

**Examenul național de bacalaureat 2025**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Varianta 3**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați termenul  $a_3$  al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , în care  $a_1 = 3$  și  $a_2 = 9$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 5$ . Arătați că  $f(3) + f(2) + f(0) = 0$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{9x - 5} = 2$ .
- 5p** 4. După o ieftinire cu 30%, un obiect costă 56 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,1)$ ,  $B(5,6)$  și  $C(7,2)$ . Arătați că  $AB = AC$ .
- 5p** 6. Arătați că  $(\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ) \cdot (\sin 45^\circ)^2 = 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 2x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = 5$ .
- 5p** b) Arătați că  $A + 3I_2 = 2B(1)$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $\det(B(2x) - B(x) \cdot A) = x^2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 8x - 8y + 8$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 * 1 = 0$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x * 2 = 2x$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale, cu  $m < n$ , pentru care  $(8 + m) * (8 + n) = 2$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4x+7}{x+4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{9}{(x+4)^2}$ ,  $x \in (-4, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Determinați  $a \in (-4, +\infty)$ , știind că panta tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(a, f(a))$  este egală cu 1.
2. Se consideră funcția  $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + \sqrt{x+3}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^2 (f(x) - \sqrt{x+3}) dx = 3$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_1^6 \frac{1}{f(x) - 2x} dx = 2$ .
- 5p** c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției  $g: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{x}{f(x) - 2x}$ , în jurul axei  $Ox$  este egal cu  $9\pi \ln 3$ .

**Examenul național de bacalaureat 2025**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$   
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 3**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                |                        |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.</b> | $r = a_2 - a_1 = 6$ , unde $r$ este rația progresiei aritmetice<br>$a_3 = a_2 + r = 15$                                                                                                                                                                                        | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.</b> | $f(3) = 4$ , $f(2) = 1$ , $f(0) = -5$<br>$f(3) + f(2) + f(0) = 4 + 1 - 5 = 0$                                                                                                                                                                                                  | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>3.</b> | $9x - 5 = 4$<br>$x = 1$ , care convine                                                                                                                                                                                                                                         | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>4.</b> | $x - \frac{30}{100} \cdot x = 56$ , unde $x$ este prețul înainte de ieftinire<br>$x = 80$ de lei                                                                                                                                                                               | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>5.</b> | $AB = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$<br>$AC = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$ , deci $AB = AC$                                                                                                                                                                                    | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>6.</b> | $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$<br>$(\sin 30^\circ + 3 \cos 60^\circ) \cdot (\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                        |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) =$<br>$= 1 + 4 = 5$                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$<br>$= 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2B(1)$                                                                                                                                        | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $B(2x) = \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ -1 & 4x \end{pmatrix}$ , $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 2-2x & 4+x \\ -1-4x & -2+2x \end{pmatrix}$ , $B(2x) - B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 2x & x-4 \\ 4x & 2x+2 \end{pmatrix}$ , de<br>unde obținem $\det(B(2x) - B(x) \cdot A) = 20x$ , pentru orice număr real $x$<br>$20x = x^2$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = 20$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.a)</b> | $0 \cdot 1 = 0 \cdot 1 - 8 \cdot 0 - 8 \cdot 1 + 8 =$<br>$= 0 - 0 - 8 + 8 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $x \cdot 2 = -6x - 8$ , pentru orice număr real $x$<br>$-6x - 8 = 2x$ , de unde obținem $x = -1$                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>3p</b><br><b>2p</b> |

|           |                                                                                                                                      |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>c)</b> | $(8+m) \cdot (8+n) = mn - 56$ , pentru orice numere naturale $m$ și $n$                                                              | <b>2p</b> |
|           | $mn - 56 = 2 \Leftrightarrow mn = 58$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, cu $m < n$ , obținem perechile $(1, 58)$ și $(2, 29)$ | <b>3p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                |           |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = \frac{4(x+4) - (4x+7)}{(x+4)^2} =$                                                                                                                    | <b>3p</b> |
|             | $= \frac{4x+16-4x-7}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2}, x \in (-4, +\infty)$                                                                                        | <b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+7}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = 4$ | <b>3p</b> |
|             | Dreapta de ecuație $y = 4$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$                                                                   | <b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $f'(a) = 1$                                                                                                                                                    | <b>2p</b> |
|             | $\frac{9}{(a+4)^2} = 1$ , deci $(a+4)^2 = 9$ și, cum $a \in (-4, +\infty)$ , obținem $a = -1$                                                                  | <b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_1^2 (f(x) - \sqrt{x+3}) dx = \int_1^2 2x dx = x^2 \Big _1^2 =$                                                                                           | <b>3p</b> |
|             | $= 4 - 1 = 3$                                                                                                                                                  | <b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_1^6 \frac{1}{f(x) - 2x} dx = \int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = 2 \int_1^6 \frac{(x+3)'}{2\sqrt{x+3}} dx = 2\sqrt{x+3} \Big _1^6 =$                      | <b>3p</b> |
|             | $= 6 - 4 = 2$                                                                                                                                                  | <b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}, x \in [0, 6]$ , deci $V = \pi \int_0^6 (g(x))^2 dx = \pi \int_0^6 \frac{x^2}{x+3} dx =$                                          | <b>2p</b> |
|             | $= \pi \int_0^6 \left( x - 3 + \frac{9}{x+3} \right) dx = \pi \left( \frac{x^2}{2} \Big _0^6 - 3x \Big _0^6 + 9 \ln(x+3) \Big _0^6 \right) = 9\pi \ln 3$       | <b>3p</b> |