OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 21 februarie 2026
Clasa a VII-a
Barem de corectare și notare

Problema 1:

Fie numărul $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^{2026}}}$.

Demonstrați că:

a) $(\sqrt{2}-1)A \in \mathbb{Q}$;

b) $A < \sqrt{2}+1$.

Barem de corectare și notare

a) $(\sqrt{2}-1)A = \sqrt{2}A - A$	***3p***
$\sqrt{2}A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^4}} + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^{2026}}} =$	***3p***
$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^{2025}}}$	***2p***
$-A = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2^2}} - \frac{1}{\sqrt{2^3}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{2^{2025}}} - \frac{1}{\sqrt{2^{2026}}}$	***2p***
Însumând membru cu membru cele două egalități avem: $\sqrt{2}A - A = 1 - \frac{1}{\sqrt{2^{2026}}} = 1 - \frac{1}{2^{1013}} = \frac{2^{1013}-1}{2^{1013}} \in \mathbb{Q}$,	***3p***
deci $(\sqrt{2}-1)A \in \mathbb{Q}$	***1p***
b) Din *a)* avem: $(\sqrt{2}-1)A = \frac{2^{1013}-1}{2^{1013}} < 1$,	***3p***
deci $(\sqrt{2}-1)A < 1 \mid : (\sqrt{2}-1), \sqrt{2}-1 > 0 \quad \Leftrightarrow$	***2p***
$\Leftrightarrow \ A < \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$,	***3p***
deci $A < \sqrt{2}+1$	***0,5p***
TOTAL	***22,5p***

Problema 2:

Comparați numerele reale $\boldsymbol{x}$ *și* $\boldsymbol{y}$*, știind că:*

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{7^{2026} - 6\cdot 7^{2025} - 6\cdot 7^{2024} - \cdots - 6\cdot 7 - 6} - \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} - |\sqrt{7}-3|,$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2026}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2025\cdot 2026}} .$$

Barem de corectare și notare

$7^{2026} - 6\cdot 7^{2025} - 6\cdot 7^{2024} - \cdots - 6\cdot 7 - 6 = 7^{2026} - 6\cdot(7^{2025} + 7^{2024} + \cdots + 7 + 1) =$	***3p***
$= 7^{2026} - 6\cdot(7^{2026}-1):(7-1) = 1$	***4p***
Sau, calculând pe rând: $7^{2026} - 6\cdot 7^{2025} = 7^{2025}(7-6) = 7^{2025}$ $7^{2025} - 6\cdot 7^{2024} = 7^{2024}(7-6) = 7^{2024}$ .... $7^2 - 6\cdot 7 = 7(7-6) = 7$, iar $7-6=1$	

Str. 1 Decembrie, Nr.5, Bistrița, Jud. Bistrița-Năsăud, Cod 420080
Tel: +4 0263 213 529, Fax: +4 0263 216 654, E-mail: isjbn@isjbn.ro
www.isjbn.ro

$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = \left|\underbrace{2-\sqrt{7}}_{<0}\right| = -(2-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-2$ **2p**

$\left|\underbrace{\sqrt{7}-3}_{<0}\right| = -(\sqrt{7}-3) = 3-\sqrt{7}$ **2p**

$\boldsymbol{x} = \sqrt{1}-(\sqrt{7}-2)-(3-\sqrt{7}) = 1-\sqrt{7}+2-3+\sqrt{7} = 0$ **2p**

$\boldsymbol{y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{2026}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2026}} - \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2026}} =$ **3p**

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}} - \frac{1}{\sqrt{2026}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2026}}$ **3p**

$1 - \frac{1}{\sqrt{2026}} > 0$, deci $\boldsymbol{y} > 0$ **3p**

Din $\boldsymbol{x} = 0$ și $\boldsymbol{y} > 0$ rezultă că $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$. **0,5p**

TOTAL **22,5p**

Problema 3:

Se consideră trapezul ABCD cu AB = 9 cm, CD = 4 cm, AB ∥ CD, $\sphericalangle A = 90°$.
Latura AD este tangentă la cercul de diametru BC în punctul P.

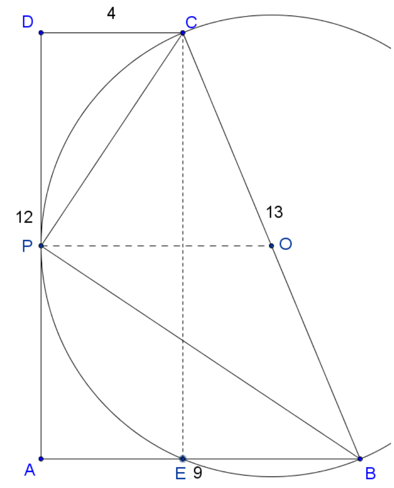
a) Să se calculeze:

1) Aria discului de diametru BC;

2) Aria triunghiului △PBC,

b) Să se determine cel mai mic număr natural **n** *petru care perimetrul triunghiului △PBC este mai mic decât* $2^{\boldsymbol{n}}$.

Barem de corectare și notare



Realizarea figurii corespunzătoare **2p**

a) 1) OP ⊥ AD, O e mijlocul lui BC ⇒
OP este linia mijocie a tapezului ABCD ⇒ $\mathrm{OP} = \frac{9+4}{2} = \frac{13}{2}(cm)$ **2p**

Raza discului este $r = \mathrm{OP}$, deci aria discului este egală cu
$\pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}\pi = 42{,}25\pi(cm^2)$ **1p**

2) $\mathcal{A}_{\triangle PBC} = \mathcal{A}_{\triangle POC} + \mathcal{A}_{\triangle POB} = \frac{PO\cdot PD}{2} + \frac{PO\cdot PA}{2} = \frac{PO(PD+PA)}{2} =$
$= \frac{PO\cdot AD}{2} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2}$. **1p**

Fie CE ⊥ AB înălțimea trapezului. AECD este dreptunghi ⇒
AD = CE, AE = CD = 4 cm și EB = AB − AE = 9 − 4 = 5 (cm). **1p**

Unghiul ∢BPC , înscris în cerc, întinde diametrul, deci este unghi drept. **1p**

În $\triangle PBC$, dreptunghic, mediana PO este jumătate din ipotenuză, deci BC = 2 · PO = 13 cm. **1p**

T. Pitagora în $\triangle EBC \Rightarrow CE^2 = BC^2 - EB^2 = 169 - 25 = 144$,
deci $\mathrm{CE} = \sqrt{144} = 12$ (cm). **1p**

$\mathcal{A}_{ABCD} = PO \cdot AD = \frac{13}{2} \cdot 12 = 78(cm^2)$ **2p**

$\mathcal{A}_{\triangle PBC} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2} = \frac{78}{2} = 39(cm^2)$.
Sau $\mathcal{A}_{\triangle PBC} = \frac{PC\cdot PB}{2} = \frac{2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{13}}{2} = 3 \cdot 13 = 39(cm^2)$, după ce s-au aflat lungimile catetelor PC și PB cu T Pitagora în $\triangle DCP$, respectiv în $\triangle ABP$. **2p**

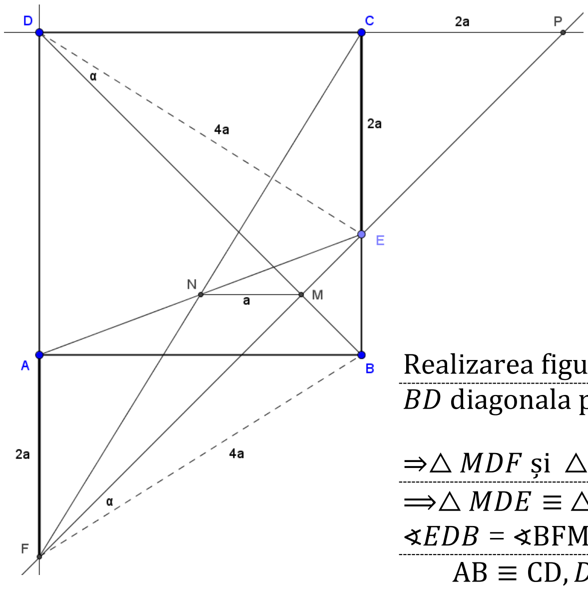
b) T. Pitagora în $\triangle DCP \Rightarrow CP^2 = DC^2 + DP^2 = 16 + 36 = 52$, deci $\mathrm{CP} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (cm)	***2p***
T. Pitagora în $\triangle ABP \Rightarrow PB^2 = AP^2 + AB^2 = 36 + 81 = 117$, deci $\mathrm{PB} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ (cm)	***2p***
$\mathcal{P}_{\triangle PBC} = PB + BC + PC = 3\sqrt{13} + 13 + 2\sqrt{13} = 5\sqrt{13} + 13(cm)$	***2p***
$\mathcal{P}_{\triangle PBC} = 5\sqrt{13} + 13 < 2^n$. Pentru $n = 4$ avem $16 = 2^4$ dar $5\sqrt{13} + 13 < 16 \Leftrightarrow 5\sqrt{13} < 3$ (**F**)	***1p***
Pentru $n = 5$ avem $32 = 2^5$ iar $5\sqrt{13} + 13 < 32 \Leftrightarrow 5\sqrt{13} < 19 \Leftrightarrow \sqrt{325} < \sqrt{361}$ (**A**)	***1p***
Deci cel mai mic număr natural **n** petru care perimetrul triunghiului △PBC este mai mic decât $2^{\mathbf{n}}$ este $\mathbf{n} = 5$.	***0,5p***
TOTAL	***22,5p***

Problema 4:

Fie ABCD un pătrat și E un punct pe latura BC. Perpendiculara dusă din E pe BD intersectează diagonala BD în M și dreapta AD în F. Notăm cu N intersecția dintre dreptele AE și CF. Știind că BF = 4 MN, aflați măsura unghiului ∢EDB.

Gazeta Matematică nr. 9/2025

Barem de corectare și notare



Realizarea figurii corespunzătoare	***2p***
BD diagonala pătratului $\Rightarrow \sphericalangle BDA = \sphericalangle DBC = 45°$, $EM \perp BD$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle MDF$ și $\triangle MBE$ sunt dreptunghice isoscele	***2p***
$\Longrightarrow \triangle MDE \equiv \triangle MFB$ (C.C.) $\Longrightarrow DE \equiv FB$ și $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle BFM$, deci $\sphericalangle EDB = \sphericalangle BFM$.	***3p***
$AB \equiv CD, DE \equiv FB \Longrightarrow \triangle CDE \equiv \triangle AFB$ (C. I.) $\Longrightarrow AF \equiv CE$, $AF \parallel CE$ $\Rightarrow$ $\Longrightarrow FACE$ este paralelogram $\Rightarrow$	***3p***
$\Rightarrow$ diagonalele AE și CF se înjumătățesc, deci N este mijlocul lui FC.	***2p***
Notăm cu P punctul de intersecție a dreptelor FE și DC. În triunghiul $\triangle DFP$ avem DM bisectoare și înălțime $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle DFP$ este dreptunghic isoscel, $DP = DF$, $\sphericalangle DFP = \sphericalangle DPF = 45°$, iar DM este și mediană $\Rightarrow$ M mijlocul lui FP.	***3p***
Atunci MN este linie mijlocie în $\triangle FCP$. Notând $MN = a \Rightarrow CP = 2a$.	***2p***
$AF = DF - DA = DP - DC = CP = 2a$	***1p***
$AF = 2a, FB = 4\,MN = 4a \Rightarrow \sphericalangle ABF = 30°$, conform reciprocei T. ∢30°	***2p***
$\sphericalangle AFB = 90° - \sphericalangle ABF = 90° - 30° = 60°$	***1p***
$\sphericalangle BFM = \sphericalangle AFB - \sphericalangle AFP = 60° - 45° = 15°$	***1p***
$\sphericalangle EDM = \sphericalangle EDB = \sphericalangle BFM = 15°$	***0,5p***
TOTAL	***22,5p***