

Examenul național de bacalaureat 2027

Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*



Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_2 = 9$ și $a_5 = 30$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(-1) \cdot f(a) = a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+2) = 4 \log_4 x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$. Determinați câte dintre numerele pare, de două cifre, care se pot forma cu cifre din mulțimea A , sunt mai mari sau egale cu 62.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = x + 1$ și punctul $A(5, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OA este perpendiculară pe d .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 12$ și $B = \frac{\pi}{6}$. Punctul M aparține laturii AB astfel încât $AM = AC$. Arătați că aria triunghiului AMC este egală cu 24.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 3-2x & 4x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(B(2)) = 19$.
- 5p** b) Arătați că $(B(x+1) - B(x)) \cdot A = 4I_2$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $B(3) \cdot X = 2A + B(2) \cdot X$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (x-7)(y-7) + 7$, cu elementul neutru $e = 8$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 3 = 27$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * (x+8) = 0$.
- 5p** c) Determinați numărul întreg n , $n \neq 7$, știind că $\frac{5n}{3}$ este simetricul lui n în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că imaginea funcției f este $\left[-\infty, \frac{7}{2}\right]$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{9x^2}{(x+1)^2}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 f(x)(x+1)^2 dx = 21$.

- | | |
|----|--|
| 5p | b) Arătați că $\int_2^8 \frac{f(x)}{x^2} dx = 2$. |
| 5p | c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^a x^2 (3f(x) + xf'(x)) dx = a^3$. |

Examenul național de bacalaureat 2027

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_5 - a_2 = 3r$, deci $r = 7$, unde r este rația progresiei aritmetice $a_1 = a_2 - r = 2$	3p 2p
2.	$f(-1) = 2$, $f(a) = a + 3$, pentru orice număr real a $2(a + 3) = a$, de unde obținem $a = -6$	3p 2p
3.	$\log_2(x + 2) = 2\log_2 x$, deci $\log_2(x + 2) = \log_2 x^2$, de unde obținem $x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$, care nu convine sau $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 4 = 12$ numere	2p 3p
5.	$m_d = 1$ $m_{OA} = \frac{a}{5}$ și, cum $m_d \cdot m_{OA} = -1$, obținem $a = -5$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{AC}{12}$, deci $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{12}$, de unde obținem $AC = 4\sqrt{3}$ $\mathcal{A}_{\triangle AMC} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 1 \cdot (-1) = 18 + 1 = 19$	3p 2p
b)	$B(x+1) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 1-2x & 4x+5 \end{pmatrix}$, $B(x+1) - B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $(B(x+1) - B(x)) \cdot A = \begin{pmatrix} 4+0 & 0+0 \\ -8+8 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$(B(3) - B(2)) \cdot X = 2A$ și, cum $(B(3) - B(2))^{-1} = \frac{1}{4}A$, obținem $X = \frac{1}{2}A \cdot A$ $X = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$2 * 3 = (2 - 7)(3 - 7) + 7 = (-5)(-4) + 7 = 27$	3p 2p
b)	$x * (x + 8) = x^2 - 6x$, pentru orice număr real x $x^2 - 6x = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 6$	3p 2p

c)	$\frac{5n}{3} * n = n * \frac{5n}{3} = 8$, de unde obținem $\left(\frac{5n}{3} - 7\right)(n - 7) + 7 = 8$	3p
	$(5n - 21)(n - 7) = 3$ și, cum n este număr întreg, obținem $n = 4$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x - (3x + 2\sqrt{x} - 2) \cdot 1}{x^2} =$	3p
	$= \frac{3x + \sqrt{x} - 3x - 2\sqrt{x} + 2}{x^2} = \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right) = 3$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 3$ este asimptota orizontală la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$; pentru orice $x \in (0, 4]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(0, 4]$ și, pentru orice $x \in [4, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[4, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $f(4) = \frac{7}{2}$ și f este continuă, deci imaginea funcției f este $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$	3p
2.a)	$\int_1^2 f(x)(x+1)^2 dx = \int_1^2 9x^2 dx = 3x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 24 - 3 = 21$	2p
b)	$\int_2^8 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_2^8 \frac{9}{(x+1)^2} dx = -\frac{9}{x+1} \Big _2^8 =$	3p
	$= -1 + 3 = 2$	2p
c)	$\int_0^a x^2 (3f(x) + xf'(x)) dx = \int_0^a (3x^2 f(x) + x^3 f'(x)) dx = \int_0^a (x^3 f(x))' dx = (x^3 f(x)) \Big _0^a = a^3 f(a)$	3p
	$a^3 f(a) = a^3$ și, cum $a \in (0, +\infty)$, obținem $f(a) = 1$, de unde rezultă $a = \frac{1}{2}$	2p