

Concursul „Matematica de drag”, 15.11.2025
Clasa a V-a

1. Fie n un număr natural și $x = 2^{2025} + 2^{2027}$, $y = 2^n + 2^{n+1}$ două numere naturale, astfel încât $y > x$. Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care diferența numerelor y și x este cub perfect.

Cristina Costea, Gazeta Matematică nr. 5/2025

Soluție. Avem $x = 2^{2025} + 2^{2027} = 5 \cdot 2^{2025}$, iar $y = 2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n = 6 \cdot 2^{n-1}$. Cum $y > x$ obținem $n - 1 \geq 2025$, adică $n \geq 2026$ **3p**

Pentru $n = 2026$ rezultă $y - x = 2^{2025} = (2^{675})^3$, cub perfect. Deci $n = 2026$ **4p**

2. Un număr natural n de 6 cifre are proprietatea că fiecare cifră a sa este mai mică decât cifra care urmează (de exemplu, $n = 135789$). Arătați că suma cifrelor numărului $n \cdot 99$ este 18.

Soluție. Dacă $n = \overline{abcdef}$, atunci $n \cdot 99 = \overline{abcdef00} - \overline{abcdef}$ **4p**

Reiese că $n \cdot 99$ are cifrele $a, b, c - a, d - b, e - c, f - d - 1, 9 - e, 10 - f$, de unde concluzia **3p**

3. Fie $n \geq 3$ un număr natural.

a) Arătați că $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

b) Arătați că există numerele naturale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, distincte două câte două, astfel încât numărul $A = a_1 + a_2 + a_3 + a_3 + \dots + a_n$ se împarte exact la fiecare dintre numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Soluție. a) Fie S suma din membrul stâng. Avem $1 + S = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$ **2p**

Grupând în continuare primii doi termeni obținem, în final, $1 + S = 2^n$, de unde $S = 2^n - 1$ **2p**

Variantă. Avem $2 \cdot S = S + 2^n - 1$ (**2p**), de unde $S = 2^n - 1$ (**2p**)

b) Din a) avem $1 + 2 + (3 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-3}) = 3 \cdot 2^{n-2}$, iar $3 \cdot 2^{n-2}$ se împarte exact la fiecare din numerele $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 3 \cdot 2, a_5 = 3 \cdot 2^2, \dots, a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$ **3p**

Concursul „Matematica de drag”, 15.11.2025
Clasa a VI-a

1. Dintre numerele naturale de trei cifre, care sunt mai multe: cele impare care au suma cifrelor pară, sau cele pare care au suma cifrelor impară? Justificați răspunsul!

Soluție. Fie A mulțimea numerelor de primul tip și B mulțimea numerelor de cel de al doilea tip. Numerele din A au ultima cifră 1, 3, 5, 7, 9, iar numerele din B au ultima cifră 0, 2, 4, 6, 8 **2p**

2. Fie a, b, c numere naturale astfel încât $(a, b) = (a, c) \cdot (b, c)$. Arătați că (a, b) este pătrat perfect.

Am notat cu (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x și y .

Ruluca Băbilescu, GM nr. 5/2025

3. Se consideră în plan 161 de semidrepte având aceeași origine și astfel încât măsura unghiului oricărui două este un număr întreg de grade. Arătați că, printre semidreptele date, există două care fac un unghi de 40° .

Soluție. Fie O originea comună a semidreptelor și $[OA]$ una dintre semidrepte. Considerăm toate semidreptele din plan care fac cu $[OA]$ un unghi a cărui măsură în grade este un număr întreg, le numerotăm în sensul mișcării acelor de ceasornic $[OA_1], [OA_2], \dots, [OA_{359}]$ și împărțim aceste semidrepte în 40 de grupe de câte 9 semidrepte, punând:

- în prima grupă semidreptele $[OA_1], [OA_{41}], [OA_{81}], \dots, [OA_{321}]$;

Dacă mărim cu 1 un număr din mulțimea B obținem un număr din mulțimea A , deci A are cel puțin tot atâtea elemente câte are B **2p**

Dacă micșorăm cu 1 un număr din mulțimea A obținem un număr din mulțimea B , deci B are cel puțin tot atâtea elemente câte are A **2p**

Așadar, A și B au același număr de elemente... **1p**

Observație. Avem $|A| = |B| = 225$.

Soluție. Fie $A = (a, c)$, $B = (b, c)$. Atunci $A \mid a$, $A \mid c$ și, din ipoteză, $A \mid (a, b)$, deci $A \mid b$. Deducem $A \mid B$ **3p**

Analog reiese $B \mid A$ **2p**

Rezultă $A = B$, iar $(a, b) = A^2$, c.c.t.d. **2p**

- în a doua grupă semidreptele $[OA_2], [OA_{42}], [OA_{82}], \dots, [OA_{322}]$;

- ...

- în a 40-a grupă semidreptele $[OA], [OA_{40}], [OA_{80}], [OA_{120}], \dots, [OA_{320}]$ **3p**

Deoarece avem 161 de semidrepte și 40 de grupe, există o grupă în care apar cel puțin 5 dintre semidreptele inițiale – fie acestea, în sensul mișcării acelor de ceasornic, $[OM], [ON], [OP], [OQ], [OR]$. Atunci:

- fie unul dintre unghiurile $\angle MON, \angle NOP, \angle POQ, \angle QOR$ are 40° ;

- fie aceste unghiuri au cel puțin 80° , caz în care $\angle ROM = 40^\circ$.

În ambele cazuri, concluzia este demonstrată... **4p**

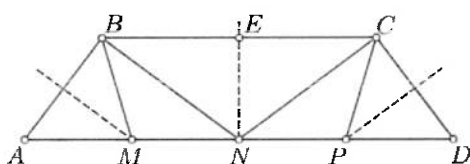
Concursul de Matematică „Matematica de drag”, 15.11.2025
Clasa a VII-a

1. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $A = \sqrt{2^n + 2024} + \sqrt{n^2 + 2025}$ este natural.

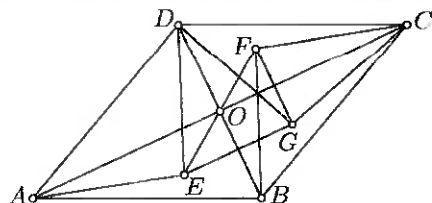
George Florin Serban, GM 6-7-8/2025

Soluție. Folosim proprietatea: „dacă a, b și $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sunt numere naturale, atunci a și b sunt pătrate perfecte” **3p**

2. În patrulaterul convex $ABCD$, mediatoarele segmentelor AB, BC, CD taie latura AD în punctele M, N , respectiv P , care împart latura AD în patru părți egale. Arătați că $AD \parallel BC$.



3. În interiorul rombului $ABCD$ se consideră punctele E și F astfel încât $EA = ED = FB = FC$. Perpendiculara din E pe BD intersectează perpendiculara din F pe AC în punctul G . Demonstrați că $GC = GD$.



Avem $2024 = 2^3 \cdot 253$. Astfel, dacă $n \geq 4$, atunci numărul $2^n + 2024$ este divizibil cu 8 dar nu și cu 16, deci nu poate fi pătrat perfect. Rezultă $n \leq 3$ **2p**

Pentru $n = 0$ obținem $A = 90$, pentru $n = 1$ obținem $A = 2\sqrt{2026}$, pentru $n = 2$ obținem $A = \sqrt{2028} + \sqrt{2029}$, iar pentru $n = 3$ obținem $A = \sqrt{2032} + \sqrt{2034}$, deci răspunsul este $n = 0$ **2p**

Soluție. Avem $BM = AM = MN = NP = PD = PC$. Rezultă că medianele MB și PC din triunghiurile ANB , respectiv NCN sunt jumătate din latura pe care cad, deci $\angle ABN = \angle DCN = 90^\circ$ **3p**

Din $AN = ND$ și $NB = NC$ reiese $\triangle ANB \cong \triangle DNC$ (IC)..... **2p**

Astfel $\angle ANB = \angle DNC$ și, cum $\angle BNE = \angle CNE$ (în triunghiul isoscel BNC), deducem $\angle ANE = \angle DNE$. Obținem $AD \perp EN \perp BC$, de unde concluzia..... **2p**

Soluție. Triunghiurile ABD și CDB sunt simetrice față de O , iar ipoteza arată că și punctele E, F sunt simetrice față de O .

Argument alternativ. Avem $AE = CF$ și rezultă imediat $AE \parallel CF$, deci $AECF$ este paralelogram iar centrul său este O **3p**

Din $AC \perp BD$, $OE = OF$ și ipoteză rezultă că E și G sunt simetrice față de BD **2p**

Obținem $GD = DE$ și $GC = EA$, de unde reiese concluzia..... **2p**

Concursul de Matematică „Matematica de drag”, 15.11.2025
Clasa a VIII-a

1. Numerele reale pozitive x, y și a îndeplinesc condițiile $x^2 = a - y$, $y^2 = a + x$ și $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 2023$. Determinați a .

Daniel Șalabină, GM nr. 6-7-8/2025

Soluție. Din $a = x^2 + y = y^2 - x$ rezultă $(x + y)(x - y + 1) = 0$ deci, cum numerele sunt pozitive, $x - y + 1 = 0$, adică $y = x + 1$ **2p**

Din a treia relație rezultă $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = 2025$ **2p**

Reiese $\frac{(x - y)^2 + 2xy}{xy} = 45$, deci $xy = \frac{1}{43}$ **1p**

Obținem $a = x^2 + y = x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1 = xy + 1 = \frac{44}{43}$ **2p**

2. Arătați că intersecția mulțimilor

$$A = \left\{ \frac{n^3 - n + 3}{n^3 - n + 7} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ \frac{3(m^2 - m) + 1}{3(m^2 - m) + 5} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

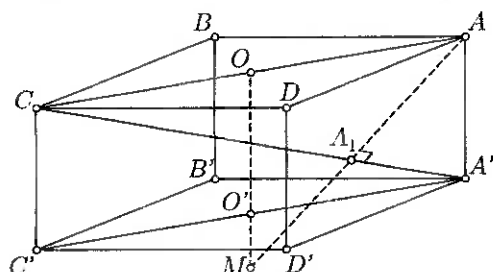
este vidă.

Soluție. Fie $x = \frac{n^3 - n + 3}{n^3 - n + 7} = \frac{3(m^2 - m) + 1}{3(m^2 - m) + 5}$, cu $m, n \in \mathbb{N}$ **2p**

Atunci $n^3 - n + 2 = 3(m^2 - m)$ **1p**

Egalitatea precedentă este imposibilă deoarece $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ este divizibil cu 6, deci $n^3 - n + 2$ dă rest 2 la împărțirea cu 6, pe când $3(m^2 - m) = 3m(m - 1)$ este divizibil cu 6, oricare ar fi numerele naturale m și n . Aceasta arată că mulțimile A și B nu au elemente comune **4p**

3. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic, cu muchiile laterale AA', BB', CC', DD' . Arătați că planul care trece prin A și este perpendicular pe $A'C$, planul care trece prin B și este perpendicular pe $B'D$, planul care trece prin C și este perpendicular pe $C'A$ și planul care trece prin D și este perpendicular pe $D'B$ au un punct comun.



Soluție. Arătăm că toate cele patru plane taie dreapta OO' (unde O, O' sunt centrele bazelor) în același punct **2p**

Fie α planul care trece prin A și este perpendicular pe $A'C$ și A_1 proiecția lui A pe dreapta $A'C$. Atunci $AA_1 \subset \alpha$. Dreptele OO' și AA_1 sunt cuprinse în planul $ACC'A'$ și nu sunt paralele, deci se taie într-un punct M , care este chiar intersecția planului α cu OO' .. **2p**

Avem $\frac{OM}{OA} = \text{tg } \angle CAA_1 = \text{tg } \angle AA'C = \frac{AC}{AA'}$, deci $OM = \frac{OA \cdot AC}{AA'} = \frac{AC^2}{2AA'}$. Deoarece $AA' = BB' = CC' = DD'$ și $AC = BD$, poziția lui M nu depinde de vârful analizat (am analizat situația planului dus prin A), deci celelalte trei plane taie dreapta OO' în același punct **3p**