OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 21 februarie 2026
Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

Problema 1:**a)** Determinați numărul natural n, dacă: $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\cdots+\frac{1}{x^2+(2n+1)x+n^2+n}=\frac{2009}{(x+1)(x+2010)}$.

Soluție:

$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{2009}{(x+1)(x+2010)}$......................................**4p**

$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}=\frac{2009}{(x+1)(x+2010)}$......................................**4p**

$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2010}$..**2p**

$x+n+1=x+2010 \Leftrightarrow n=2009\in\mathbb{N}$...**2p**

b) Fie $x+2y=\frac{175}{x}; y+2z=\frac{200}{y};\ \ z+2x=\frac{250}{z}$. Calculați $x+y+z$.

Soluție: $x+2y=\frac{175}{x}\Longrightarrow x^2+2xy=175$...**2p**

$y+2z=\frac{200}{y}\Longrightarrow y^2+2yz=200$...**2p**

$z+2x=\frac{250}{z}\Longrightarrow z^2+2xz=250$...**2p**

Însumând membru cu membru, obținem: $(x+y+z)^2=625$...............................**2,5p**

Obținem: $x+y+z=-25$...**1p**

Sau $x+y+z=25$..**1p**

Problema 2:**a)** Fie numerele reale x, y, z astfel încât $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. Arătați că $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

b) Se consideră triunghiul ABC de laturi $BC=a, CA=b, AB=c$. Fie $E=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$. Demonstrați că partea întreagă a numărului E este egală cu 1, dacă triunghiul este echilateral, respectiv cu 0, în toate celelalte cazuri.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2025

Soluție: a) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz -$
$-2zx = 0.$ **4p**

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 0$..**6p**

b) Dacă triunghiul ABC este echilateral, rezultă că $a = b = c \Longrightarrow E = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$

...3p

Așadar, $[E] = 1$...**1p**

Dacă triunghiul ABC nu este echilateral, atunci $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$

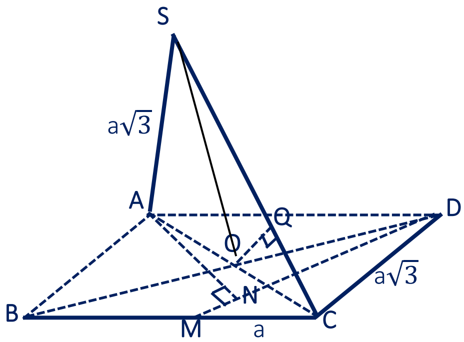
....**2p**

Ceea ce conduce la $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca \Longrightarrow E < 1$..................................**3p**

Cum $a, b, c > 0$ obținem $0 < E < 1 \Longrightarrow [E] = 0$..**3,5p**

Problema 3: Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara $SA = AB = a\sqrt{3}$.
Fie $M \in (BC)$ astfel încât $MC = a$.

a) Arătați că $BD \perp SC$
b) Calculați distanța dintre BD și SC
c) Aflați distanța de la S la MD.



Soluție:

Se acordă **1p** pe desen.

a) Din $BD \perp CA$ și $BD \perp SA, CA \cap SA = \{A\}, CA \text{ și } SA \subset (SAC) \Longrightarrow BD \perp$
$(SAC), SC \subset (SAC) \Longrightarrow BD \perp SC$..**3p**

b) Fie $OQ \perp SC, Q \in SC$. Cum $BD \perp (SAC)$ rezultă că $BD \perp OQ$, deci OQ este perpendiculara comună a dreptelor BD și SC..**2p**

Avem $OQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA \cdot AC}{SC}$, sau asemănare...**2p**

$SA \perp (ABC), AC \subset (ABC) \Longrightarrow SA \perp AC \Longrightarrow \Delta SAC$este dreptunghic în $A \overset{T.P.}{\Longrightarrow} SC^2 =$
$SA^2 + AC^2 \Longrightarrow SC^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{6}\right)^2 = 3a^2 + 6a^2 = 9a^2 \Longrightarrow SC = 3a$..........**3p**

$OQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{6}}{3a} = \frac{3\sqrt{2}a}{2 \cdot 3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, OQ=$\frac{a\sqrt{2}}{2} cm$ **2p**

c) Fie $AN \perp DM, N \in DM.$ Din asemănarea triunghiurilor AND și DCM, rezultă

$\frac{AN}{DC} = \frac{AD}{DM} = \frac{ND}{CM} \Longrightarrow \frac{AN}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{DM}$...**2p**

ΔDCM dreptunghic în C $\overset{\text{T.P.}}{\Longrightarrow} DM^2 = DC^2 + CM^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Longrightarrow DM = 2a$..**2,5p**

$\frac{AN}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} \Longrightarrow AN = \frac{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{3a}{2}$...**1p**

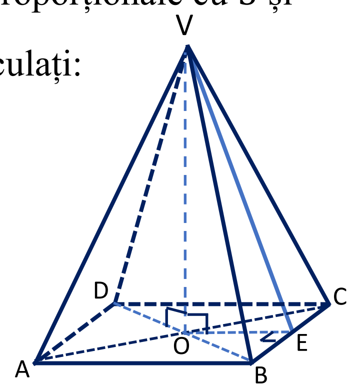
$SA \perp (ABC), AN \perp DM, AN \text{ și } DM \subset (ABC) \overset{T3\perp}{\Longrightarrow} SN \perp DM \Rightarrow d(S, MD) = SN$.....**2p**

$SA \perp (ABC), AN \subset (ABC) \Longrightarrow SA \perp AN \Rightarrow \Delta SAN$ dreptunghic în $A \overset{T.P.}{\Longrightarrow} SN^2 = SA^2 + AN^2 \Longrightarrow SN^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 3a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{21a^2}{4} \Longrightarrow SN = \frac{a\sqrt{21}}{2}\ cm$...............**2p**

Problema 4: Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată cu proprietatea că lungimea înălțimii piramidei și raza cercului circumscris bazei sunt direct proporționale cu 3 și 4, iar muchia laterală a piramidei are lungimea de $10\sqrt{2}\ cm$. Calculați:

a) Lungimea înălțimii, apotema piramidei și a laturii bazei.

b) Tangenta unghiului dintre muchia laterală și planul bazei



Soluție:

Se acordă **1p** pe desen.

$a)\{h, R\} d.p. \{3,4\} \leftrightarrow \frac{h}{3} = \frac{R}{4} = a \Longrightarrow h = 3a \text{ și } R = 4a$..................................**3p**

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ΔVOA

$$\Longrightarrow VA^2 = VO^2 + AO^2$$

$$(10\sqrt{2})^2 = (3a)^2 + (4a)^2 \Leftrightarrow 200 = 25a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{200}{25} \Leftrightarrow a = \frac{10\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}$$

a=$2\sqrt{2}cm \implies h = 6\sqrt{2}\,cm$ R=$8\sqrt{2}$cm..**4p**

AC=2R=$16\sqrt{2}$cm   AC=$16\sqrt{2}$cm   ⟹AB=16 cm.....................................**2p**

$\Delta VOE \text{ dreptunghic în } O \overset{TP}{\Rightarrow} VE^2 = VO^2 + OE^2 = (6\sqrt{2})^2 + 8^2 = 72 + 64 = 136$

VE=a_p=$\sqrt{136} = 2\sqrt{34}cm \Longrightarrow a_p = 2\sqrt{34}\ cm$..**3p**

b)$pr_{(ABC)}VA = AO \Longrightarrow tg[VA,\widehat{(ABC)}] = tg\widehat{VAO}$......................................**4,5p**

$\Delta VAO\ dreptunghic\ în\ O \Longrightarrow tg\widehat{VAO} = \frac{VO}{AO} = \frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$

$tg\widehat{VAO} = \frac{3}{4}$...**5p**

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii*
- *Timp efectiv de lucru 3 ore*
- *Fiecare problemă se notează cu maxim 22,5 puncte*
- *Se acordă 10 puncte din oficiu*

Str. 1 Decembrie, Nr.5, Bistrița, Jud. Bistrița-Năsăud, Cod 420080
Tel: +4 0263 213 529, Fax: +4 0263216 654, E-mail: isjbn@isjbn.ro
www.isjbn.ro