

Examenul național de bacalaureat 2027
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.



SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ și numărul real a astfel încât numărul $z_3 = az_1 + iz_2$ este real. Determinați z_3 .
- 5p** 2. Se consideră funcția inversabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow (3, +\infty)$, $f(x) = 2^x + 3$. Determinați $t \in (3, +\infty)$ astfel încât $f^{-1}(t) = 0$, unde f^{-1} este inversa funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{x^2 + 2}$.
- 5p** 4. Determinați câte submulțimi nevide, cu cel mult două elemente, are mulțimea $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC , cu centrul de greutate G și punctul D astfel încât $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Demonstrați că patrulaterul $CGBD$ este paralelogram.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = AC$, $A = \frac{2\pi}{3}$ și $R = 2$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC . Determinați distanța de la punctul B la dreapta AC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} -2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3x+2 & -2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(3)) = 4$.
- 5p** b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) - A(x) + 2A(y) = 2I_3$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale a și b pentru care $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = aA(x) + bI_3$, pentru orice număr real x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2(x-1)(y-2) + 2$.
- 5p** a) Arătați că $3 * 4 = 10$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $a * x = x$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați tripletele (m, n, p) de numere naturale nenule, cu $m \leq n \leq p$, pentru care $m * (n * p) = 26$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x\sqrt{x}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(x-1)(x-3)}{2x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați numerele $a \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .

5p	<p>c) Demonstrați că $f(x) - 4f\left(\frac{1}{4x}\right) \leq 2$, pentru orice $x \in (0,1]$.</p>
	<p>2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.</p>
5p	<p>a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - x) dx = 6$.</p>
5p	<p>b) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^3) e^{-x} dx = 2 - \frac{3}{e}$.</p>
5p	<p>c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x) + x^2} dx$. Demonstrați că</p> $I_n - I_{n+4} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$

Examenul național de bacalaureat 2027

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z_3 = a + ai + 3i - 2i^2 = a + 2 + (a + 3)i$ $a + 3 = 0$, deci $a = -3$, de unde obținem $z_3 = -1$	3p 2p
2.	$f(0) = t$ $t = 2^0 + 3$, deci $t = 4$	3p 2p
3.	$2x^2 - 4x + 2 = x^2 + 2$, de unde obținem $x^2 - 4x = 0$ $x = 0$, care nu convine sau $x = 4$, care convine	2p 3p
4.	Mulțimea A are 4 submulțimi cu câte un element Mulțimea A are 6 submulțimi cu câte două elemente, deci sunt $4 + 6 = 10$ submulțimi nevide cu cel mult două elemente	2p 3p
5.	$\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{1}{6}(\overline{AB} + \overline{AC})$, unde M este mijlocul segmentului BC $\overline{MD} = \overline{AD} - \overline{AM} = \frac{1}{6}(\overline{AB} + \overline{AC})$, deci M este mijlocul segmentului GD , de unde obținem că patrulaterul $CGBD$ este paralelogram	2p 3p
6.	$BC = 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$, deci $BC = 2\sqrt{3}$ Triunghiul BCD este dreptunghic în D , unde punctul D este proiecția lui B pe AC și, cum $C = \frac{\pi}{6}$, obținem $BD = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(3) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(3)) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 4$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) - A(x) + 2A(y) = \begin{pmatrix} 4 & x-2y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3x-6y-2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3x+2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2y & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6y+4 & -4 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(x) \cdot A(x) = 2I_3 - A(x)$, $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = 3A(x) - 2I_3$, pentru orice număr real x $3A(x) - 2I_3 = aA(x) + bI_3$, deci $(3-a)A(x) = (b+2)I_3$, pentru orice număr real x , de unde obținem $a = 3$ și $b = -2$	2p 3p

2.a)	$3 * 4 = 2(3-1)(4-2) + 2 =$ $= 8 + 2 = 10$	3p 2p
b)	$a * x = 2(a-1)(x-2) + 2$, deci $2(a-1)(x-2) + 2 = x$ $x(2a-3) - 4a + 6 = 0$, pentru orice număr real x , de unde obținem $a = \frac{3}{2}$	2p 3p
c)	$n * p = 2(n-1)(p-2) + 2$, $m * (n * p) = 4(m-1)(n-1)(p-2) + 2$, pentru orice numere naturale m , n și p $4(m-1)(n-1)(p-2) + 2 = 26$, deci $(m-1)(n-1)(p-2) = 6$ și, cum m , n și p sunt numere naturale nenule, cu $m \leq n \leq p$, obținem tripletele $(2, 2, 8)$, $(2, 3, 5)$ și $(2, 4, 4)$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+4)x\sqrt{x} - (x^2+4x-1) \cdot \frac{3\sqrt{x}}{2}}{x^3} =$ $= \frac{\sqrt{x}(x^2-4x+3)}{2x^3} = \frac{\sqrt{x}(x-1)(x-3)}{2x^3}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$ $\frac{\sqrt{a}(a-1)(a-3)}{2a^3} = 0$ și, cum $a \in (0, +\infty)$, obținem $a = 1$ sau $a = 3$	3p 2p
c)	Pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(0, 1]$; pentru orice $x \in [1, 3]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1, 3]$; pentru orice $x \in [3, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[3, +\infty)$ $x \in (0, 1] \Rightarrow \frac{1}{4x} \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ și, cum $f(1) = 4$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{20}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$, obținem $f(x) \leq 4$ și $f\left(\frac{1}{4x}\right) \geq \frac{1}{2}$, de unde rezultă că $f(x) - 4f\left(\frac{1}{4x}\right) \leq 2$, pentru orice $x \in (0, 1]$	2p 3p
2.a)	$\int_0^2 (f(x) - x) dx = \int_0^2 (x^3 + 1) dx = \left(\frac{x^4}{4} + x\right) \Big _0^2 =$ $= 4 + 2 = 6$	3p 2p
b)	$\int_0^1 (f(x) - x^3) e^{-x} dx = \int_0^1 (x+1)(-e^{-x})' dx = (x+1)(-e^{-x}) \Big _0^1 - e^{-x} \Big _0^1 =$ $= -\frac{2}{e} + 1 - \frac{1}{e} + 1 = 2 - \frac{3}{e}$	3p 2p
c)	$I_n - I_{n+4} = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+4}}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x^4)}{(x+1)(x^2+1)} dx =$ $= \int_0^1 x^n(1-x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 - \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big _0^1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$	2p 3p