

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\frac{1}{10} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(2) = a + f(0)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x} = 5^{3-x}$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $6n > 25$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 0)$, $B(2, 1)$ și $C(6, 4)$. Determinați numărul real a pentru care $BC = a \cdot AB$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul MNP , dreptunghic în M , cu $MN = 4 \cdot MP$ și $MN = 8$. Arătați că aria triunghiului MNP este egală cu 8.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $3A - 5I_2 = xB$.
- 5p** c) Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $\det(A \cdot (B - A) + xI_2) \leq 2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + X + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 1$, arătați că $f(1) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 + x_1x_2x_3$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Știind că restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 2$ este -5 , arătați că f este divizibil cu polinomul $X^2 + 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3-x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $-e^{x-1} \leq x - 2 \leq e^{x-3}$, pentru orice $x \in [1, 4]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 8$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x^2 - 8) dx = 2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^8 \frac{x}{f(x) - 4x} dx = \ln 3$.

5p	c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^a \frac{1}{f(x)-4} dx = \frac{1}{4}$.
-----------	--

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{10} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} =$ $= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$	3p 2p
2.	$f(2) = 9, f(0) = -3$ $9 = a - 3$, de unde obținem $a = 12$	2p 3p
3.	$2x = 3 - x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea A sunt 5 numere n pentru care $6n > 25$, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	2p 3p
5.	$BC = 5$ $AB = 1$ și, cum $BC = 5 \cdot AB$, obținem $a = 5$	2p 3p
6.	$MP = 2$ $\mathcal{A}_{\triangle MNP} = \frac{MN \cdot MP}{2} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 =$ $= 5 - 4 = 1$	3p 2p
b)	$3A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2B$ $2B = xB$, de unde obținem $x = 2$	3p 2p
c)	$A \cdot (B - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot (B - A) + xI_2 = \begin{pmatrix} 2+x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, $\det(A \cdot (B - A) + xI_2) = x^2 + 2x - 1$, pentru orice număr real x $x^2 + 2x - 1 \leq 2$, deci $x^2 + 2x - 3 \leq 0$, de unde obținem $x \in [-3, 1]$	3p 2p
2.a)	$f = X^3 - 3X^2 + X + 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 1 =$ $= 1 - 3 + 1 + 1 = 0$	3p 2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1 x_2 x_3 = -m$, deci $2 \cdot 3 = 1 - m$ $m = -5$	3p 2p

c)	$f(2) = -2 + m$, deci $-2 + m = -5$, de unde obținem $m = -3$	3p
	$f = X^3 - 3X^2 + X - 3 = (X - 3)(X^2 + 1)$, de unde rezultă că polinomul f este divizibil cu $X^2 + 1$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2} =$	3p
	$= \frac{e^x(1-x+2)}{(e^x)^2} = \frac{3-x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(0) = -2, f'(0) = 3$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 3x - 2$	3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$; pentru orice $x \in [1, 3]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, 3]$ și, pentru orice $x \in [3, 4]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[3, 4]$	2p
	$f(1) = -\frac{1}{e}, f(3) = \frac{1}{e^3}$ și $f(4) = \frac{2}{e^4}$, deci $-\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^3}$, pentru orice $x \in [1, 4]$, de unde obținem $-e^{x-1} \leq x - 2 \leq e^{x-3}$, pentru orice $x \in [1, 4]$	3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - x^2 - 8) dx = \int_0^1 4x dx = 2x^2 \Big _0^1 =$	3p
	$= 2 - 0 = 2$	2p
b)	$\int_0^8 \frac{x}{f(x) - 4x} dx = \int_0^8 \frac{x}{x^2 + 8} dx = \frac{1}{2} \int_0^8 \frac{(x^2 + 8)'}{x^2 + 8} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 8) \Big _0^8 =$	3p
	$= \frac{\ln 72}{2} - \frac{\ln 8}{2} = \ln 3$	2p
c)	$\int_0^a \frac{1}{f(x) - 4} dx = \int_0^a \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} \Big _0^a = -\frac{1}{a+2} + \frac{1}{2}$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	3p
	$-\frac{1}{a+2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, de unde obținem $a = 2$	2p