

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XXI-a, BĂILEȘTI, 28 MARTIE 2026

CLASA a X-a



Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

Partea I

1) Fie funcția bijectivă $f: [1, +\infty) \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ și g inversa ei. Atunci $g\left(\frac{1}{2}\right)$ are valoarea:

- a) $2 + \sqrt{3}$ b) $2 - \sqrt{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2026

2) Se considera propozițiile p : „ $\log_3 4 < 1,5 < \log_2 3$ ”, q : „ $1,5 < \log_2 3 < \log_3 4$ ”,
 r : „ $\log_2 3 < 1,5 < \log_3 4$ ” și s : „ $1,5 < \log_3 4 < \log_2 3$ ”. Propoziția adevărată este :

- a) p b) q c) r d) s

3) Domeniul maxim de definiție al funcției $f(x) = \log_{3x-8}(x^2 - 5x + 6)$ este:

- a) (2,3) b) (3, $+\infty$) c) (4, $+\infty$) d) (5, $+\infty$)

4) Se considera numărul complex $z = (1 + i)^{2026} + (1 - i)^{2027}$. Atunci z este egal cu :

- a) 2^{1013} b) -2^{1013} c) $i \cdot 2^{1013}$ d) $-i \cdot 2^{1013}$

5) Suma soluțiilor ecuației $\lg(x+9) - 2 = \frac{1}{2}\lg(2x+3) - \lg 25$ este egală cu:

- a) 2026 b) 2027 c) 14 d) 10

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.

1) Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ cu același modul și $x, y \in \mathbb{C}$ cu $|x| = |y| = 1$. Arătați că dacă

$$ax + \frac{1}{by} = bx + \frac{1}{cy} = cx + \frac{1}{ay}, \text{ atunci } a = b = c.$$

(Gazeta Matematica 6-7-8 / 2025)

2) Fie A o mulțime nevidă. Notăm cu $\mathcal{P}(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii A .
Demonstrați că nu există funcții bijective $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

Probleme propuse de profesor Ionuț Ivanescu, C. N. „Ștefan Velovan” Craiova

Timp de lucru: 2 ore

Din oficiu: 10 puncte

BAREM -Clasa a X-a



Partea I (50 puncte)

- 1) a 2) a 3) b 4) b 5) c

Partea a II – a (20 puncte + 20 puncte)

- 1) Sa presupunem ca numerele a, b, c sunt distincte doua cate doua.....1p
- $ax + \frac{1}{by} = bx + \frac{1}{cy} \Leftrightarrow x(a-b) = \frac{1}{cy} - \frac{1}{by} \Leftrightarrow x(a-b) = \frac{b-c}{bcy} \quad (1) \dots\dots\dots 2p$
- Analog $x(b-c) = \frac{c-a}{cay} \quad (2)$ si $x(c-a) = \frac{a-b}{aby} \quad (3) \dots\dots\dots 2p$
- Din rel. (1), (2) si (3) $\Rightarrow (a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a) \cdot x^3 = \frac{(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)}{(abc)^2 y^3} \dots\dots\dots 1p$
- Deci $(abc)^2 x^3 y^3 = 1 \Rightarrow |(abc)^2 x^3 y^3| = 1 \Rightarrow |abc| = 1 \dots\dots\dots 2p$
- Cum $|a| = |b| = |c| \Rightarrow |a| = |b| = |c| = 1 \dots\dots\dots 1p$
- Asadar $\frac{1}{z} = \bar{z}$, pentru orice $z \in \{a, b, c\} \dots\dots\dots 1p$
- $ax + \frac{1}{by} = bx + \frac{1}{cy} \Leftrightarrow xy(a-b) = \bar{c} - \bar{b} \Rightarrow xy(a-b) = \overline{c-b} \quad (4) \dots\dots\dots 2p$
- Analog $xy(b-c) = \bar{a} - \bar{c} \Rightarrow \overline{c-b} = xy(c-a) \quad (5) \dots\dots\dots 1p$
- Din rel. (4) si (5) $\Rightarrow xy(a-b) = xy(c-a) \Rightarrow a-b = c-a \Rightarrow 2a = b+c \quad (6) \dots\dots\dots 1p$
- Analog $2b = c+a \quad (7)$ si $2c = a+b \quad (8) \dots\dots\dots 2p$
- Din relatiile (6), (7) si (8) $\Rightarrow a = b = c$ – contradictie cu presupunerea initiala1p
- Deci cel putin doua dintre numerele a, b si c sunt egale1p
- Daca $a = b$, atunci din $ax + \frac{1}{by} = bx + \frac{1}{cy} \Rightarrow \frac{1}{by} = \frac{1}{cy} \Rightarrow b = c \dots\dots\dots 1p$
- Deci $a = b = c$ c.c.t.d.1p

Problema 2)

Considerăm două cazuri:

- I. Mulțimea A este o mulțime finită cu n elemente.....1p
- f funcție bijectivă $\rightarrow \text{Card } A = \text{Card } \mathcal{P}(A), n = 2^n \quad (1) \dots\dots\dots 3p$
- Ecuția (1) nu are soluții, deci nu există f funcție bijectivă cu proprietatea dată.....2p
- II. Mulțimea A este infinită
- Sa presupunem ca ar exista o funcție bijectivă $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A), f(x) = M_x, \forall x \in A \dots\dots\dots 2p$
- Consideram multimea $M \in \mathcal{P}(A)$ definita astfel: $x \in M \Leftrightarrow x \notin M_x \dots\dots\dots 2p$
- Deoarece f este surjectiva, exista $m \in A$ astfel incat $f(m) = M \dots\dots\dots 2p$

m se afla fie in M, fie in $A - M$2p

Daca $m \in M$, conform definitiei multimii M avem ca $m \notin f(m)$,

adica $m \notin M$ – contradictie.....2p

Daca $m \in A - M$, atunci conform definitiei multimii M avem ca $m \in f(m)$,

adica $m \in M$ – contradictie2p

Deci functia f nu este surjectiva, deci ea nu este nici bijectiva2p

OFICIU: 10 p.