

CONCURSUL NAȚIONAL OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
Etapă județeană – 21 martie 2026
Clasa a V-a**Barem de corectare și notare****Problema 1 (25 puncte)**

- a) Să se determine numerele naturale prime a și b știind că $a + b = 91$.
- b) Să se afle $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2026$.
- c) Să se afle restul împărțirii lui $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2026}$ la 10.

Soluție:

a) Dacă a ; b - numere prime $a \neq 2$; $b \neq 2$ atunci $a + b = nr. par \neq 91$ - imposibil (2p)

$\Rightarrow a = 2$ sau $b = 2$. (2p)

Dacă $a = 2 \Rightarrow b = 89$ (2p)

Dacă $b = 2 \Rightarrow a = 89$. (2p)

b) $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2} =$ (4p)

$= 1013 \cdot 2027 = 2053351$ (4p)

c) A are 2027 termeni (2p)

$u(5^n) = 5$ pentru orice $n \neq 0$. (2p)

$\Rightarrow u(A) = u\left(1 + \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{2026 \text{ de } 5}\right) = 1 \Rightarrow$ (3p)

$\Rightarrow$ restul împărțirii lui A la 10 este 1. (2p)

Problema 2 (25 puncte)

Se consideră șirul de numere naturale: 6, 11, 16, 21, 26,

- a) Scrieți următorii patru termeni din șir.
- b) Arătați că numărul 2026 se află printre termenii șirului și determinați poziția lui în șir.
- c) Calculați suma primilor 20 de termeni ai șirului de pe poziții impare.

Soluție:

a) următorii patru termeni din șir sunt: 31, 36, 41, 46 (5p)

b) $t_1 = 1 + 5 \cdot 1 = 6$

$t_2 = 1 + 5 \cdot 2 = 11$

$t_3 = 1 + 5 \cdot 3 = 16$ (3p)

...

Observăm că toți termenii șirului sunt de forma $5k+1$. (2p)

$t_x = 1 + 5x = 2026$ (2p)

$5x = 2025$

$x = 405 \Rightarrow 2026$ este al 405-lea termen al șirului. (3p)

c) Șirul termenilor de pe poziții impare: 6, 16, 26, 36, ... (1p)

$S_i = 6 + 16 + 26 + \dots + 196 = 5 \cdot 1 + 1 + 5 \cdot 3 + 1 + 5 \cdot 5 + 1 + \dots +$
 $+ 5 \cdot 39 + 1 =$ (3p)

$= 5(1 + 3 + 5 + \dots + 39) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{20 \text{ de } 1} =$ (3p)

$= 5 \cdot 20^2 + 20 = 5 \cdot 400 + 20 = 2020$ (3p)

Problema 3 (20 puncte)

Cele două cifre care alcătuiesc vârsta unui bunic reprezintă vârstele celor doi nepoți ai săi. Dacă împărțim vârsta bunicului la diferența dintre vârstele nepoților săi, obținem câtul 16 și restul 3. Determinați vârsta bunicului.

Soluție:

Notăm: $\overline{ab}$ – vârsta bunicului

a și b – vârstele celor 2 nepoți (1p)

I. $\overline{ab} = 16(a - b) + 3, a - b > 3$ (2p)

$10 \cdot a + b = 16 \cdot a - 16 \cdot b + 3$ (1p)

$17 \cdot b = 6 \cdot a + 3$ (1p)

$6 \cdot a + 3 - \text{nr. impar} \Rightarrow b - \text{nr. impar}$ (1p)

$a \leq 9 \Rightarrow 6 \cdot a + 3 \leq 57 \Rightarrow 17 \cdot b \leq 57 \Rightarrow b \leq 3$ (2p)

Dacă $b = 1 \Rightarrow 6 \cdot a + 3 = 17 \Rightarrow 6 \cdot a = 14 - \text{imposibil}$ (2p)

Dacă $b = 3 \Rightarrow 6 \cdot a + 3 = 51 \Rightarrow 6 \cdot a = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 8$ și $a - b = 5 > 3$ (2p)

II. $\overline{ab} = 16(b - a) + 3, b - a > 3$ (2p)

$$10 \cdot a + b = 16 \cdot b - 16 \cdot a + 3 \quad (1p)$$

$$26 \cdot a = 15 \cdot b + 3 \quad (1p)$$

$$26 \cdot a - nr.par \Rightarrow b - nr.impar \quad (1p)$$

$$b = 1 \Rightarrow 26 \cdot a = 18 - nu\ covine$$

$$b = 3 \Rightarrow 26 \cdot a = 48 - nu\ convine$$

$$b = 5 \Rightarrow 26 \cdot a = 78 - nu\ convine$$

$$b = 7 \Rightarrow 26 \cdot a = 108 - nu\ convine$$

$$b = 9 \Rightarrow 26 \cdot a = 138 - nu\ convine \quad (2p)$$

$$Așadar, bunicul are 83 de ani \quad (1p)$$

Tastați ecuația aici.

Problema 4 (20p)

Comparați numerele naturale $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1517}$
și $b = (3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot \dots \cdot 3^{75}) : 729^{72}$.

GM nr. 12 / 2025

Soluție:

$$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1517}$$

$$2a = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1517} + 2^{1518} \quad (2p)$$

$$2a - a = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1517} + 2^{1518} - 1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \dots - 2^{1517} = 2^{1518} - 1 \quad (3p)$$

$$b = (3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot \dots \cdot 3^{75}) : (3^6)^{72} \quad (2p)$$

$$b = (3^{1+3+5+\dots+75}) : 3^{432} \quad (2p)$$

$$b = 3^{38^2-432} \quad (2p)$$

$$b = 3^{1444-432} \quad (2p)$$

$$b = 3^{1012} \quad (2p)$$

$$a = 2^{1518} - 1 < 2^{1518} = 2^{3 \cdot 506} = (2^3)^{506} \quad (2p)$$

$$a < 8^{506} < 9^{506} = (3^2)^{506} = 3^{1012} = b \quad (2p)$$

$$a < b \quad (1p)$$