

EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT



MATEMATICĂ M_ȘT-NAT

Testare de etapă

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

Subiectul I

(30 puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Calculați suma primilor zece termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 + a_8 = 16$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $g(x) = x - 2$. Să se calculeze $(f \circ g)(1)$. |
| 5p | 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt{x^2 + x + 3} = x + 1$. |
| 5p | 4. Să se determine câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele din mulțimea $\{0, 2, 4, 6\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-2, 3)$. Determinați coordonatele punctului B , știind că $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$. |
| 5p | 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC , în care $A = 30^\circ$ și $BC = 8$ cm. |

Subiectul al II-lea

(30 puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ 2 & 4-a \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det(M(1)) = 5$. |
| 5p | b) Demonstrați că $M(a) + M(-a) = 2M(0)$ pentru orice număr real a . |
| 5p | c) Determinați numerele reale x și k , știind că $M(x) \cdot M(x) = kM(2)$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4xy + 2x + 2y + 2$. |
| 5p | a) Arătați că $(-1) * 2 = -4$. |
| 5p | b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = 10$. |
| 5p | c) Determinați numărul întreg n pentru care $\left(\frac{1}{n} - 1\right) * (n) = 1$. |

Subiectul al III-lea

(30 puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. |
| 5p | b) Se determină ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = e$ |
| 5p | c) Demonstrați că $e \ln x \leq x$, $\forall x \in (0, \infty)$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x^2 + 2x + 5$. |
| 5p | a) Determinați primitivele funcției f . |
| 5p | b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. |
| 5p | c) Determinați o primitivă $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)-2x+2}$, pentru care $G(0) = 0$. |

EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT
MATEMATICĂ M_ȘT-NAT.
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Test de etapă
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
• Timpul de lucru efectiv este de trei ore

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	$a_3 + a_8 = a_1 + 2r + a_1 + 7r = 2a_1 + 9r$ deci $2a_1 + 9r = 16$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (a_1 + a_{10}) \cdot 5 = (a_1 + a_1 + 9r) \cdot 5$ $= (2a_1 + 9r) \cdot 5$ Se obține $S_{10} = 16 \cdot 5 = 80$	2p 3p
2.	$(f \circ g)(1) = (f(g(1)))$ $g(1) = 1 - 2 = -1$, $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = 2 + 1 + 3 = 6$. $(f \circ g)(1) = 6$	2p 3p
3.	$x + 1 \geq 0$, $x^2 + x + 3 \geq 0$ obținem $x \in [-1, \infty)$ $\sqrt{x^2 + x + 3} = x + 1$ rezultă $x^2 + x + 3 = (x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + x + 3 = x^2 + 2x + 1$. Obținem $x = 2 \in [-1, \infty)$.	2p 3p
4.	Cifra miilor se poate alege în trei moduri și pentru fiecare alegere a cifrei miilor, cifra sutelor se poate alege în trei moduri iar cifra zecilor se poate alege în două moduri și cifra unităților se poate alege într-un singur mod. Deci obținem $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ numere.	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ $\overrightarrow{AB} = (x_B + 2)\vec{i} + (y_B - 3)\vec{j} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ $(x_B + 2) = 4$, $x_B = 2$ și $(y_B - 3) = -5$, $y_B = -2$ deci $B(2, -2)$	2p 3p
6.	$T_{\sin} : \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ Se obține $\frac{8}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 16 = 2R \Rightarrow R = 8$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.	$\det(M(1)) = \begin{vmatrix} 4-1 & 2 \\ 2 & 4-1 \end{vmatrix}$	2p
a)	$\det(M(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$	3p
b)	$M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ 2 & 4-a \end{pmatrix}, M(-a) = \begin{pmatrix} 4+a & 2 \\ 2 & 4+a \end{pmatrix}$ $M(a) + M(-a) = \begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ 2 & 4-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4+a & 2 \\ 2 & 4+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $2M(0) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ <i>Rezultă că $M(a) + M(-a) = 2M(0)$ pentru orice număr real a.</i>	2p 3p
c)	$M(x) \cdot M(x) = \begin{pmatrix} 4-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4-x)^2 + 4 & 4(4-x) \\ 4(4-x) & (4-x)^2 + 4 \end{pmatrix}$ $kM(2) = k \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 2k \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$ $M(x) \cdot M(x) = kM(2)$ deci $(4-x)^2 + 4 = 4(4-x)$, $16 - 8x + x^2 + 4 = 16 - 4x$ $x^2 - 4x + 4 = 0$ deci $(x-2)^2 = 0$ deci $x = 2$, $2k = 8$ deci $k = 4$	=02p 3p
2.	$(-1) * 2 = 4 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 2$	2p
a)	$(-1) * 2 = -8 - 2 + 4 + 2 = -4$	3p
b)	$x * y = 4xy + 2x + 2y + 2 = 2x(2y + 1) + (2y + 1) + 1 \Rightarrow$ $x * y = (2x + 1)(2y + 1) + 1$ $x * x = (2x + 1)^2 + 1 = 10$, $(2x + 1)^2 = 9$ $2x + 1 = 3$ sau $2x + 1 = -3$. Obținem $x = 1$ sau $x = -2$.	2p 3p
c)	$\left(\frac{1}{n} - 1\right) * (n) = \left(2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + 1\right)(2n + 1) + 1 = 1$. $\left(\frac{2}{n} - 1\right)(2n + 1) = 0$, $n = 2$ sau $n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ Deci $n = 2$.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.	$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2}$	2p
a)	$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.	3p
b)	Ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = e$ este : $y - f(e) = f'(e)(x - e)$. $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$, $f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = 0$ Ec.tg. : $y - \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{e}$.	2p 3p

c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$ $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0, e] \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe intervalul } (0, e]$ $f'(x) \leq 0, \forall x \in [e, \infty) \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe intervalul } [e, \infty).$ $f(e) = \frac{1}{e} \text{ este valoarea maximă a funcției } f.$ $f(x) = \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow e \ln x \leq x, \forall x \in (0, \infty)$	2p 3p
2.a)	$\int f(x) dx = \int (7x^2 + 2x + 5) dx = 7 \int x^2 dx + 2 \int x dx + 5 \int 1 dx =$ $= 7 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot x = 7 \cdot \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}.$	2p 3p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F \text{ este primitiva lui } f, F'(x) = f(x) = 7x^2 + 2x + 5 > 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} (a = 7 > 0, \Delta < 0) \Rightarrow F \text{ este crescătoare pe } \mathbb{R}$	3p 2p
c)	$g(x) = \frac{1}{f(x) - 2x + 2} = \frac{1}{7x^2 + 7} = \frac{1}{7(x^2 + 1)}$ O primitivă G a funcției g este de forma $G(x) = \frac{1}{7} \cdot \arctg x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $G(0) = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow G(x) = \frac{1}{7} \cdot \arctg x.$	1p 2p 2p