Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $2\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)+3\left(1-2\sqrt{2}\right)=7$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-10$. Determinați numărul real a pentru care $f(2a)=f(a)-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x^2-6x+5}=x\sqrt{3}$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor cel mult egală cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(1,5)$ și $C(6,0)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\cos x\cdot\sin 3x-\sin 2x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & 0\\ 4x & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=6$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(-2)\cdot A(1)-4I_2=A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)\geq 8$, pentru orice număr real nenul x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-xy-x+2y+1$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ(2x)=1$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=m$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3x^2-x-2}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{5x-5}=\frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+x\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\frac{5}{6}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=e(2e-1)$.

5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_2^4 \frac{xf(x)}{f(x-1)}dx = ae(5+\ln 3)$.

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)+3\left(1-2\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+3-6\sqrt{2}=$	**2p**
	$=4+3=7$	**3p**
2.	$f(2a)=6a-10$, $f(a)=3a-10$, pentru orice număr real a	**2p**
	$6a-10=3a-10-3$, de unde obținem $a=-1$	**3p**
3.	$4x^2-6x+5=3x^2$, de unde obținem $x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care convin	**3p**
4.	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 6 numere care au suma cifrelor cel mult egală cu 3, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**3p**
5.	$m_{AB}=2$	**2p**
	$m_{AC}=-\frac{1}{2}$ și, cum $m_{AB}\cdot m_{AC}=-1$, obținem că triunghiul ABC este dreptunghic în A	**3p**
6.	$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-0\cdot 4=$	**3p**
	$=6-0=6$	**2p**
b)	$A(-2)=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -8 & -1\end{pmatrix}$, $A(-2)\cdot A(1)-4I_2=\begin{pmatrix}-9 & 0\\ -28 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}-13 & 0\\ -28 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-7)+1 & 0\\ 4\cdot(-7) & -7+1\end{pmatrix}=A(-7)$, deci $A(x)=A(-7)$, de unde obținem $x=-7$	**3p**
c)	$A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2=\begin{pmatrix}2x+\frac{2}{x} & 0\\ 4x+\frac{4}{x} & x+\frac{1}{x}\end{pmatrix}$, $\det\left(A(x)+A\left(\frac{1}{x}\right)-2I_2\right)=\left(2x+\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=$	**2p**
	$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)=2\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\right)\geq 8$, pentru orice număr real nenul x	**3p**
2.a)	$1\circ 1=1^2-1\cdot 1-1+2\cdot 1+1=$	**3p**
	$=1-1-1+2+1=2$	**2p**

b)	$x\circ(2x)=-x^2+3x+1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x^2+3x+1=1$, deci $-x^2+3x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=3$	**3p**
c)	$m\circ n=m^2-mn-m+2n+1$, deci $m^2-mn-2m+2n=-1$	**2p**
	$(m-2)(m-n)=-1$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(1,0)$ și $(3,4)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\sqrt{x}+(x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2+x^2-x-2}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x^2-x-2}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\cdot f'(x)}{5x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{2x(5x-5)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(3x+2)(x-1)}{10x(x-1)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+2}{10x}=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru orice $x\in(0,1]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(1)=2$ și f este continuă, de unde obținem că imaginea funcției f este $[2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1\left(x^2+x\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1+\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2(x+1)\left(e^x\right)'dx=\left.xe^x\right\|_1^2=$	**3p**
	$=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**
c)	$\int_2^4\frac{xf(x)}{f(x-1)}dx=e\int_2^4\frac{x^2+x}{x-1}dx=e\int_2^4\left(x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx=e\left.\left(\frac{x^2}{2}+2x+2\ln(x-1)\right)\right\|_2^4=2e(5+\ln 3)$	**3p**
	$ae(5+\ln 3)=2e(5+\ln 3)$, de unde obținem $a=2$	**2p**