SIMULARE nr. 4 MATEMATICĂ – MATE-INFO 25 APRILIE 2026
(subiecte și barem de corectare)

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.*

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

5p **2.** Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ este impară.

5p **3.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

5p **4.** Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ și $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=6,\ AC=3$ și $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(\pi)\right)$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(A(x)\right)^{2012}=I_3$.

2. Se consideră $a,b,c\in\mathbb{Q}$ și polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c astfel încât polinomul *f* să aibă rădăcinile $x_1=x_2=1$ și $x_3=-2$.

5p **b)** Să se arate că dacă *f* are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci *f* are o rădăcină rațională.

5p **c)** Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ și $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul *f* nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$.

5p **a)** Calculați $f'(5)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n=\int_0^1\frac{\left(x^2+x+1\right)^n-x}{x^2+1}dx$.

5p **a)** Calculați I_0.

5p **b)** Verificați dacă $I_2-I_0\in\mathbb{Q}$.

5p **c)** Arătați că $I_{4n+1}\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

SIMULARE nr. 4 MATEMATICĂ – MATE-INFO 25 APRILIE 2026

(subiecte și barem de corectare)

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

BAREM SUBIECTUL I

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\left((1-i)(i-1)\right)^4=(2i)^4=$	**3p**
	$=16$	**2p**
2.	$f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=$	**2p**
	$=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{3-x}{3+x}=$	**2p**
	$=-f(x)$	**1p**
3.	$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$	**2p**
	$x\in(-4,2)$	**1p**
	$(-4;2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$	**2p**
4.	25 de numere sunt divizibile cu 4	**1p**
	20 de numere sunt divizibile cu 5	**1p**
	5 numere sunt divizibile cu 4 şi cu 5	**1p**
	Deci 40 de numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5	**2p**
5.	Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-1)\vec{i}+(b+2)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}+3\vec{j}$	**2p**
	$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a-1=2$ şi $b+2=3$	**2p**
	Punctul căutat este $Q(3,\ 1)$	**1p**
6.	$A_{ABC}=2\sqrt{14}$	**3p**
	$AD=\frac{4\sqrt{14}}{5}$	**2p**

BAREM SUBIECTUL al II-lea

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det\left(A(\pi)\right)=1$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & 0 & i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\\ 0 & 1 & 0\\ i(\cos x\sin y+\sin x\cos y) & 0 & \cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix}$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$	**3p**
	$A(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$	**1p**
	Finalizare	**1p**
c)	$A^{2012}(x)=A(2012x)$	**2p**
	$A(2012x)=I_3 \Leftrightarrow \cos(2012x)=1$ şi $\sin(2012x)=0$	**1p**
	$x=\dfrac{k\pi}{1006}$, $k\in\mathbb{Z}$	**2p**

2. a) Utilizând eventual relațiile lui Viète, se obține că $a=0$, $b=-3$ şi $c=2$.

b) Dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci $2a+c+(b+2)\cdot\sqrt{2}=0$, de unde rezultă $b=-2$ şi $c=-2a$.

Apoi, $f=X^3+aX^2-2X-2a=(X+a)\left(X^2-2\right)$, cu rădăcina rațională $x_1=-a$.

c) Presupunem că f are rădăcina $k\in\mathbb{Z}$. Rezultă că există $q\in\mathbb{Q}[X]$, astfel încât $f=(X-k)\cdot q$.

Mai mult, coeficienții lui q sunt numere întregi. Folosind ipoteza, obținem că numerele $(-k)\cdot q(0)$ şi $(1-k)\cdot q(1)$ sunt impare, ceea ce este fals, deoarece $(-k)(1-k)$ este un număr par.

BAREM SUBIECTUL al III lea

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 5}(x-2)(x-3)(x-4)=$	**2p**
	$=6$	**1p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{n-1}{n-5}$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=e^4$	**2p**
c)	$f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=1,\ f(5)=1$	**1p**
	f continuă pe intervalele $[2,3],[3,4],[4,5]$	**1p**
	f derivabilă pe intervalele $(2,3),(3,4),(4,5)$	**1p**
	Din teorema lui Rolle şi din faptul că f' este de gradul trei rezultă că $f'(x)=0$ are exact trei soluţii reale distincte	**2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{1-x}{x^2+1}dx=$	**1p**
	$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=arctgx\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{4}$	**2p**
	$\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1=\frac{\ln 2}{2}$	**2p**
	$I_0=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	**1p**
b)	$I_2-I_0=\int_0^1\frac{\left(x^2+x+1\right)^2-1}{x^2+1}dx=$	**1p**
	$=\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx-\int_0^1\frac{2}{x^2+1}dx=$	**1p**
	$=\frac{10}{3}-2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=$	**1p**
	$=\frac{10}{3}-\frac{\pi}{2}\notin\mathbb{Q}$	**2p**
c)	X^2+1 divide $\left(X^2+X+1\right)^{4n+1}-X$	**2p**
	$\frac{\left(x^2+x+1\right)^{4n+1}-x}{x^2+1}=g(x)$, unde $g\in\mathbb{Z}[X]$	**1p**
	$\int_0^1 g(x)dx\in\mathbb{Q}$	**2p**