

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XXI-a, BĂILEȘTI, 28 MARTIE 2026

CLASA a VI-a



Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent crește b ?
a) 56,25% b) 40% c) 20% d) 60%;
2. Se formează un număr din alăturarea pătratelor perfecte nenule, consecutive astfel: 149162536... Care este cifra de pe poziția 99?
a) 1 b) 2 c) 5 d) 0
3. Patru numere naturale consecutive, se împart succesiv la același număr natural de trei cifre. Suma resturilor obținute este 983. Restul împărțirii celui mai mic număr, dintre cele 4 numere, la 109 este:
a) 1 b) 0 c) 105 d) 108
4. Pe o dreaptă se consideră punctele $M_0, M_1, \dots, M_n$ în această ordine, astfel încât $M_0M_1 = 1 \text{ cm}$, $M_1M_2 = 3 \text{ cm}$, $M_2M_3 = 5 \text{ cm}$, ..., $M_{n-1}M_n = 2n - 1 \text{ cm}$. Lungimea segmentului M_0M_{1013} este:
a) 100^2 b) 2025^2 c) 1013^2 d) 2026^2
5. Cel mai mare număr de unghiuri, cu măsuri numere naturale distincte, proporționale cu numerele naturale pare nenule, ce pot fi construite în jurul unui punct este egal cu:
a) 12 b) 9 c) 10 d) 8

Probleme propuse de prof Mirea Mihaela Mioara, Craiova

Partea a –II-a

Pentru problemele 1 și 2, scrieți pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48 \cdot (a,b)}{[a,b]} \text{ și } \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312 \cdot (a,b)}{[a,b]}$$

Am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar cu $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

G M 12/ 2024

Problema 2 (20 puncte)

În triunghiul $\triangle ABC$ pe bisectoarea (AD) a unghiului $\widehat{BAC}$, $D \in (BC)$, luăm punctul O , $O \neq A$ și $O \neq D$. Notăm $BO \cap AC = \{E\}$ și $CO \cap AB = \{F\}$. Dacă $\widehat{BEC} \equiv \widehat{CFB}$, atunci $AD \perp BC$ și $AB = AC$.

Prof. Ion Neață, Slatina, Sfera nr. 6

Timp de lucru: 2 ore

Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE CORECTARE

Partea I

1. a) 2. b) 3. d) 4. c) 5. b)

Partea a II a

1. Fie $d = (a, b)$, atunci $a = a_1 \cdot d, b = b_1 \cdot d$, cu $(a_1, b_1) = 1$ 2p

Identitățile din enunț se transformă în $a_1 = d \cdot b_1 + \frac{48}{a_1 \cdot b_1} (1), b_1 = d \cdot a_1 - \frac{312}{a_1 \cdot b_1} (2)$...2p

Avem că $48 : a_1 \cdot b_1, 312 : a_1 \cdot b_1$, deci $24 : a_1 \cdot b_1$ 2p

Dacă $a_1 \cdot b_1 \leq 6$, atunci $a_1 > 8$ FALS.....2p

Dacă $a_1 \cdot b_1 = 8$, atunci (1) implică $a_1 = 8, b_1 = 1, d = 2$, iar dacă $a_1 \cdot b_1 = 12$, atunci (1) implică $a_1 = 6, b_1 = 2, d = 1$ sau $a_1 = 12, b_1 = 1, d = 8$, toate contrazic pe (2)...5p

Dacă $a_1 \cdot b_1 = 24$ atunci (1) și (2) implică $(d^2 - 1)b_1 + 2d = 13$, egalitatea care se obține doar pentru $d=2$ și $b_1 = 3$ 5p

Obținem $a_1 = 8$, care convine(verifică și cele 2 relații), deci singura soluție este $a=16$, $b=6$2p

2. Distingem 2 cazuri:

I. $O \in (AD)$ și pentru figura.....1p

În $\triangle FOB$ și $\triangle EOC$: $m(\widehat{BOF}) = m(\widehat{EOC}), m(\widehat{OFB}) = m(\widehat{OEC}), \rightarrow m(\widehat{FOB}) = m(\widehat{EOC}), \dots$ 4p

$\triangle AOB \equiv \triangle AOC (LUU) \rightarrow (AB) \equiv (AC)$4p

Demonstrația pentru $AD \perp BC$ 1p

II. O nu aparține (AD) și pentru figura.....1p

$\triangle AOE \equiv \triangle AOF (LUU) \rightarrow m(\widehat{AOF}) = m(\widehat{EOA}) (1)$2p

dar $m(\widehat{BOF}) = m(\widehat{EOC}) (2)$2p

din (1) și (2) prin scădere $\rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COA})$2p

$\triangle AOB \equiv \triangle AOC (ULU) \rightarrow (AB) \equiv (AC)$2p

Demonstrația pentru $AD \perp BC$ 1p