



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE**

8 noiembrie 2025

Clasa a VIII-a

Subiectul I (7 puncte)

1. Dacă $a, b \in [0, 2]$, arătați că:

a) $a + b - 2 \leq \frac{ab}{2}$

b) $\frac{1}{a+b+1} \leq 1 - \frac{a+b}{3} + \frac{ab}{6}$

2.

a) Demonstrați că $7^{2^4} = 48(7^2 + 1)(7^{2^2} + 1)(7^{2^3} + 1) + 1$.

b) Determinați restul împărțirii lui 7^{2^n} prin 2^{n+3} .

c) Arătați că $\left\{\frac{7^2}{2^4}\right\} + \left\{\frac{7^{2^2}}{2^5}\right\} + \left\{\frac{7^{2^3}}{2^6}\right\} + \dots + \left\{\frac{7^{2^n}}{2^{n+3}}\right\} < \frac{1}{8}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Subiectul II (7 puncte)

1. Fie mulțimea $A = \left\{x \in [0, \infty) / \sqrt{4x+1} + 4\sqrt{x} + \sqrt{4x+1-4\sqrt{x}} = 2\right\}$.
Aflați mulțimea A .

2. Fie numerele reale a, b, c astfel încât $a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 6a + 4b - 12c + 18 = 0$.

a) Verificați dacă $(2b+1)^2 + (2c-3)^2 = 4b^2 + 4c^2 + 4b - 12c + 10$.

b) Arătați că $a < b < c$.

c) Găsiți $\max(a+b+c)$.

Subiectul III (7 puncte)

1. Punctele unui plan sunt colorate cu trei culori. Demonstrați că există două puncte la distanța 1, având aceeași culoare.

2. În cubul ABCDA'B'C'D', punctele M, N, respectiv P sunt mijloacele muchiilor CC', A'D', respectiv C'D'. Aflați sinusul unghiului format de dreptele BM și NP.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 120 minute

Timp de acomodare subiect: 30 minute

Fiecare subiect este punctat de la 1 punct -7 puncte