Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 3 - i$. Arătați că $z(z + 2i) = 10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(-2a) = a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 7} = 2\sqrt{x+1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$. Determinați câte dintre submulțimile mulțimii A au exact trei elemente și conțin numărul 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,6)$, $B(4,1)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care dreptele OA și BC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin\frac{x}{2} + \cos 3x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 3 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + ay + az = 1 \\ ax + 3y + az = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Arătați că, pentru orice număr real a, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul a pentru care sistemul de ecuații are soluția (x_0, y_0, z_0), cu $z_0 = nx_0$, unde n este număr natural.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{2}{3}(x-3)(y-3) + 3$.

5p **a)** Arătați că $0 * 2 = 5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x * \frac{3x}{2} = 5x$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m * m * n = -1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 20)}{(x^2 + 5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții.

2. Se consideră funcția $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x \ln x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\, x \ln x\, dx = \frac{7}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x^2-4}dx = \ln 2$.

5p **c)** Arătați că $\lim_{x\to 2} \frac{1}{F^2(x)} \int_2^x (t-2)F(t)dt = \frac{\ln 2}{4}$, unde $F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(2)=0$.

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z(z+2i)=(3-i)(3+i)=9-i^2=$	**2p**
	$=9-(-1)=10$	**3p**
2.	$f(a)=3a-4$, $f(-2a)=-6a-4$, pentru orice număr real a	**3p**
	$3a-4-6a-4=a$, de unde obținem $a=-2$	**2p**
3.	$x^2+7=4(x+1)$, de unde obținem $x^2-4x+3=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=3$, care convin	**3p**
4.	Numărul submulțimilor cu exact trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul 5, este egal cu numărul submulțimilor cu exact două elemente ale mulțimii $A\setminus\{5\}$	**3p**
	Mulțimea $A\setminus\{5\}$ are 6 submulțimi cu exact două elemente	**2p**
5.	$m_{OA}=2$	**2p**
	$m_{BC}=a-1$ și, cum $m_{OA}=m_{BC}$, obținem $a=3$	**3p**
6.	$\text{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\pi=-1$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{2}+(-1)=4\cdot\frac{1}{2}-1=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&1\\0&2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3+2+0-0-2-1=2$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&a&a\\a&3&a\\0&2&1\end{vmatrix}=a^2-2a+3$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det(A(a))=(a-1)^2+2\neq 0$, pentru orice număr real a, deci pentru orice număr real a sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
c)	$2a=n(3-2a)$, unde a și n sunt numere naturale, a nenul	**3p**
	$3-2a>0$ și, cum a este număr natural nenul, obținem $a=1$, care convine	**2p**
2.a)	$0*2=\frac{2}{3}(0-3)(2-3)+3=$	**3p**
	$=2+3=5$	**2p**
b)	$x*\frac{3x}{2}=x^2-5x+9$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-5x+9=5x$, de unde obținem $x=1$ sau $x=9$	**3p**

c)	$m*m=\frac{2}{3}(m-3)^2+3$, $m*m*n=\frac{4}{9}(m-3)^2(n-3)+3$, pentru orice numere naturale m și n	**2p**
	$\frac{4}{9}(m-3)^2(n-3)+3=-1 \Leftrightarrow (m-3)^2(n-3)=-9$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,2)$ și $(6,2)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(3x^2-4)(x^2+5)-(x^3-4x)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^4+19x^2-20}{(x^2+5)^2}=\frac{(x^2-1)(x^2+20)}{(x^2+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9x}{x^2+5}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$ sau $x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$, pentru orice $x\in(-1,1)$, $f'(x)<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-1,1)$ și, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(-1)=\frac{1}{2}$, $f(1)=-\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, de unde obținem că ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții dacă și numai dacă $m\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	**3p**
2.a)	$\int_2^3 f(x)x\ln x\,dx=\int_2^3(x^2-4)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\right\|_2^3=$	**3p**
	$=-3+\frac{16}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$\int_e^{e^2}\frac{f(x)}{x^2-4}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'dx=\ln(\ln x)\Big\|_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{F^2(x)}\int_2^x(t-2)F(t)dt=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\int_2^x(t-2)F(t)dt\right)'}{\left(F^2(x)\right)'}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)F(x)}{2F(x)f(x)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{2f(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x\ln x}{2(x+2)}=\frac{\ln 2}{4}$	**2p**