{\cos 30^0(\cos 60^0+\cos 10^0)}{\cos 25^0\cos 30^0\cos 35^0}=2$.

126. $S = 4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$.

130. a) $E_1 = \operatorname{tg} a$; b) $E_2 = 3-4\sin^2 x$; c) $E_3 = \operatorname{tg} 3a$; d) $E_4 = -2\cos 2a$; e) $E_5 = \operatorname{tg} 4a$; f) $E_6 = -\operatorname{tg} 4\alpha$; g) $E_7 = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

131. $E = \operatorname{ctg} 3x$; $F = \operatorname{tg} 3x$.

136. $E = \frac{1}{2}(\cos 2a - \cos 3a) = \frac{1}{2}(1-\cos a)(4\cos^2 a + 2\cos a - 1) = \frac{11}{32}$.

140. a) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 5\alpha = -\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha - \sin 8\alpha$;

b) $4\cos\alpha\cos 3\alpha\cos 5\alpha = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 7\alpha + \cos 9\alpha$;

c) $4\sin\alpha\cos 3\alpha\sin 5\alpha = \cos a - \cos 3a + \cos 7a - \cos 9a$;

d) $4\sin\alpha\cos 3\alpha\cos 5\alpha = -\sin a + \sin 3a - \sin 7a + \sin 9a$.

143. a) $S_1 = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ b) $S_2 = \dfrac{\cos\frac{2\alpha+(n+1)h}{2}\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$.

144. a) Se înmulțește relația cu $2\sin\frac{\pi}{7}$ și se transformă produsele în sumă. b) Se înmulțește relația cu $2\sin\frac{\pi}{11}$ și se transformă produsele în sumă. c) Se înmulțește relația cu $2\sin\frac{\pi}{11}$ și se transformă produsele în sumă. d) Se înmulțește relația cu $2\sin\frac{\pi}{4n+3}$ și obținem $2\sin\frac{\pi}{4n+3}\cdot\sum_{k=0}^{2n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n+3} = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sin\frac{2(k+1)\pi}{4n+3} - \sin\frac{2k\pi}{4n+3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi n+2\pi}{4n+3}\right) = \sin\frac{\pi}{4n+3}$. Împărțind cu ce am înmulțit obținem ceea ce trebuia demonstrat.

147. $E = \dfrac{\cos(3x+3z)-\cos(x-z)}{\sin(x-z)-\sin(3x+3z)} = \dfrac{-2\sin(2x+z)\sin(x+2z)}{-2\sin(x+2z)\cos(2x+z)} = \operatorname{tg}(2x+z)$.

150. a) $y_{minim} = -5$; $y_{maxim} = 5$; b) $y_{minim} = -15$; $y_{maxim} = 15$; c) $y_{minim} = -5$; $y_{maxim} = 5$; d) $y_{minim} = -13$; $y_{maxim} = 13$.

151. Se notează $x = \operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și funcția dată devine $f(t) = 1+\sin 2t \in [0;2]$.

152. *Indicație*: Se notează $x = \operatorname{tg} t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ și funcția dată devine $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

154. $(\sin\varphi+\sin 2\varphi)^2+(\cos\varphi+\cos 2\varphi)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 2(\sin\varphi\sin 2\varphi+\cos\varphi\cos 2\varphi)=a^2+b^2-2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\cos\varphi-\cos 3\varphi}{2}+\frac{\cos\varphi+\cos 3\varphi}{2}\right)=a^2+b^2-2 \Leftrightarrow \cos\varphi=\frac{a^2+b^2-2}{2}$. Ţinând cont de $\cos\varphi+\cos 2\varphi=b \Leftrightarrow \cos\varphi+2\cos^2\varphi-1=b$ rezultă $-3a^2+a^4-2b-3b^2+2a^2b^2+b^4=0$

155. Rezolvând sistemul din enunț cu necunoscutele $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$ obținem $\cos\alpha=\frac{am-bn}{m^2-n^2}$, $\sin\alpha=\frac{bm-an}{m^2-n^2}$ cu $m^2\neq n^2$ și cum $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ obținem $\frac{(am-bn)^2}{(m^2-n^2)^2}+\frac{(an-bm)^2}{(m^2-n^2)^2}=1$.

156. $\left|\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right|=|\sin\alpha+\cos\alpha|=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$.

157. $\begin{cases}\frac{x}{a}=\cos\varphi\cos 2\varphi\\ \frac{y}{b}=\sin\varphi\sin 2\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\cos\varphi\cos 2\varphi+\sin\varphi\sin 2\varphi=\cos\varphi\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\cos\varphi\cos 2\varphi-\sin\varphi\sin 2\varphi=\cos 3\varphi\end{cases}$. Cum $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi \Rightarrow 4\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3-3\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$.

158. Avem $\frac{2-\sin\alpha}{3-\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha-1}{\sin\alpha-2}\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{(3-\sin\alpha)(\sin\alpha-2)}\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{(3-\sin\alpha)(2-\sin\alpha)}\leq\frac{1}{2}$. Cum $|\sin\alpha|\leq 1$ rezultă $3-\sin\alpha\geq 2$ și $2-\sin\alpha\geq 1$. Prin urmare $\frac{1}{(3-\sin\alpha)(2-\sin\alpha)}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$.

161. a) Avem: $S(x)=\sum_{p=1}^{n}(2^p(\cos p\alpha\cos x-\sin p\alpha\sin x))=$
$\sum_{p=1}^{n}2^p\cos p\alpha\cos x-\sum_{p=1}^{n}2^p\sin p\alpha\sin x=\cos x\left(\sum_{p=1}^{n}2^p\cos p\alpha\right)-$
$\sin x\left(\sum_{p=1}^{n}2^p\sin p\alpha\right)=A\cos x-B\sin x$ unde $A=\sum_{p=1}^{n}2^p\cos p\alpha$ și $B=\sum_{p=1}^{n}2^p\sin p\alpha$. Cum $S(k\pi)=0$ rezultă $A\cos k\pi-B\sin k\pi=0$ și deci $(-1)^kA=0$ de unde $A=0$. De asemenea cum $S(k\frac{\pi}{2})=0\Longrightarrow A\sin k\frac{\pi}{2}-B\sin k\frac{\pi}{2}=0$ și cum $A=0$ avem $B\sin k\frac{\pi}{2}=0$, $\forall k\in Z\Longrightarrow B=0$. În concluzie $S(x)=0$, $\forall x\in R$.

b) Avem: $(\cos x\cos y+\sin x\sin y)^2)\leq 4-4(\sin x\cos y+\cos x\sin y)+4\sin x\sin y\cos x\cos y \Leftrightarrow (\cos x\cos y-\sin x\sin y)^2\leq 4-4\sin(x+y) \Leftrightarrow \cos^2(x+y)\leq 4-4\sin(x+y) \Leftrightarrow 1-\sin^2(x+y)-4+4\sin(x+y)\leq 0 \Leftrightarrow \sin^2(x+y)-4\sin(x+y)+3\geq 0 \Leftrightarrow (\sin(x+y)-1)((\sin(x+y)-3)\geq 0$. Ultima inegalitate este satisfăcută deoarece $\sin(x+y)\leq 1$ și $\sin(x+y)<3$.

162.

a) Avem $f(x)+3f(-x)=4(\cos 2x-\sin x)$ și înlocuind x cu $-x$ obținem: $f(-x)+3f(x)=4(\cos 2x+\sin x)$. Înmulțind a doua relație cu -3 și adunând-o la prima avem: $-8f(x)=-8\cos 2x-16\sin x$ de unde $f(x)=-2\sin^2 x+2\sin x+1$ și notând $\sin x=t, t\in[-1,1]$ obținem $f(t)=-2t^2+2t+1; -1\le t\le 1$.
Reprezentând grafic funcția (vezi graficul alăturat)
$f:[-1,1]\longrightarrow f([-1,1])$, $f(t)=-2t^2+2t+1$ și proiectând graficul pe axa Oy obținem $f([-1,1])=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

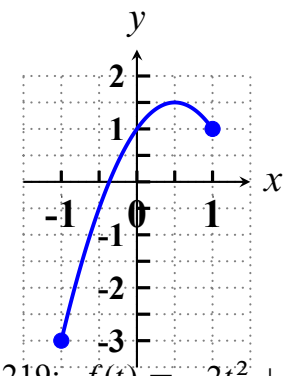


Fig. 219: $f(t)=-2t^2+2t+1$

164. $\frac{1}{2}(\sin A+\sin C)=\sin B \Leftrightarrow \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$.

165. $\begin{cases}\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{21}{221}\\ \cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{171}{221}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{96}{22}\\ \sin x\sin y=\frac{75}{221}\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{96}{22}\\ \sqrt{1-cos^2x}\sqrt{1-\cos^2 y}=\frac{75}{221}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{8}{17}\\ \cos y=\frac{12}{13}\end{cases}$ sau $\begin{cases}\cos x=\frac{12}{13}\\ \cos y=\frac{8}{17}\end{cases}$

166. $f:\mathbb{Z}\to\{-1,0,1\}$.

167. a) Se înmulțește identitatea cu $2\sin\frac{1}{2}$ și se transformă produsele in sume. b) $E<0$.

168. $8\sin B\sin C\cos A+1\ge 0\Leftrightarrow 4\cos(B-C)\cos A-4\cos(B+C)\cos A+1\ge 0\Leftrightarrow 4\cos(B-C)\cos A+4\cos^2 A+\cos^2(B-C)+\sin^2(B-C)\ge 0\Leftrightarrow (2\cos^2 A-\cos(B-C))^2+\sin^2(B-C)\ge 0$.

169. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2=0\Rightarrow \cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=0\Rightarrow$ sau $A=\frac{\pi}{2}$ sau $B=\frac{\pi}{2}$ sau $C=\frac{\pi}{2}$.

170. Relația se mai scrie $1-2\sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2})+2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4\sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2})-4\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+1\ge 0\Leftrightarrow\left(2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})-\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\right)^2+\sin^2(\frac{\alpha-\beta}{2})\ge 0$.

172. a) $E^2=m^2-n^2+1$.

173. $\lambda = \dfrac{\sin y}{\sin(2x+y)} \Rightarrow \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin(2x+y)+\sin y}{\sin(2x+y)-\sin y}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2\sin(x+y)\cos x}{2\sin x\cos(x+y)}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}(x+y)$. Reciproc $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\operatorname{tg} x \Rightarrow \lambda = \dfrac{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x+y)+\operatorname{tg} x} = \dfrac{\sin(y)}{\sin(2x+y)} \Rightarrow \sin y = \lambda\sin(2x+y)$.

174. a) $x = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right) \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$; b) $E = x^2 - 2x \in [-1; 2+2\sqrt{2}]$.

175. Din inegalitatea mediilor $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{\sin x\cos x}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{\sin 2x}} \geq 2\sqrt{2}$.

177. $f(x) = \sin^2 2x \in [0;1]$.

Test de autoevaluare pag. 243

1. ☑ $2-\sqrt{3}$; B $\sqrt{3}-2$; C $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; D $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; E $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. A $T = 2\pi$ B $T = 3\pi$; ☑ $T = 4\pi$; D $T = \dfrac{\pi}{2}$; E $T = \sqrt{2}\pi$.

3. A $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$; B $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$; ☑ $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}},\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)$; D $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ E $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}},\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

4. A $2E = 1$; ☑ $E = 1$; C $E = 0$; D $2E = -1$; E $E = 1$.

5. A t^2+1; B $\dfrac{1}{t^2}$; C $2t^2$; D $\dfrac{1}{1+t^2}$; ☑ $\dfrac{4}{t^2}-2$.

6. A 0; B $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; C $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; D $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$; ☑ -1.

7. A $\dfrac{3}{8}$; B $\dfrac{1}{2}$; C $\dfrac{1}{8}$; ☑ $-\dfrac{3}{8}$; E $-\dfrac{1}{8}$.

8. A 2; ☑ $\sqrt{3}$; C $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$; D 1; E $\dfrac{3}{2}$.

9. $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\dfrac{5\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\dfrac{7\pi}{16}\right) = \sin^4\left(\dfrac{\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{16}\right)+\cos^4\left(\dfrac{\pi}{16}\right)+\cos^4\left(\dfrac{3\pi}{16}\right) = \left(\sin^2\dfrac{\pi}{16}+\cos^2\dfrac{\pi}{16}\right)^2+\left(\sin^2\dfrac{3\pi}{16}+\cos^2\dfrac{3\pi}{16}\right)^2 = 2-\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{3\pi}{8} = 2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right) = \ldots = \dfrac{3}{2}$.

Test de evaluare pag. 243

Numărul 1

1. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$; b) Funcţia nu este nici pară nici impară.

c) $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{12}$; $f(420^0) = \dfrac{5\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{12}$.

2. $\pi < 4.1 < 4.2 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow E > 0.$

3. a) $F(x) = 2(\cos x - \sin x).$

b) $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow F(x) > 0$. Avem $F^2(x) = 4\left(1 - \sin 2x\right) = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3 \Rightarrow F(x) = \sqrt{3}.$

4. $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin x, & pt.\ n = 4k \\ \cos x, & pt.\ n = 4k+1 \\ -\sin x, & pt.\ n = 4k+2, \\ -\cos x, & pt.\ n = 4k+3. \end{cases}$

5. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\pi + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$; b) $E(x) = \operatorname{tg} 4x$;

c) $E\left(\frac{Pi}{48}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$

Numărul 2

1. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) Funcția nu este nici pară nici impară.

c) $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $F(510^0) = -\frac{3+5\sqrt{3}}{6}.$

2. $\pi < 4.1 < 4.2 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow E < 0.$

3. a) $F(x) = \sin x + \cos x$; b) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow F(x) > 0$ și cum $F^2(x) = (1 + \sin 2x) = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow F(x) = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$

5. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{k\pi}{8} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$; b) $E(x) = \operatorname{ctg} 8x$; c) $E\left(\frac{\pi}{48}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$

Test de evaluare **pag. 245**

Numărul 1

1. $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; $\cos\beta = \frac{4}{5}$; $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{13}{85}$; $\sin 2\beta = -\frac{24}{25}$, $2\alpha = \frac{240}{151}$; $\sin\frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{34}.$

2. $F(x) = \operatorname{ctg} 3x.$

3. $f(x) = 2\cos 2x.$

4. $\sin^4\frac{7\pi}{8} = \sin^4\frac{\pi}{8} = \left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}$; $\sin^4\frac{5\pi}{8} = \sin^4\frac{3\pi}{8} = \left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{8} \Rightarrow E = 2\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{8} + \frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{3}{2}.$

5. Identitatea $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}=1$ este echivalentă cu $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}=1\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Din $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}\pi\Rightarrow\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta}=0\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

6. a) $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,(2k+1)\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) $f(x)=\frac{2\sin x\cos 2x}{\sqrt{2}\,|\sin x|}-\frac{2\cos x\cos 2x}{\sqrt{2}\,|\cos x|}=$

$$\begin{cases}0, & \text{pt. } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\\ 2\sqrt{2}\cos 2x & \text{pt. } x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\\ -2\sqrt{2}\cos 2x & \text{pt. } x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\end{cases}$$

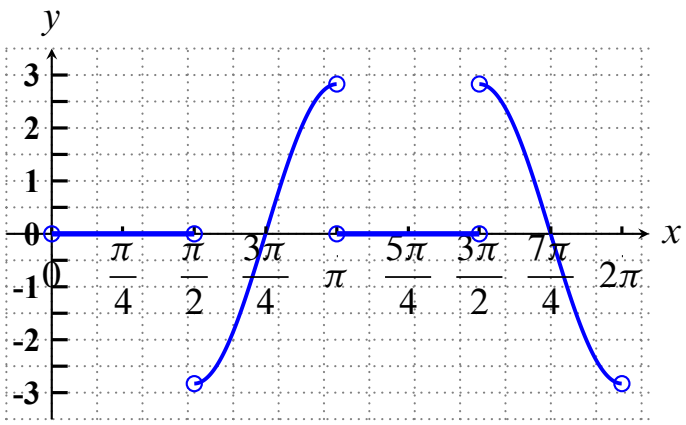


Fig. 220: *Grafic f(x)*

Numărul 2

1. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\sin 2\alpha=\frac{7}{25}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-3+\sqrt{10}$, $\sin 2\beta=\frac{3}{5}$, $\cos 2\beta=\frac{4}{5}$, $\sin(\alpha+2\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$.

2. $F(x)=\operatorname{tg}3x$.

3. $f(x)=8\cos^2 x$.

4. $\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$ și $\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\Rightarrow E=2\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}+\frac{3-2\sqrt{2}}{8}\right)=\frac{3}{2}$.

5. Egalitatea dată este echivalentă cu $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}}+\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}=2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\Leftrightarrow\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Din $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{ctg}\pi\Rightarrow\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma-1}=0\Rightarrow\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

6.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $f(x) = \frac{2\sin 2x \cos x}{\sqrt{2}|\cos x|} + \frac{2\sin 2x \sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} =$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin 2x & \text{pt. } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{pt. } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \\ -2\sqrt{2}\sin 2x & \text{pt. } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

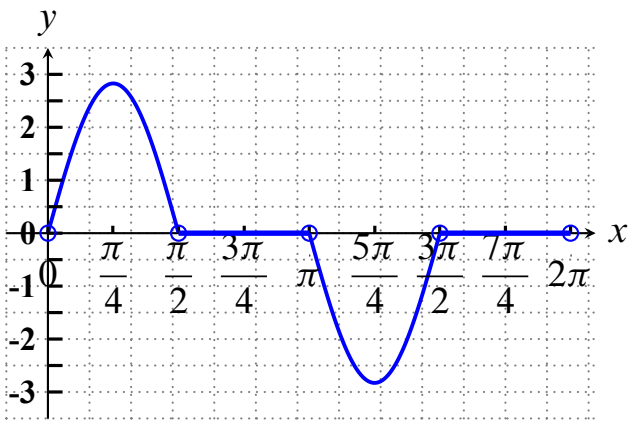


Fig. 221: *Grafic f(x)*

Produsul scalar **pag.246**

2. a) $6\sqrt{2}$; b) 6; c) $6\sqrt{3}$; d) 0; e) -6; f) $-6\sqrt{3}$; g) 12; h) -12.

3. (1): $OB = 2\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos 30^0 = 6$. (2): $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 2\cdot 4\cdot\cos 60^0 = 4$ (3): $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OD}\right|\cos 90^0 = 0$; (4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OE}\right|\cos 120^0 = -2$; (5) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OE}\right|\cos 120^0 = -2$; (6) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{DC} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos 0^0 = 4$; (7): $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE'} = 2\cdot 2\cdot\cos 120^0 = -2$. (8): $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 120^0 = -2$.

6. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 2a^2 + ac\cos\alpha - 2b^2 - c^2 = 5 + 2\cos\alpha$.

7. a) $|\vec{u}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3} = |\vec{v}|$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = a^2 - b^2 = 1$ și $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{1}{3}$.

b) $\begin{cases} \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}) = 2a^2 = 4 \\ \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}|\,|\vec{u}+\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}+\vec{v}}) = 2\sqrt{6}\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}+\vec{v}}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}+\vec{v}}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$; Analog $\cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}+\vec{v}}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ și $\cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. a) $\vec{c}\vec{u} = \vec{c}(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) - \vec{c}(\vec{b}-\vec{c})\vec{a} = c^2(\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a}) = 0$.

b) $\sum\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}$; $\sum\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}) + \vec{a}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}) = 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} - a^2 - b^2 - c^2 = 2(\cos 60^0 + \cos 120^0 + \cos 60^0) - 3 = -2$; $(\sum a)^2 = 4$.

9. $|\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}| = |\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}| \Rightarrow (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})^2 = (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b})^2 \Leftrightarrow \alpha^2a^2 + 2\alpha\beta\vec{a}\vec{b} + \beta^2b^2 = \alpha^2a^2 - 2\alpha\beta\vec{a}\vec{b} + \beta^2b^2 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

10. Egalitatea se mai scrie: $5(a^2+b^2) + 8\vec{a}\cdot\vec{b} = 21$ de unde $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{21 - 5(a^2+b^2)}{8|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Rightarrow$

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

12. $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{10}$ și $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$. Avem $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j}$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}) = \dfrac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BO}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

13. a) $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 96$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = \dfrac{24}{25}$; c) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{AC} = 8\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -29$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\dfrac{\sqrt{29\sqrt{65}}}{325}$;

14. Teorema înălțimii: $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \end{cases} \Rightarrow AD^2 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) =$

$\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}_{=0} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} =$

$\underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_{=0} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD}}_{=0} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = DB \cdot CD.$

Teorema lui Pitagora: $BC^2 = (\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{BA})^2 + (\overrightarrow{AC}^2) = AB^2 + AC^2$.

15. $\left|\overrightarrow{AB'}\right| = \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \dfrac{a}{2}$; $\left|\overrightarrow{BB'}\right| = \left|\overrightarrow{CC'}\right| = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. $\begin{cases} \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC'}}_{=-\frac{a^2}{2}} + \underbrace{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CA}}_{=-\frac{a^2}{2}} + \underbrace{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'}}_{=0} =$

$-a^2$. În concluzie $-a^2 = \left|\overrightarrow{BB'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CC'}\right| \cos(\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}}) \Rightarrow$ $\cos(\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}}) = -\dfrac{4}{5}$.

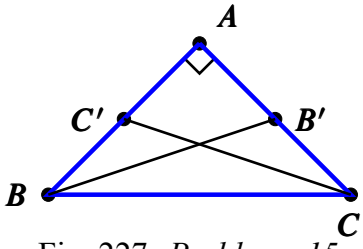


Fig. 227: *Problema 15*

Analog, $\begin{cases} \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{AC}}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\cos(\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$\begin{cases} \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{AB}}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\cos(\widehat{\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{AB}}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

16. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = \vec{0} \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}) = 0 \Rightarrow 50+2(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -25$.

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}+\vec{c}=-\vec{b} \Rightarrow (\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{b}^2=9$.

b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a} \Rightarrow (\alpha\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=8 \Leftrightarrow ((\alpha-1)\vec{a})^2=8 \Rightarrow (1-\alpha)^2 2=8 \Rightarrow \alpha \in \{-1;3\}$.

17. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} \Rightarrow BC^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AB^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-a^2$.

18. Din teorema catetei $AC^2=CD\cdot CB \Rightarrow CD=\dfrac{AC^2}{CD}$. Avem $\overrightarrow{CD}=CD\cdot versor\overrightarrow{CB}=CD\cdot\dfrac{\overrightarrow{CB}}{CB}=\left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2\cdot\overrightarrow{CB}$; Apoi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$.

19. Fie $\overrightarrow{AH}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Avem $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow (x\vec{a}+y\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=0 \Rightarrow x+y=0$. De asemenea $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow ((x-2)\vec{a}+(y-1)\vec{b})(3\vec{a}+2\vec{b})=0 \Rightarrow 3x+2y=8$. Rezolvând sistemul $\begin{cases}x+y=0\\3x+2y=8\end{cases}$ obținem $\overrightarrow{AH}=8\vec{a}-8\vec{b}$.

20. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1-x)\vec{i}+(x-1)\vec{j}$ și impunem condiția $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow x=1$.

22. Se aplică rezultatul de la exercițiul 17, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

23. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})+\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=0$.

24. a) $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$. Analog $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=-\underbrace{(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB})}_{=0 \text{ vezi exercițiul } 11}=0$.

b) Dacă notăm cu O punctul de întâlnire al perpendicularelor duse pe BC și AB, din condiția de la a) obținem $\overrightarrow{B'O}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ deci și perpendiculara pe AC trece prin O.

25. $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AA''}=2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BB''}=2\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CC''}=2\overrightarrow{CP} \Rightarrow \sum\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}+\sum\overrightarrow{AA''}\cdot\overrightarrow{BC}=2\sum\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$ și exercițiul 23 și exercițiul 24b pag.249.

26. Fie BM și CN medianele, și $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CN}=(\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2)=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2)=\dfrac{1}{8}(b^2+c^2-5a^2)$.

27. Fie $AA'\perp BC$, $BB'\perp AC$, și $\{O\}=AA'\cap BB' \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ și $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. Conform relației de la problema 11 pag. 248, avem $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow O\in CC'$ înălțime.

28. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0.$

29. În problema precedentă se consideră punctul O intersecția a două mediane și se folosește rezultatul de la exercițiul 24b pag.249.

30. $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\Rightarrow MA^2=MG^2+GA^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}\\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\Rightarrow MB^2=MG^2+GB^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}\\ \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\Rightarrow MC^2=MG^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}\end{cases}\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}(\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{=0})\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$

31. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ (exercițiul 17,pag.249),$\overrightarrow{AD}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\Rightarrow AD^2=\left(\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\right)^2=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}\Rightarrow AD=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$

b) $\overrightarrow{AI}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{2p}\Rightarrow AI^2=\left(\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{2p}\right)^2=\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{4p^2}=\frac{bc\cdot 2p\cdot 2(p-a)}{4p^2}=\frac{bc(p-a)}{p}\Rightarrow AI=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}.$

c) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\Rightarrow BC^2=OC^2+OB^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow a^2=2R^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2R^2-a^2$. Analog $2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2R^2-b^2$, $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2R^2-c^2$. Avem $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ și deci $OG^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

d) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Rightarrow OG^2=\frac{1}{9}OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

32. Fie M un punct punct pe latura BC a triunghiului ABC. $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}AB^2=AM^2+MB^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}=AM^2+MB^2+2\cdot AM\cdot MB\cos(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}})\\ AC^2=AM^2+MC^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}=AM^2+MC^2+2\cdot AM\cdot MC\cos(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MC}})\end{cases}$. Cum $\cos(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MC}})=\cos(\pi-\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}})=-\cos(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}})$ rezultă

$\begin{cases}AB^2\cdot MC=AM^2\cdot MC+MB^2\cdot MC+2\cdot AM\cdot MB\cdot MC\cos(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}})\\ AC^2\cdot MB=AM^2\cdot MB+MC^2\cdot MB-2\cdot AM\cdot MC\cdot MB\cos(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}})\end{cases}$. Însumând ultimele două egalități obținem $AB^2\cdot MC+AC^2\cdot BM=AM^2(MC+MB)+BM\cdot MC(MB+MC)$ adică $AB^2\cdot MC+AC^2\cdot BM=AM^2\cdot BC+BM\cdot MC\cdot BC$.

33. Avem: $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}}{3}$ și $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ și analoagele. Din $AD\perp BE\Rightarrow\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=0\Rightarrow -c^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=0\Rightarrow -7c^2+a^2+3b^2=0$. Cum $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=ac\cos 60^0\Rightarrow b^2=a^2+c^2-ac$ relația $-7c^2+a^2+3b^2=0$ devine $4a^2-3ac-4c^2=0\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{a}{c}\right)^2-3\left(\dfrac{a}{c}\right)-4=0$ de unde $\dfrac{a}{c}=\dfrac{3+\sqrt{73}}{8}$.

34. Fie O punctul de intersecție al perpendicularelor dim B',C' respectiv pe dreptele $CA,\ AB$. Vom arăta că $OA'\perp BC$. Aplicând relația lui Euler (11, pag.248) obținem
$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{A'B'}=0$
$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA'}\cdot(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'C})+\overrightarrow{OB'}\cdot(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{A'A})+\overrightarrow{OC'}\cdot(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B})=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A}(\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OC'})+\overrightarrow{B'B}\cdot(\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OA'})+\overrightarrow{C'C}(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB'})=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'C}\cdot\overrightarrow{B'A'}$.
Folosind ipoteza avem: $A'A\perp C'B', B'B\perp A'C', C'C\perp B'A'$,deci
$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{OC'}\cdot A'B'=0$, unde am ținut seama de relația lui Euler pentru punctele $O,\ A', B', C'$.

Din construcția punctului O avem $\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{CA}=0$, $\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, deci din relația de mai sus obținem $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ adică $OA'\perp BC$.

35. Fie O punctul de concurentă al perpendicularelor duse din A,B,C și O' punctul de concurentă al perpendicularelor duse din A', B' pe BC, CA; Notăm $\overline{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$, $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{a'}$, $\overline{OB'}=\overline{b'}$, $\overline{OC'}=\overline{c'}$. Prin calcul direct se ajunge la egalitatea $\sum\bar{a}(\overline{b'}-\overline{c'})+\sum\overline{a'}(\bar{b}-\bar{c})=0$. Cum $\sum\bar{a}(\overline{b'}-\overline{c'})=0$, (Euler ex. 11, pag.248) și din ipoteză $\bar{a'}(\bar{b}-\bar{c})=0,\ \vec{b'}(\bar{c}-\bar{a})=0$ se ajunge la $\bar{c'}(\bar{a}-\bar{b})=0$ adică $OC'\perp AB$.

36. $AD\parallel BC\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{AD}=\alpha\vec{a}$. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}+\alpha\vec{a}=(\alpha-1)\vec{a}+\vec{b}$. Cum $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}\Rightarrow b^2=(\alpha-1)^2a^2+b^2+2(\alpha-1)\vec{a}\vec{b}\Rightarrow\alpha-1=\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}$ și $\overrightarrow{DC}=\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a}+\vec{b}$.

37. $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+6\vec{j}$, $\overrightarrow{CD}=-3\vec{i}-3j\Rightarrow AB\parallel CD\Rightarrow ABCD$ trapez. $\overrightarrow{AC}=6\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{DB}=3\vec{i}+6\vec{j}$. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=|AC|\cdot|DB|\cos(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}})\Leftrightarrow 36=45\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}})\Rightarrow\cos(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}})=\dfrac{4}{5}$.

38. $\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CB}=AO\cdot CB\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CB}})=\alpha\cdot OC\cdot CB\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CB}})\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AO}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=AO\cdot CO\cos 60^0+AO\cdot OB\cos 120^0=\dfrac{CO^2\alpha(1-\beta)}{2}\end{cases}\Rightarrow$
$\cos(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CB}})=\dfrac{OC(1-\beta)}{2CB}$ iar din teorema cosinusului în $\triangle COB$ avem $CB^2=(1-\beta+\beta^2)OC^2$.

39. $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+7\vec{x}\cdot\vec{y}+3y^2=0\\ x^2-y^2=0\end{cases}\Rightarrow\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{5x^2}{7}\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}})=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{xy}=-\dfrac{5}{7}$.

40. În sistemul cartezian xOy luăm $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,b)$ și $D(0,b)$ și $M(x,y)$. Obținem $\overrightarrow{MA} = -x\vec{i} - y\vec{j}$, $\overrightarrow{MC} = (a-x)\vec{i} + (b-y)\vec{j}$, $\overrightarrow{MB} = (a-x)\vec{i} - y\vec{j}$, respectiv $\overrightarrow{MD} = -x\vec{i} + (b-y)\vec{j}$. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = x^2 + y^2 - xa - yb = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

41. Notăm $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ și diagonalele $AC = m$, $BD = n$. Cum $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\left(\frac{a^2+b^2-m^2}{2} + \frac{a^2+d^2-n^2}{2} + \frac{b^2+c^2-n^2}{2} + \frac{d^2+c^2-m^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2m^2 - 2n^2$.

42. $S_1 = \frac{a^2+d^2-n^2}{2} + \frac{a^2+b^2-m^2}{2} + \frac{c^2+b^2-n^2}{2} + \frac{d^2+c^2-m^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2$; $S_2 = \frac{a^2+m^2-b^2}{2} + \frac{n^2+b^2-c^2}{2} + \frac{c^2+m^2-d^2}{2} + \frac{d^2+n^2-a^2}{2} = m^2 + n^2$.

43. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OE} \Rightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})^2 = 4OE^2$ etc.

44. $EB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = 0 \Leftrightarrow -k\cdot AE^2 + AB\cdot DC = 0$ (1).

Din $EO \perp BC$ și $EB \perp AC$ rezultă $BD \perp EC$, $BD \perp EC \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}) = 0 \Leftrightarrow -BA\cdot DC + k(k-1)AE^2 = 0$ (2). Din (1) și (2) găsim $k = 2$.

45. a) $\begin{cases}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}}{2} = \frac{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D'C'}}{2} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow MNPQ$ paralelogram.

b) $MNPQ$ dreptunghi $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MQ} = 0$; Să exprimăm $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MQ}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B}$ respectiv $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'D'}$ și se ajunge la $(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AD}) = 0$ etc.

46. $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI}(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA}) = \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA} = (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CI})\overrightarrow{EB} - (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DI})\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EB} + \underbrace{\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{EB}}_{=0} - \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA} - \underbrace{\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{EA}}_{=0} = \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA} = EC\cdot EB - ED\cdot EA = 0$ deoarece triunghiurile EDC și EBA sunt asemenea.

47. $OA = OB = R$, $AB^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AO} + \underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB}}_{R\cdot AC} + \underbrace{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OB}}_{=0} = \overrightarrow{AO}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + R\cdot AC = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} + R\cdot AC = \frac{AO^2 + AB^2 - OB^2}{2} + R\cdot AC = \frac{AB^2}{2} + R\cdot AC \Rightarrow AB^2 = R\cdot AC$.

49. Considerăm poligonul regulat $A_1A_2\ldots A_n$, convex cu n laturi. În planul raportat la sistemul xOy avem $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$ Înmulțim scalar cu $\vec{i}$ și ținem cont că $m(\widehat{Ox, A_1A_2}) = \alpha$, $m(\widehat{Ox, A_2A_3}) = \alpha + \frac{2\pi}{n}$, ... rezultă relația cerută.

50. În problema precedentă luăm $\alpha = 0$ și $2n+1$ în loc de n.

51. Fie O un punct oarecare diferit de A,B,C,D. Avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$.

52. a) Fie triunghiul oarecare ABC de centru O și $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ versorii vectorilor $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$; Avem $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, avem și $(\vec{s})^2\geq 0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\geq -\frac{3}{2}$ de unde relația cerută.

b) Notăm $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ versorii vectorilor $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}$ și din $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2\geq 0\Rightarrow 3+2(\cos(\pi-A)+\cos(\pi-B)+\cos(\pi-C))\geq 0\Rightarrow$ relația căutată.

53. Fie $m(\widehat{EDC})=\alpha=m(\widehat{DBE})$ (unghiuri cu laturi perpendiculare). $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AE}=\underbrace{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DM}+2DM^2=\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DM}+2DM^2=DM\cdot AD\cos\alpha+2BD\cdot DM\cos(90+\alpha)+2DM^2=DM(AD\cos\alpha-2BD\sin\alpha+2DM)=DM(DE-2DE+DE)=0\Rightarrow BM\perp AE$.

54. Se aplică rezultatul de la exercițiul 17, pag. 249, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{\alpha^2+\beta^2-c^2}{2}+\frac{\beta^2+\gamma^2-a^2}{2}+\frac{\gamma^2+\alpha^2-b^2}{2}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

55. a) $b\cos C+c\cos B=2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B=2R\sin(B+C)=2R\sin A=a$.

b) $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2b^2\sin C\cos C+2c^2\sin B\cos B=b^2\cdot\frac{c}{R}\cos C+c^2\cdot\frac{b}{R}\cos B=\frac{bc}{R}(\underbrace{b\cos C+c\cos A}_{=a})=\frac{abc}{R}=2bc\sin A$.

c) $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{4R^2(\sin^2A-\sin^2B)}{4R^2\sin^2C}=\frac{(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)}{\sin^2C}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin^2C}=\frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{\sin^2C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

d) $b\cos B+c\cos C=2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C=R(\sin 2B)+\sin 2C=2R\sin(B+C)\cdot\cos(B-C)=2R\sin A\cos(B-C)=a\cos(B-C)$.

e) $\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

f) $\frac{a\cos A-b\cos B}{a\cos B-b\cos A}+\cos C=\frac{2R\sin A\cos A-2R\sin B\cos B}{2R\sin A\cos B-2R\sin B\cos A}+\cos C=\frac{\sin 2A-\sin 2B}{2\sin(A-B)}+\cos C=\frac{2\sin(A-B)\cos(A+B)}{2\sin(A-b)}+\cos C=\cos(\pi-C)+\cos C=0$.

g) Din teorema bisectoarei avem $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$, sau $\frac{BD}{c}=\frac{CD}{b}=\frac{a}{b+c}$, de unde$BD=\frac{ac}{b+c}$, și $CD=\frac{ab}{b+c}$. Teorema sinusurilor aplicată în $\triangle ABD$ ne dă $\frac{l_a}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}\Rightarrow l_a=\frac{\frac{ac}{b+c}\sin B}{\sin\frac{A}{2}}$ și

cum $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{a}\Rightarrow l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

h) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{4R^2\sin^2A-4R^2\sin^2B}{4R^2\sin^2A-4R^2\sin^2B}=\frac{(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)}{\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}}=\ldots$

i) $b^2-c^2=4R^2(\sin B-\sin C)(\sin B+\sin C)=\ldots=4R^2\sin(B-C)\sin(B+C)=4R^2\sin(B-C)\sin A=2Ra\sin(B-C)$.

56. a) $a=2b\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow 2R\sin A=4R\sin B\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin B\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow$

$\sin B-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{B-\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{B+\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}}{2}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{B-\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}}{2}=0\\ A+B+C=\pi\end{cases}\Rightarrow$

$B=C$.

b) $b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0\Leftrightarrow 2R\sin B\sin(C-A)+2R\sin C\sin(A-B)=0\Leftrightarrow$
$\cos(B-C+A)-\cos(C+A-B)=0\Rightarrow B=C$.

c) $c+a=4R\cos\frac{B}{2}\Rightarrow 2R(\sin C+\sin A)=4R\cos\frac{B}{2}\Leftrightarrow \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B}{2}\Rightarrow$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{B}{2}\Rightarrow\cos\frac{A-B}{2}=1\Rightarrow A=B$.

d) $a-b=a\sin^2\frac{B}{2}-b\sin^2\frac{A}{2}\Rightarrow 2R(\sin A-\sin B)=2R\left(\sin A\sin^2\frac{B}{2}-\sin B\sin^2\frac{A}{2}\right)\Rightarrow$
$\sin(A-B)+\sin(A)-\sin(B)=0\Rightarrow\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=0\Rightarrow A=B$.

57. a) $\frac{\sin^2B}{\cos B}=\frac{b^2}{ac}\Leftrightarrow\frac{\sin^2B}{\cos B}=\frac{4R^2\sin^2B}{4R^2\sin A\sin C}\Leftrightarrow\cos B=\sin A\sin C\Leftrightarrow\cos B=$
$\frac{\cos(A-C)-\cos(A+C)}{2}\Leftrightarrow\cos(A)\cos(C)=0\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$ sau $C=\frac{\pi}{2}$.

b) $\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\sin A\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\sin A\Rightarrow\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\sin A\Rightarrow\cos\frac{A}{2}-\sin A\sin\frac{A}{2}=0\Rightarrow$
$-2\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)=0\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$.

c) $\frac{b+c}{a}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\Leftrightarrow\frac{2R\sin B+2R\sin C}{2R\sin A}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\Rightarrow\ldots\sin\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}-\frac{C}{4}\right)\sin\left(\frac{A}{4}-\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)=$
$0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$ sau $B=\frac{\pi}{2}$.

d) $a^2\sin 2B=4S\Leftrightarrow a^2\sin 2B=\frac{abc}{R}\Leftrightarrow a\sin 2B=\frac{bc}{R}\Rightarrow 4R\sin A\sin B\cos B=\frac{4R^2\sin B\sin C}{R}$
$\Rightarrow\sin A\cos B=\sin C\Rightarrow\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=0\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$ sau $B=\frac{\pi}{2}$.

e) $\sin^2B+\sin^2A=\sin^2C\Leftrightarrow\frac{b^2}{4R^2}+\frac{a^2}{4R^2}=\frac{c^2}{4R^2}\Rightarrow b^2+a^2=c^2\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$.

58. Din teorema cosinusului $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ..., și se fac calculele algebrice.

60. a) $B=180^\circ-(A+C)$; și din teorema sinusurilor $p=\frac{2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C}{2}=$
$R(\sin A+\sin B+\sin C)\Rightarrow R=\frac{p}{\sin A+\sin B+\sin C}$ și $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$

b) $A = 180^\circ - B - C$. Din teorema sinusurilor: $b + c = 2R(\sin B + \sin C) = m, \Rightarrow 2R = \dfrac{m}{\sin B + \sin C}$ și laturile triunghiului sunt $a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$.

c) Din teorema sinusurilor: $\sin A = \dfrac{a\sin B}{b}, \quad \sin C = \dfrac{c\sin B}{b}$, deci: $\sin A - \sin C = \dfrac{(a-c)\sin B}{b} = \dfrac{d\sin B}{b}$. Cum $\sin A - \sin C = 2\sin\dfrac{A-C}{2}\cdot\cos\dfrac{A+C}{2} = 2\sin\dfrac{A-C}{2}\sin\dfrac{B}{2}$ obținem egalitatea $\dfrac{d\sin B}{b} = 2\sin\dfrac{A-C}{2}\sin\dfrac{B}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2d\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{b} = 2\sin\dfrac{A-C}{2}\sin\dfrac{B}{2}$ de unde $\sin\frac{A-C}{2} = \dfrac{d\cos\frac{B}{2}}{b}$ și deci $A - C = 2\arcsin\left(\frac{d\cos\frac{B}{2}}{b}\right)$ și combinând cu $\dfrac{A+C}{2} = 90^\circ - \dfrac{B}{2}$ obținem $A = \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{d\cos\frac{B}{2}}{b}\right)$, $C = \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{d\cos\frac{B}{2}}{b}\right)$. Laturile a și c se obțin din teorema sinusurilor: $a = \frac{b\sin A}{\sin B}$, $c = \frac{b\sin C}{\sin B}$.

d) $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A}$. Din formula medianei $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2 = 8R^2(\sin^2 B + \sin^2 C) - a^2 = 8R^2\left(\dfrac{1-\cos 2B}{2} + \dfrac{1-\cos 2C}{2}\right) - a^2 = 8R^2(1 - \cos(B+C)\cos(B-C)) - a^2 = 8R^2(1 + \cos A\cos(B-C)) - a^2 = 8\cdot\dfrac{a^2}{4\sin^2 A}(1 + \cos A\cos(B-C)) - a^2$ de unde $\cos(B-C) = \dfrac{(4m_a^2 + a^2)\sin^2 A - 2a^2}{2a^2\cos A}$ și $B - C = \arccos\left(\dfrac{(4m_a^2+a^2)\sin^2 A - 2a^2}{2a^2\cos A}\right)$. Cunoscând $B - C$ și $B + C = 180^\circ - A$ obținem $B = \frac{(180^\circ - A) + \arccos(\cos(B-C))}{2}$, $C = \frac{(180^\circ - A) - \arccos(\cos(B-C))}{2}$. Laturile b și c se obțin din teorema sinusurilor.

e) $A = 180^\circ - (B + C)$. Înălțimea din A pe latura a este: $h_a = c\sin B = b\sin C$. Deci: $b = \dfrac{h_a}{\sin C}, \quad c = \dfrac{h_a}{\sin B}$. Pentru latura a folosim formula ariei: $\dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Longrightarrow a = \dfrac{bc\sin A}{h_a}$. Înlocuind b și $c \Rightarrow$: $a = \dfrac{\frac{h_a}{\sin C}\cdot\frac{h_a}{\sin B}\cdot\sin A}{h_a} = \dfrac{h_a\sin A}{\sin B\sin C}$.

61. Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un triunghi atunci ei sunt necoliniari și $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.Ținând cont $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ etc. avem $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = a(\vec{b}\cdot\vec{c}) - b(\vec{c}\cdot\vec{a}) + b(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c(\vec{a}\cdot\vec{b}) + c(\vec{b}\cdot\vec{a}) - a(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \vec{0}$.

62. a) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a\sin B}{\sin A}$ și deci $S = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$; b) $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B \Rightarrow S = \frac{ab\sin C}{2} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$; c) $p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = p(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S$; e) $\sin A = \frac{h_b}{c} \Rightarrow h_b = c\sin A = 2R\sin C\sin A$; f) Dacă I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC \Rightarrow S_{DEF} = S_{IDF} + S_{IDE} + S_{IEF} = \frac{r^2\sin(\pi - A)}{2} + \frac{r^2\sin(\pi-B)}{2} + \frac{r^2\sin(\pi-C)}{2} = \frac{r^2(\sin A + \sin B + \sin C)}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right) = \frac{pr^2}{2R}$ și $S_ABC = pr \Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{2}{2R}$.

63. Dacă se cunosc A și B atunci $C = \pi - (A+B)$. Din $S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{2S\sin A}{\sin B\sin C}}$. Analog $b = \sqrt{\dfrac{2S\sin B}{\sin A\sin C}}$, $c = \sqrt{\dfrac{2S\sin C}{\sin B\sin A}}$, etc.

65. a) Fie O intersecția diagonalelor AC și BD. Aria $\triangle ABD = \dfrac{OA\cdot OD\sin\alpha}{2} + \dfrac{OA\cdot OB\sin(\pi-\alpha)}{2} = \dfrac{OA\cdot DB\sin\alpha}{2}$. Analog aria $\triangle BDC = \dfrac{OC\cdot DB\sin\alpha}{2} \Rightarrow$ aria ABCD$= \dfrac{AC\cdot BD\sin\alpha}{2}$.

b) $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}$ etc.

66. $S = \frac{ab\sin B}{2} + \frac{cd\sin D}{2} \Rightarrow 2S = ab\sin B + cd\sin D \Rightarrow (2S)^2 = (ab\sin B + cd\sin D)^2$
$4S^2 = a^2b^2\sin^2 B + c^2d^2\sin^2 D + 2abcd\sin B\sin D$ (1)

Din teorema cosinusului avem:

$$\begin{cases} AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B \\ AC^2 = d^2 + c^2 - 2dc\cos D \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - d^2 - c^2 = 2ab\cos B - 2dc\cos D \Rightarrow$$

$$\frac{(a^2 + b^2 - d^2 - c^2)^2}{4} = a^2b^2\cos^2 B + d^2c^2\cos^2 D - 2abcd\cos B\cos D \quad (2)$$

Adunând (1)+(2)$\Rightarrow 4S^2 + \frac{(a^2 + b^2 - d^2 - c^2)^2}{4} = a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(B + D)$ sau $16S^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - (a^2 + b^2 - d^2 - c^2)^2 - 8abcd\left(1 - 2\cos^2\frac{B + D}{2}\right)$ care se mai poate scrie

$16S^2 = (a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a) - 16abcd\cos^2\frac{B+D}{2}$ sau încă
$16S^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - 16abcd\cos^2\frac{B+D}{2} \Rightarrow$
$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}$.

67. Poligonul se descompune în n triunghiuri isoscele și aria unui triunghi este $\frac{R^2\sin\frac{2\pi}{n}}{2}$.

68. a) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2OA\cdot OB\cdot\cos 2C + 2OA\cdot OC\cos 2B + 2OB\cdot OC\cos 2A = 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = 3R^2 + 2R^2(2\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos 2C) = 3R^2 + 2R^2(-2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1) = R^2 - 4R^2\cos C(\cos C - \cos(A - B)) = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$.

b) Fie $AI \cap C(O, R) = \{D\}$. Din ΔABD cu teorema sinusului obținem $BD = 2R\sin\frac{A}{2}$ și în ΔAIP exprimăm $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ **(1)**, unde P este proiecția punctului I pe latura AB. Se constată cu ușurință că $\sphericalangle IBD \equiv \sphericalangle BID$(fiecare are măsura $m\left(\frac{\sphericalangle A}{2}\right) + m\left(\frac{\sphericalangle B}{2}\right)$), deci ΔDBI este isoscel cu ID=BD$\Rightarrow$
$ID = 2R\sin\frac{A}{2}$ **(2)**. În ΔAOD aplicăm teorema lui Stewart și obținem $AO^2\cdot ID - OI^2\cdot AD + DO^2\cdot AI = AI\cdot ID\cdot AD \Rightarrow R^2(ID + AI) - OI^2\cdot AD = AI\cdot ID\cdot AD \Rightarrow R^2 - OI^2 = AI\cdot ID$. Cum $AI\cdot ID = 2Rr$ din **(1)**+ **(2)** obținem relația căutată.

69. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos 45^0 = \frac{13a^2}{25} \Rightarrow \cos A + \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ și $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A} = \frac{2}{3}$.

71. a) Dacă R este raza cercului circumscris patrulaterului avem: $AB = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\delta$, $CD = 2R\sin\beta$, $DA = 2R\sin\gamma$, $AC = 2R\sin(\beta + \gamma)$, $BD = 2R\sin(\alpha + \gamma)$ și $AB\cdot CD + BC\cdot DA - AC\cdot BD = \sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(-(\alpha + \beta + \gamma))\sin(\gamma) - \sin(\beta + \gamma)\sin(\alpha + \gamma) = 0$.

b) $\begin{cases} S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD) = \frac{ab\sin B}{2} + \frac{cd\sin D}{2} = \frac{abe}{4R} + \frac{cde}{4R} \\ S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD) = \frac{ad\sin A}{2} + \frac{bc\sin C}{2} = \frac{adf}{4R} + \frac{bcf}{4R} \end{cases} \Rightarrow \frac{e}{4R}(ab + cd) =$
$= \frac{f}{4R}(ad + bc) \Leftrightarrow \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$.

c) $\begin{cases} f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B \\ f^2 = c^2 + d^2 - 2dc\cos(\pi - B) \end{cases} \Rightarrow c.c.t.d.$

d) Analog $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$ și $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \sqrt{\dfrac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{(a-b+c+d)(a+b-c+d)}} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$.

76. (1) $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{2R\sin A}{2R\sin B + 2R\sin C} = \dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \geq$ $\sin\dfrac{A}{2}$ deoarece $\cos\dfrac{B-C}{2} \leq 1$.

(2) *Metoda 1* $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ și din (1) $\Rightarrow \sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{a}{b+c} \leq \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Metoada 2 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos A = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2} \Rightarrow a^2 \geq 4bc\sin^2\frac{A}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{\sqrt{bc}}$.

(3) *Metoda I*:

$1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 - 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \sin^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \sin^2\frac{A-B}{2} + \left(\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\right) \geq 0$.

Metoda 2. Aplicăm inegalitatea (2)

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}\frac{b}{2\sqrt{ac}}\frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}$.

(4) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \frac{S^2}{pabc} = \frac{pr\cdot\frac{abc}{4R}}{pabc} = \frac{r}{4R}$.

(5) $\sin A\sin B = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2} \leq \frac{1-\cos(A+B)}{2} = \sin^2\frac{A+B}{2}$ deoarece $\cos(A-B) \leq 1$. Notăm $D = \frac{A+B+C}{3}$ și aplicând inegalitatea de mai sus, obținem: $(\sin A\sin B)(\sin C\sin D) \leq \sin^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{C+D}{2} \leq \sin^4\frac{A+B+C+D}{4} = \sin^4 D \Rightarrow \sin A\sin B\sin C \leq \sin^3 D = \sin^3\frac{A+B+C}{3} = \sin^3\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(6) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{pS}{abc} = \frac{p}{4R}$.

(7) Se arată că $1 - 8\cos A\cos B\cos C = \sin^2(A-B) + (2\cos C - \cos(A-B))^2 \geq 0$.

(8) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{a}{2R} + \frac{a}{2R} = \frac{p}{R}$.

(9) $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 2\sin\frac{A+B}{2}$ deoarece $\cos\frac{A-B}{2} \leq 1$. Fie $S = \frac{A+B+C}{3}$. Avem $\sin A + \sin B + \sin C + \sin S \leq 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{C+S}{2} \leq 4\sin\frac{A+B+C+S}{4} = 4\sin S \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin S = 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(10) Aplicăm inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)(\sin A + \sin B + \sin C) \geq (1+1+1)^2 = 9$.

Deci, avem: $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{9}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. (S-a folosit și inegalitatea (9)).

(11) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R} = \frac{r+R}{R}$.

(12) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq 1 + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

(13) $\begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \\ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} \end{cases} \Rightarrow 1 + \frac{r}{R} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow R \geq 2r$.

(14) $S=\frac{ab\sin C}{2}\Rightarrow ab=\frac{2S}{\sin C}$ și analoagele $ab+bc+ca=2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\geq 2S\cdot 2\sqrt{3}=4S\sqrt{3}$.

(15) $p=(p-a)+(p-b)+(p-c)\geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}=3\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}=3\sqrt{\frac{p^2r^2}{p}}\Rightarrow p^3\geq 27pr^2\Rightarrow p\geq 3\sqrt{3}r$.

(16) $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C}{2}=(\sin A+\sin B+\sin C)\cdot R\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R$.

(17) $27rR=27\cdot\frac{S}{p}\cdot\frac{abc}{4S}=\frac{27}{4p}abc\leq\frac{27}{4p}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{27}{4p}\left(\frac{2p}{3}\right)^3=2p^2$.

Test de evaluare **pag.256**

1. 1) -3; 2) $-3\sqrt{3}$; 3) $-3\sqrt{2}$; 4) $\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$.

2. (1) $\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{B'A}=-\frac{3a^2}{8}$; (2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC'}=\frac{a^2}{4}$; (3) $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{4}$; (4) $\overrightarrow{C'B'}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{a^2}{4}$.

3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=a^2+b^2-c^2=-4$.

4. $(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=4\Leftrightarrow 2a^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-b^2=4\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=1\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{i}+2\vec{j}\right|=\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|3\vec{i}+\vec{j}\right|=\sqrt{10}$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(x+4)\vec{i}+(y+1)\vec{j}$ și $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}$. $m(\sphericalangle A)=90^0\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow -3(x+1)-4(y-3)=0$. Rezolvând sistemul $\begin{cases}(x+4)^2+(y+1)^2=125\\3x+4y=9\end{cases}$ obținem $(x,y)\in\{(7,-3);(-9,9)\}$.

Test de evaluare **pag. 257**

1. În sistemul cartezian xOy luăm $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$ și $D(0,a)$ și $M(x,y)$. Obținem $\overrightarrow{MA}=-x\vec{i}-y\vec{j}$, $\overrightarrow{MC}=(a-x)\vec{i}+(a-y)\vec{j}$, $\overrightarrow{MB}=(a-x)\vec{i}-y\vec{j}$, respectiv $\overrightarrow{MD}=-x\vec{i}+(a-y)\vec{j}$. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=x^2+y^2-xa-ya=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

2. ABCD paralelogram $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, respectiv $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Avem $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}AC^2=AB^2+BC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\\BD^2=BC^2+AB^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2$.

Reciproc, ABCD este un patrulater convex in care are loc relația $2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2$. Folosim vectorii de poziție. $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$, $\overrightarrow{AC}=\vec{r}_C-\vec{r}_A$, $\overrightarrow{BC}=\vec{r}_C-\vec{r}_B$, $\overrightarrow{BD}=\vec{r}_D-\vec{r}_B$. Avem $AB^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\vec{r}_B-\vec{r}_A)^2$ și analogele și $2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2\Leftrightarrow 2\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right)^2+2\left(\vec{r}_C-\vec{r}_B\right)^2=\left(\vec{r}_C-\vec{r}_A\right)^2+\left(\vec{r}_D-\vec{r}_B\right)^2\Leftrightarrow\left(\vec{r}_A-\vec{r}_B+\vec{r}_C-\vec{r}_D\right)\left(\vec{r}_A-3\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D\right)$. Cum $\left(\vec{r}_A-3\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D\right)\neq\vec{0}$ deoarece în caz contrar B ar fi centrul de greutate al triunghiului ADC, rezultă $\vec{r}_A-\vec{r}_B+\vec{r}_C-\vec{r}_D=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow$ ABCD paralelogram.

3. ABCD ortodiagonal. Fie O intersecția diagonalelor. Aplicând teorema lui Pitagora obținem $AB^2 = OA^2 + OB^2$, $CD^2 = OD^2 + OC^2 \Rightarrow AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ (1)
Analog $CB^2 = OB^2 + OC^2$, $AD^2 = OA^2 + OD^2 \Rightarrow CB^2 + AD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ (2)
Din (1) și (2)$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Reciproc. În patrulaterul ABCD are loc relația $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Folosind vectorii de poziție, relația devine $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 + (\vec{r}_D - \vec{r}_C)^2 = (\vec{r}_D - \vec{r}_A)^2 + (\vec{r}_C - \vec{r}_B)^2 \Rightarrow (\vec{r}_B - \vec{r}_D)(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

4. $\overrightarrow{CM} = (x-2)\vec{i} + (y+1)\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\overrightarrow{BM} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = x + 5y + 3$, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x + 2y - 6$. M este ortocentru triunghiului ABC dacă $\begin{cases} \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

5. Fie $M(x, y)$ proiecția punctului A pe BC. $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AM} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$, $\overrightarrow{BM} = (x+1)\vec{i} + (y+3)\vec{j}$. Avem $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(x-1) + y - 2 = 0 \\ \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{5}, \\ y = -\dfrac{14}{5} \end{cases}$.

Test de evaluare **pag.257**

1. a) $E = a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 2a^2 \sin B \cos B + 2b^2 \sin A \cos A$. Din Teorema sinusurilor $b \cdot \sin A = a \cdot \sin B \Rightarrow E = 2a \sin B(\underbrace{a \cos B + b \cos A}_{=c}) = 2ac \dfrac{b}{2R} = \dfrac{abc}{R}$.

b) $\dfrac{b^2 - c^2}{a^2} = \dfrac{4R^2 \sin^2 B - 4R^2 \sin^2 C}{4R^2 \sin^2 A} = \dfrac{1 - \cos 2B - 1 + \cos 2C}{2 \sin^2 A} = \dfrac{2 \sin(B-C) \sin(\pi - A)}{2 \sin^2 A} = \dfrac{\sin(B-C)}{\sin A}$.

2. a) $a \sin(B-C) + b \sin(C-A) = 0 \Leftrightarrow 2R(\sin B \sin(C-A) + \sin A \sin(B-C)) = 2R \sin C \sin(B-A) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A = B$.

b) $c^2 \sin 2B = 4S \Leftrightarrow 8R^2 \sin^2 C \sin B \cos B = 8R^2 \sin A \sin B \sin C \Leftrightarrow \sin C \cos B = \sin A, \Rightarrow \ldots, \Rightarrow \sin A = \sin(C - B) \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{2}$.

3. a) $\dfrac{b}{c} = k$, $BC = 2m_a \Rightarrow b = kc$ și aplicând teorema lui Pitagora obținem $4m_a^2 = k^2c^2 + c^2 \Rightarrow c = \dfrac{2m_a}{\sqrt{k^2+1}}$, $b = kc = \dfrac{2m_a k}{\sqrt{k^2+1}}$, $B = \arcsin \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$, $C = \dfrac{\pi}{2} - B$.

b) Din teorema cosinusului obținem $c^2 = 2^2 + 1^2 - 4 \cos \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$. Din teorema sinusurilor $\sin A = \dfrac{a \sin C}{c} = 1 \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{6}$.

4. $\cos^2 \dfrac{A}{2} + \cos^2 \dfrac{B}{2} + \cos^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{1 + \cos A}{2} + \dfrac{1 + \cos B}{2} + \dfrac{1 + \cos C}{2} = 2 + \dfrac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C - 1) = 2 + \dfrac{1}{2}\left(2 \cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) \cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) - 2 \sin^2 \dfrac{C}{2}\right) = 2 + \sin \dfrac{C}{2}\left(\cos \dfrac{A-B}{2} -\right.$

$-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\Big) = 2+2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2} = 2+2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$
$2+2\cdot\frac{S^2}{pabc} = 2+\frac{r}{2R}.$

5. $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0 \Rightarrow A < \frac{\pi}{2}.$