

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”**EDIȚIA a XXI-a, BĂILEȘTI, 28 MARTIE 2026****CLASA a VIII-a****Partea I (50 puncte)***Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:*

1. Se consideră numărul real $x = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$. Atunci $(x^3 - 2x - 1)^{2026}$ este egal cu:
a) 13^{1013} ; b) 1; c) 7^{2026} ; d) 0.
2. Fie numerele reale x și y astfel încât $y - x = 1$ și $y \in [1; 3]$. Valoarea numărului real $a = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25}$ este egală cu:
a) $3\sqrt{2}$; b) 3; c) $2\sqrt{3}$ d) 1
3. Numărul de soluții reale ale ecuației: $x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$ este egal cu:
a) 2 b) 4 c) 6 d) 0
4. Pe planul trapezului ABCD ($AB \parallel CD$) în care $\angle BAD = 90^\circ$ se duce perpendiculara AM. Știind că $AD = DC = 6$ cm, $AB = 12$ cm, $AM = 6\sqrt{2}$ cm, atunci distanța de la punctul D la planul (MBC) este egală cu:
a) 4 cm b) $3\sqrt{2}$ cm c) 3 cm d) $2\sqrt{2}$ cm
5. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$, iar punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor AB, $C'D'$, respectiv AD. Atunci sinusul unghiului determinat de planele (MNP) și (ABC) este egal cu:
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

*Probleme propuse de prof. Mihaela Cioplea și Daniela Beldea, Băilești***Partea a II-a (40 puncte)***Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.***Problema 1 (20 puncte)**

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$x^2 + y^2 + xy(x - y) = 2021.$$

*prof. George Florin Șerban, GM***Problema 2 (20 puncte)**

Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Pe muchiile BB' și CC' considerăm punctele M, respectiv N astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Dacă $MN = 2\sqrt{10}$ cm, calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MN și AD' .

*prof. Gabriel Tica, Craiova***Timp de lucru: 2 ore și 30 de minute****Din oficiu: 10 puncte**



Partea I (5 x 10 p.)

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5.b).

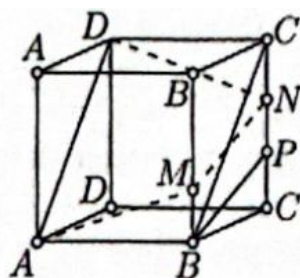
Partea a II-a

Problema 1(20 puncte)

Soluție. Ecuația se scrie $(x-y)^2 + 2xy + xy(x-y) = 2021$. Notăm $x-y = d \in \mathbb{Z}$, $xy = p \in \mathbb{N}$. Atunci egalitatea devine $d^2 + 2p + dp = 2021 \iff p(d+2) = 2021 - d^2$, de unde $p = \frac{2021 - d^2}{d+2} \in \mathbb{N}$. Rezultă $d+2 \mid 2021 - d^2$ și $d+2 \mid d^2 + 2d$. Deducem $d+2 \mid 2d + 2021$. Cum $d+2 \mid 2d + 4$, rezultă că $d+2 \mid 2017$, ceea ce înseamnă că $d+2 \in \{1, -1, 2017, -2017\}$, adică $d \in \{-1, -3, 2015, -2019\}$.

Dacă $d = -1$, atunci $p = 2020$, caz care nu are soluții. Din $d = -3$, rezultă $p = -2012$, care nu convine. Pentru $d = 2015$, $p = \frac{2021 - 2015^2}{2017} < 0$, nu convine. Dacă $d = x - y = -2019$, atunci $p = xy = 2020$, de unde obținem $x = 1$, $y = 2020$.

Problema 2 (20 puncte)



Soluție. Suma $AM + MN + ND'$ este minimă atunci când punctele A, M, N, D' sunt coliniare pe desfășurarea în plan a suprafeței laterale a cubului, ceea ce duce la $BM = NC' = BB'/3$. Fie $BP \parallel MN$, cu $P \in CC'$. Atunci $CP = CC'/3$ și, notând $x = AB$, obținem $MN^2 = BP^2 = x^2 + (x/3)^2$, de unde $x = 6$ cm. Din $BC' \parallel AD'$ și $BP \parallel MN$ rezultă că $\angle(AD', MN) = \angle(BC', BP) = \angle PBC'$. Scriind aria triunghiului PBC' în două moduri găsim $\sin \angle PBC' = \frac{PC' \cdot BC}{PB \cdot BC'} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.