OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 21 februarie 2026
Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

Problema 1:

Determinați numărul minim și numărul maxim de divizori ai numărului $\overline{abcabc}$, știind că $\overline{abc}$ este pătrat perfect.

Rezolvare:

$\overline{abcabc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$ ***2p***

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$..***1,5p***

$\overline{abc}$ este pătrat perfect $\Rightarrow \overline{abc} = \overline{de}^2$, unde $10 \leq \overline{de} \leq 31$

Deci , $\overline{abcabc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{de}^2$...***2p***

Dacă $\overline{de}$ este număr prim, $\overline{de} \neq 11$, $\overline{de} \neq 13$, atunci numărul de divizori este egal cu (1+1)(1+1)(1+1)(2+1) = 24..***3p***

Dacă $\overline{de} = 11$ *sau* $\overline{de} = 13$, atunci numărul de divizori este egal cu (1+1)(1+1)(3+1) =16 , deci obținem ***numărul minim de divizori =16***...***5p***

Deducem că numărul maxim de divizori se obține dacă numărul $\overline{de}$, $10 \leq \overline{de} \leq 31$ este număr compus cu un număr mai mare de factori primi, diferiți de 7,11 și 13.

Acest număr este $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$..***5p***

Numărul maxim de divizori =(1+1)(1+1)(1+1) (2+1)(2+1)(2+1)=216......................................4p

Problema 2:

Fie $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$ cinci unghiuri în jurul unui punct *O*, astfel încât $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt complementare, $\sphericalangle COD = 2 \cdot \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle DOE = 3 \cdot \sphericalangle EOA$ și $\sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle BOC$.

a) **Determinați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.**
b) **Arătați că A,O,D sunt coliniare**
c) **Dacă (OM și (ON sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$, calculați măsura $\sphericalangle MON$.**

Rezolvare:

a) Notăm cu x măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

Str. 1 Decembrie, Nr.5, Bistrița, Jud. Bistrița-Năsăud, Cod 420080
Tel: +4 0263 213 529, Fax: +4 0263 216 654, E-mail: isjbn@isjbn.ro
www.isjbn.ro

Astfel, avem : $\sphericalangle BOC = 90^\circ - x$, $\sphericalangle COD = 2x$, $\sphericalangle EOA = 90^\circ - x$ și $\sphericalangle DOE = 3 \cdot (90^\circ - x)$

....**5p**

Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul punctului O fiind de 360°, obținem:

$x + (90^\circ - x) + 2x + 3 \cdot (90^\circ - x) + (90^\circ - x) = 360^\circ$..**3p**

$5 \cdot (90^\circ - x) + 3x = 360^\circ$, de unde $x = 45^\circ$..**3p**

b) Se determină măsurile $\sphericalangle BOC = 45^\circ$, $\sphericalangle COD = 90^\circ$,...**3p**

deci $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 45^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, de unde deducem că A,O,D sunt coliniare...**3,5p**

c) Dacă (OM și (ON sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$

$\Rightarrow \sphericalangle MON = \sphericalangle AOB : 2 + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD : 2 = 22^\circ 30' + 45^\circ + 45^\circ = 112^\circ 30'$......................**5p**.

Problema 3:

Se dă mulțimea A formată din toate numerele naturale mai mici decât 500 care împărțite la 5 dau restul 2, iar B mulțimea numerelor naturale mai mici decat 500 care împărțite la 7 dau restul 4. Calculați câte elemente are reuniunea celor două mulțimi.

Rezolvare:

$$A = \{n \in \mathbb{N} | n < 500 \text{ și } n = 5 \cdot a + 2, a \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} | n < 500 \text{ și } n = 7 \cdot b + 4, b \in \mathbb{N}\}$$

$n = 5 \cdot 0 + 2 = 2$; $n = 5 \cdot 1 + 2 = 7$; $n = 5 \cdot 2 + 2 = 12$; ...; $n = 5 \cdot 99 + 2 = 497$

$n = 5 \cdot 100 + 2 = 502 > 500$, $\Rightarrow$ $\boldsymbol{card\ A = 100}$ ***5.5p***

$n = 7 \cdot 0 + 4 = 4$; $n = 7 \cdot 1 + 4 = 9$; $n = 7 \cdot 2 + 4 = 18$;. ..; $n = 7 \cdot 70 + 4 = 494$

$n = 7 \cdot 71 + 4 = 501 > 500$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{card\ B = 71}$ ***5.5p***

$n \in A \cap B \Rightarrow n = 5 \cdot a + 2 \Longrightarrow n + 3 = 5 \cdot a + 5 = 5(a + 1)$

$n = 7 \cdot b + 4 \Longrightarrow n + 3 = 7 \cdot b + 7 = 7(b + 1)$

$\Longrightarrow n + 3 \in M_5 \cap M_7 \Rightarrow n + 3 \in M_{35}$ ....***5p***.

$$n + 3 \in \{35; 70; 105; 140; 175; 210; 245; 280; 315; 350; 385; 420; 455; 490; 525; \ldots\}$$
$$n \in \{32;\ 67; 102; 137; 172; 207; 242; 277; 312; 347; 382; 417; 452; 487; \ldots\}$$

$\Rightarrow card\ A \cap B = 14$ ***3.5p***

$card\ (A \cup B) = card\ A + card\ B - card\ (A \cap B)$

$\boldsymbol{card\ A \cup B = 100 + 71 - 14 = 157}$..***3p***

Problema 4:

Aflați numerele naturale *a, b* și *c* știind că

$$\frac{a}{a+2}=\frac{b^2}{b^2+4}=\frac{c^3}{c^3+8} \quad \text{și} \quad a\cdot b\cdot c=16384$$

Rezolvare:

$$\frac{a}{a+2}=\frac{b^2}{b^2+4}=\frac{c^3}{c^3+8} \Rightarrow \frac{a+2}{a}=\frac{b^2+4}{b^2}=\frac{c^3+8}{c^3} \Rightarrow \frac{2}{a}+1=\frac{4}{b^2}+1=\frac{8}{c^3}+1$$

……….. ***2.5p***

$\Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b^2}{4}=\frac{c^3}{8}=k^6$ ……… ***2.5p***

$\Rightarrow a=2\cdot k^6,\ b^2=4\cdot k^6,\ c^3=8\cdot k^6$ ……… ***3p***

$\Rightarrow a=2\cdot k^6,\ b=2\cdot k^3,\ c=2\cdot k^2$ ……… ***3p***

$a\cdot b\cdot c=16384 \Rightarrow 8\cdot k^{11}=16384$ ……… ***3p***

$k^{11}=2048 \Longrightarrow k^{11}=2^{11} \Longrightarrow k=2$ ……… ***2.5p***

$a=2\cdot 2^6=128$ ……… ***2p***

$b=2\cdot 2^3=16$ ……… ***2p***

$c=2\cdot 2^2=8$ ……… ***2p***

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii*
- *Timp efectiv de lucru 3 ore*
- *Fiecare problemă se notează cu maxim 22,5 puncte*
- *Se acordă 10 puncte din oficiu*

Str. 1 Decembrie, Nr.5, Bistrița, Jud. Bistrița-Năsăud, Cod 420080
Tel: +4 0263 213 529, Fax: +4 0263 216 654, E-mail: isjbn@isjbn.ro
www.isjbn.ro