


EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT
MATEMATICĂ M_MATE-INFO
Testare de etapă

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1. Să se determine numărul natural m pentru care numărul complex $z = \frac{m-3i}{3-mi}$ este real.
2. Să se găsească o relație independentă de parametru real m între rădăcinile ecuației:
 $x^2 - (m+2)x + 3m = 0, m \in \mathbb{R}.$
3. Să se rezolve ecuația $\sqrt{3x+1} + \sqrt{17-x} = 8.$
4. Se consideră mulțimile $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Să se determine numărul funcțiilor descrescătoare $f: M \rightarrow N$ cu proprietatea că $f(4) = 2.$
5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$ și $C(1, 3).$ Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu mediatoarea segmentului $BC.$
6. Știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și că $\sin x = -\frac{2}{3}$, să se calculeze $\sin 2x.$

Subiectul II
(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 5x + y + mz = n \end{cases}, m, n \in \mathbb{R}.$$
 - a) Să se determine parametrul real m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.
 - b) Să se determine valorile reale ale lui m și n pentru care sistemul este incompatibil.
 - c) Să se arate că există o infinitate de valori ale lui m și n pentru care sistemul admite o soluție (x, y, z) cu x, y, z în progresie aritmetică.
2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 3x - 3y + 12.$
 - a) Să se arate că legea $\star$ se mai scrie și $x \star y = (x-3)(y-3) + 3.$
 - b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ (x+1) = 3.$
 - c) Să se rezolve inecuația $x \circ 2x \leq 0.$

Subiectul III
(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}.$
 - a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}.$
 - b) Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 2$ și asimptota oblică la $+\infty.$
 - c) Arătați că pentru orice $x \in [2, 4]$ are loc inegalitatea $2\sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{11}{3}.$

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \in (-\infty, -1) \\ 2 + x, & x \in [-1, \infty) \end{cases}$.

a) Să se arate că f să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine o primitivă F a funcției cu proprietatea că $F(2) = \frac{3}{2}$.

c) Determinați o primitivă $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2x^2 + x + 4 - f(x)}$, pentru care $G(0) = 0$, unde $f(x) = 2 + x, x \in [-1, \infty)$

EXAMENUL DE BACALAUREAT
MATEMATICĂ M_MATE-INFO,
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE



Testare de etapă

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = \frac{m-3i}{3-mi} = \frac{(m-3i)(3+mi)}{(3-mi)(3+mi)} = \frac{6m+(m^2-9)i}{m^2+9}.$ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m = \pm 3. \text{ Cum } m \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 3.$	2p 1p 2p
2.	$x_1 + x_2 = m + 2$ $x_1 \cdot x_2 = 3m$ $x_1 \cdot x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 6 = 0$	2p 2p 1p
3.	$17 - x \geq 0$ $3x + 1 \geq 0$ $x \in [-1/3, \infty) \cap (-\infty, 17]$ Se obțin soluțiile $x_1=8$ și $x_2=16$ care aparțin domeniului.	1p 1p 1p 2p
4.	Este necesar ca $f(1), f(2), f(3) \in \{3,4,5,6,7\}$ cu $f(1) > f(2) > f(3)$. Deci, numărul căutat este egal cu numărul submulțimilor (considerate ordonate descrescător) de trei elemente ale mulțimii $\{3,4,5,6,7\}$ Acesta este $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$.	1p 2p 2p
5.	$m_{AB} = -\frac{2}{3}$ Panta mediatoarei segmentului AB = $\frac{3}{2}$ Panta paralelei prin C = $\frac{3}{2}$ Ecuția paralelei prin C: $2y-3x-3=0$.	1p 1p 1p 2p
6.	$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ și } \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ Cum } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ rezultă } \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\sin 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL II
(30 de puncte)

1.a)	matricea sistemului este: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 20 + 9 - 15 + 6m + 2 = 7m + 16$ $\det A = 0 \Leftrightarrow 7m + 16 - 0 \Rightarrow m = -\frac{16}{7}$	3p 2p
1.b)	Ca sistemul să fie incompatibil, este necesar ca determinantul matricei sistemului să fie nul și rangul matricei sistemului să fie diferit de rangul matricei extinse. $\det A = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{16}{7}. \text{ Cum } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2$ Obinem astfel ca rang $A = 3$. Asta înseamnă ca: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & n \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow n - 10 - 3 + 5 + 6n - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 7n - 9 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq \frac{9}{7}$ Deci, soluția este $m = -\frac{16}{7}$ și $n \neq \frac{9}{7}$	1p 1p 2p 1p
1.c)	$\div x, y, z \Leftrightarrow 2y = x + z$ Rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$ și avem soluțiile $x = \frac{1}{14}, y = -\frac{3}{14}, z = -\frac{1}{2}$ Înlocuind în a treia ecuație a sistemului avem: $\frac{5}{14} - \frac{3}{14} - \frac{m}{2} = n \Rightarrow 7m + 14n = 2 \text{ (care are o infinitate de soluții reale } m \text{ și } n)$	1p 2p 2p
2.a)	1. $(x - 3)(y - 3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3$ $= xy - 3x - 3y + 12.$	3p 2p
2.b)	1. $x \circ (x + 1) = 3 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1 - 3) + 3 = 3$ $(x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ sau } x = 2$	2p 3p
2.c)	1. $x \circ 2x \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(2x - 3) + 3 \leq 0$ $2x^2 - 9x + 12 \leq 0$ At. ec. $2x^2 - 9x + 12 = 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$	2p 3p

SUBIECTUL III
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2-2x+3)'(x-1)-(x^2-2x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$ $= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1-2}{(x-1)^2}$ $= -1 - \frac{2}{(x-1)^2}$	2p 2p 1p
1.b)	Prin calcul, obținem că asimptota oblică are ecuația $y = x - 1$ iar ecuația tangentei la grafic în punctul de abscisă $x = 2$ este $y = -x + 5$ Rezolvând sistemul format din cele două ecuații, se obține că $x = 3$ și $y = 2$. (coordonatele punctului de intersecție)	2p 2p 1p
1.c)	Rezolvând ecuația $f'(x) = 0$ și ținând cont că $x \in [2, 4] \Rightarrow$ soluția $x = 1 + \sqrt{2}$ Se observă că $f'(x) < 0$ pe $[2, 1 + \sqrt{2}]$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1 + \sqrt{2}, 4]$ Valorile funcției f în $2, 1 + \sqrt{2}$ și 4 sunt: $f(2) = 3$ $f(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ $f(4) = \frac{11}{3}$ $\Rightarrow f(x) \in \left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right], (\forall) x \in [2, 4]$	2p 1p 1p
2.a)	f continuă pe $\mathbb{R}$. f admite primitive pe $\mathbb{R}$.	3p 2p
2.b)	$F(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + C$ $F(2) = \frac{3}{2}$ $C = \frac{-9}{2}$	2p 2p 1p
2.c)	$g(x) = g(x) = \frac{1}{2x^2 + x + 4 - f(x)} = \frac{1}{2x^2 + 2} = \frac{1}{2(x^2 + 1)}$ O primitivă G a funcției g este de forma $G(x) = \frac{1}{2} \cdot \arctg x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $G(0) = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} \cdot \arctg x$	2p 2p 1p