

prof. Cătălin Cristea
(20 puncte)

Barem de evaluare - Concursul interjudețean de matematică “Sfera” 2026
clasa a IX-a

Partea I : 1) **b** 2) **d** 3) **a** 4) **c** 5) **c**

Partea a II-a:

1) Amplificând cu $n - \sqrt{n^2 - 1}$ fracția din membrul drept și împărțind apoi egalitatea cu $\sqrt{n+1}$, rezultă că, pentru orice $n \in N^*$, avem $\frac{f(n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{f(n)}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{n-1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ **10p**

Pentru orice, $k \in N^*$ $k \geq 2$, dându-i lui n valori de la 1 la $k-1$ și adunând egalitățile obținute, rezultă că $\frac{f(k)}{\sqrt{k}} = f(1) - \sqrt{\frac{k-1}{k}}$ **5p**

Cum $f(1) = 1$, deducem că $f(n) = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}, \forall n \in \square^* \quad n \in N^*$ **5p**

3) Inegalitatea se scrie echivalent

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b)(c+a)}{a(b+c)} + \frac{(a+b)(b+c)}{b(c+a)} + \frac{(b+c)(c+a)}{c(a+b)} \geq 6 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{a^2 + bc + a(b+c)}{a(b+c)} + \frac{b^2 + ac + b(a+c)}{b(a+c)} + \frac{c^2 + ab + c(a+b)}{c(a+b)} \geq 6 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{bc}{ab+ac} + \frac{ac}{ab+bc} + \frac{ab}{bc+ac} \geq 3 \text{ } \mathbf{8p} \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea lui Nesbitt, avem:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ } \mathbf{5p}$$

$$\frac{bc}{ab+ac} + \frac{ac}{ab+bc} + \frac{ab}{bc+ac} \geq \frac{3}{2} \text{ } \mathbf{5p}$$

Prin adunare membru cu membru, rezultă inegalitatea din enunț..... **2p**