

CONCURSUL NAȚIONAL OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
Etapa județeană – 21 martie 2026
Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

Problema 1 (20p)Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2026\}$

- Aflați suma elementelor mulțimii A .
- Câte pătrate perfecte conține mulțimea A ?
- Aflați cardinalul mulțimii B știind că $B = \{x \in A \mid x : 2 \text{ sau } x : 5\}$.

Soluție:

a) $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2026$ 2p

$S = (2026 \cdot 2027) : 2 = 2053351$ 3p

b) $45^2 = 2025 < 2026$, $46^2 = 2116 > 2026$ 2p

Deci pătratele perfecte din A sunt $1^2, 2^2, \dots, 45^2$, 45 pătrate perfecte..... 3p

c) Fie $C = \{x \in A \mid x : 2\}$ și $D = \{x \in A \mid x : 5\}$.

$C = \{x \in A \mid x : 2\} = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 2 \cdot 1013\}$, Card $C = 1013$ 2p

$D = \{x \in A \mid x : 5\} = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 405\}$, Card $D = 405$ 2p

$C \cap D = \{x \in A \mid x : 2 \text{ și } x : 5\} = \{x \in A \mid x : 10\} = \{10 \cdot 1, 10 \cdot 2, \dots, 10 \cdot 202\}$, Card $(C \cap D) = 202$ 3p

$Card B = Card(C \cup D) = Card C + Card D - Card(C \cap D) = 1013 + 405 - 202 = 1216$ 3p

Problema 2 (25p)

- Determinați numerele prime a și b știind că $2a + 3b = 80$.
- Determinați numerele raționale x, y și z știind că îndeplinesc relațiile:

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} \text{ și } xy + yz + zx = 6075.$$

Soluție:

a) $2a + 3b = 80$, $2a$ par, 80 par $\Rightarrow 3b$ par $\Rightarrow b$ număr par, b prim $\Rightarrow b=2$ 5p

$$2a + 3 \cdot 2 = 80 \Rightarrow 2a = 74 \Rightarrow a = 37, \text{ număr prim} 5p$$

$$b) \frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$$

Derivăm proporția adunând numărătorii la numitori și obținem

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{z+x+y} = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow x = y = z 5p$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 6075 \Rightarrow x^2 = 2025 5p$$

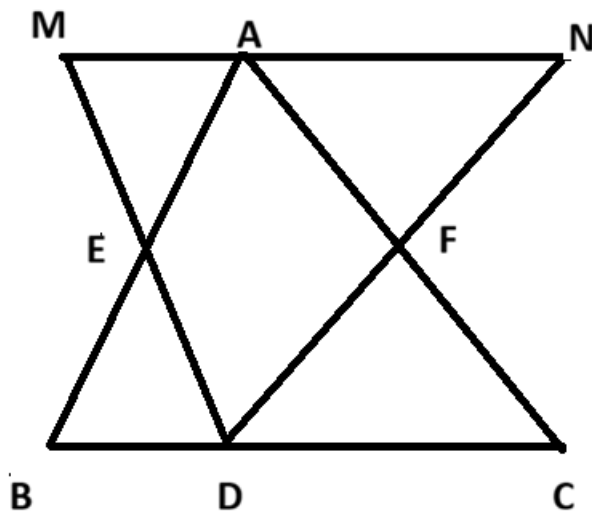
$$\text{Deci } x = y = z = 45 5p$$

Problema 3 (25p)

Fie D un punct situat pe latura BC a unui triunghi ABC, E mijlocul laturii AB și F mijlocul laturii AC. Notăm cu M simetricul punctului D față de punctul E și cu N simetricul punctului D față de punctul F. Arătați că:

- Punctele M, A și N sunt coliniare.
- $MN = BC$.

Soluție:



$$a) AE=EB, ME=ED, \sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle DEB (\text{opuse la vârf}) \Rightarrow \triangle AEM \equiv \triangle BED 5p$$

$$AF=FC, NF=FD, \sphericalangle AFN \equiv \sphericalangle DFC (\text{opuse la vârf}) \Rightarrow \triangle AFN \equiv \triangle CFD 5p$$

$$\triangle AEM \equiv \triangle BED \Rightarrow \sphericalangle EAM \equiv \sphericalangle EBD, \triangle AFN \equiv \triangle CFD \Rightarrow \sphericalangle NAF \equiv$$

$$\sphericalangle FCD 4p$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle MAN &= \sphericalangle MAE + \sphericalangle EAF + \sphericalangle FAN = \sphericalangle EBD + \sphericalangle EAF + \sphericalangle FCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC + \\ \sphericalangle ACB &= 180^\circ \Rightarrow M, A, N \text{ coliniare} \dots\dots\dots 5p \\ \text{b) } \triangle AEM &\equiv \triangle BED \Rightarrow AM = BD \dots\dots\dots 2p \\ \triangle AFN &\equiv \triangle CFD \Rightarrow AN = DC \dots\dots\dots 2p \\ MN &= MA + AN = BD + DC = BC \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Problema 4 (20p)

Fie n un număr natural nenul și a un număr natural cu cel puțin n cifre. Arătați că, dacă ultimele n cifre ale lui a^2 coincid cu ultimele n cifre ale lui a , atunci ultimele n cifre ale lui a^p coincid cu ultimele n cifre ale lui a , oricare ar fi numărul natural nenul p .

Soluție:

Ultimele n cifre ale lui $a^2 =$ ultimele n cifre ale lui a .

$$\Rightarrow \text{ultimele } n \text{ cifre ale lui } a^2 - a = \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ ori}} \Rightarrow a^2 - a : 10^n \dots\dots\dots 5p$$

$$a^p - a = a(a^{p-1} - 1) \dots\dots\dots 3p$$

$$\begin{aligned} a^{p-1} - 1 &= a^{p-1} + a^{p-2} + a^{p-3} + \dots + a^2 + a - a^{p-2} - a^{p-3} - \dots - a^2 - a - 1 \\ &= a^{p-2}(a - 1) + a^{p-3}(a - 1) + \dots + a^2(a - 1) + a(a - 1) + (a + 1) \\ &= (a - 1)(a^{p-2} + a^{p-3} + \dots + a^2 + a + 1) \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^p - a : a \\ a^p - a : (a - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^p - a : a(a - 1) \\ a(a - 1) : 10^n \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow a^p - a : 10^n \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{adică ultimele } n \text{ cifre ale lui } a^p = \text{ultimele } n \text{ cifre ale lui } a . \dots\dots\dots 1p$$