

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 4$ și $a_2 = 15$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(2) = 2a$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(2 + x)$. |
| 5p | 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(8,4)$ și C , mijlocul segmentului OB . Arătați că $AO = AC$. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 4$ și $\cos B = \frac{2}{3}$. Arătați că $BC = 6$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 2$. |
| 5p | b) Arătați că matricea $B = \frac{1}{2}(I_2 - A)$ este inversa matricei A . |
| 5p | c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $(A - I_2) \cdot X = 2A$. |
| | 2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = x + y - \sqrt{xy}$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 4 = 3$. |
| 5p | b) Determinați $x \in M$ pentru care $x * (9x) = x^2$. |
| 5p | c) Determinați numărul real x pentru care $2^x * 2^{x+2} = 6^x$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + x + 2}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{-3x^2 - x + 2}{(x^2 + x + 2)^2 \sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox . |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x + 3$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - 3x - 3) dx = 4$. |
| 5p | b) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^3)^2} dx = \frac{1}{18}$. |

5p	c) Determinați numărul real m pentru care $\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2} \cdot \ln x \, dx = \frac{e^2+m}{4}$.
-----------	--

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_2 - a_1 = 11$, unde r este rația progresiei $a_3 = a_2 + r = 26$	3p 2p
2.	$f(2) = 4$, $f(a) = 3a - 2$, pentru orice număr real a $3a - 2 + 4 = 2a$, de unde obținem $a = -2$	2p 3p
3.	$x^2 - 3x + 2 = 2 + x$, de unde obținem $x^2 - 4x = 0$ $x = 0$ sau $x = 4$, care convin	2p 3p
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $2 \cdot 5 = 10$ numere	2p 3p
5.	$C(4, 2)$ $AO = 5$, $AC = 5$, deci $AO = AC$	2p 3p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC}$, deci $\frac{2}{3} = \frac{4}{BC}$ $BC = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 - 8 \cdot (-1) =$ $= -6 + 8 = 2$	3p 2p
b)	$I_2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = B \cdot A = I_2$, deci matricea B este inversa matricei A	3p 2p
c)	Cum $A - I_2 = -2A^{-1}$, obținem $-2A^{-1} \cdot X = 2A$, deci $X = -A \cdot A$ $X = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$1 * 4 = 1 + 4 - \sqrt{1 \cdot 4} =$ $= 5 - 2 = 3$	3p 2p
b)	$x * (9x) = x + 9x - \sqrt{9x^2} = 7x$, pentru orice $x \in M$ $7x = x^2$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 7$, care convin	2p 3p
c)	$2^x * 2^{x+2} = 2^x + 2^{x+2} - 2^{x+1} = 2^x \cdot 3$, pentru orice număr real x $2^x \cdot 3 = 6^x$, deci $3^x = 3$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x^2 + x + 2) - 2\sqrt{x}(2x + 1)}{(x^2 + x + 2)^2} =$ $= \frac{x^2 + x + 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2 + x + 2)^2 \sqrt{x}} = \frac{-3x^2 - x + 2}{(x^2 + x + 2)^2 \sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
		2p
c)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0, a \in (0, +\infty)$ $\frac{-3a^2 - a + 2}{(a^2 + a + 2)^2 \sqrt{a}} = 0, \text{ de unde obținem } a = -1, \text{ care nu convine, sau } a = \frac{2}{3}, \text{ care convine}$	3p
		2p
2.a)	$\int_0^2 (f(x) - 3x - 3) dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^2 =$ $= 4 - 0 = 4$	3p
		2p
b)	$\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^3)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(3x + 3)'}{(3x + 3)^2} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x + 3} \Big _0^1 =$ $= -\frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$	3p
		2p
c)	$\int_1^e \frac{f(x) - 3}{x^2} \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \cdot \ln x dx + \int_1^e \frac{3 \ln x}{x} dx = \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big _1^e + \frac{3 \ln^2 x}{2} \Big _1^e = \frac{e^2 + 7}{4}$ $\frac{e^2 + m}{4} = \frac{e^2 + 7}{4}, \text{ de unde obținem } m = 7$	3p
		2p