Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $2i(6-i)+3(1-4i)=5$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ f)(a)=2a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+4x-4}=x\sqrt{2}$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, numărul 2^n să fie divizibil cu 16.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(2,4)$. Arătați că triunghiul OAB este dreptunghic în A.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+2\cos 2x+2\sin^2\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Arătați că $A(-1)\cdot A(x)=A(-2x-1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m<n$, pentru care $A(-1)\cdot(A(m)+A(n))=2A(-4)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x\cdot 3^y+y\cdot 3^x$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 2=15$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul real nenul x pentru care $x\circ(3x)=(2x)\circ(2x)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x^2+x)}{(x^2+3x+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)-f(y)\le\frac{3-e}{3e}$, pentru orice numere reale x și y, cu $x\le 0\le y$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+1+3x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x)-3x\ln x)\,dx=7$.

5p	**b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)-4x-1}{x}dx = 3$.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_2^4 \frac{f(x)-1}{x^2 \ln x}dx = a\ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2i(6-i)+3(1-4i)=12i-2i^2+3-12i=$	**3p**
	$=-2(-1)+3=5$	**2p**
2.	$f(a)=a+5$, $(f\circ f)(a)=a+10$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a+10=2a$, de unde obținem $a=10$	**2p**
3.	$x^2+4x-4=2x^2$, de unde obținem $x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	2^n este divizibil cu 16 dacă și numai dacă $n\geq 4$, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$	**3p**
5.	$m_{OA}=\frac{1}{3}$	**2p**
	$m_{AB}=-3$, deci $m_{OA}\cdot m_{AB}=-1$, de unde obținem că triunghiul OAB este dreptunghic în A	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\pi=-1$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+2\cdot(-1)+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1-2+2\cdot\frac{2}{4}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-(-1)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$A(-1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $A(-1)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}-2x & 2x+1\\ 4x+2 & -4x-1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}(-2x-1)+1 & -(-2x-1)\\ -2(-2x-1) & 2(-2x-1)+1\end{pmatrix}=A(-2x-1)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(-1)\cdot(A(m)+A(n))=A(-2m-1)+A(-2n-1)=2A(-m-n-1)$, pentru orice numere reale m și n	**3p**
	$2A(-m-n-1)=2A(-4)$, de unde obținem $m+n=3$ și, cum m și n sunt numere naturale, cu $m<n$, perechile sunt $(0,3)$ și $(1,2)$	**2p**
2.a)	$1\circ 2=1\cdot 3^2+2\cdot 3^1=$	**3p**
	$=1\cdot 9+2\cdot 3=15$	**2p**

b)	$x \circ 0 = x \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^x = x \cdot 1 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0 \circ x = 0 \cdot 3^x + x \cdot 3^0 = x \cdot 1 = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	**3p**
c)	$x \circ (3x) = x \cdot 3^x \left(3^{2x} + 3\right)$, $(2x) \circ (2x) = 4x \cdot 3^{2x}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x \cdot 3^x \left(3^{2x} + 3\right) = 4x \cdot 3^{2x}$, deci $x \cdot 3^x \left(3^x - 3\right)\left(3^x - 1\right) = 0$ și, cum x este număr real nenul, obținem $x = 1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{e^x\left(x^2+3x+3\right) - e^x(2x+3)}{\left(x^2+3x+3\right)^2} =$	**3p**
	$= \dfrac{e^x\left(x^2+3x+3-2x-3\right)}{\left(x^2+3x+3\right)^2} = \dfrac{e^x\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+3x+3\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+3x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+3x+3\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x+3} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(e^x\right)'}{(2x+3)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$	**2p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 0$; pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$, pentru orice $x \in [-1, 0]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$ și, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	**2p**
	$x \in (-\infty, 0]$, deci $f(x) \leq f(-1)$ și $y \in [0, +\infty)$, deci $f(y) \geq f(0)$ și, cum $f(-1) = \dfrac{1}{e}$ și $f(0) = \dfrac{1}{3}$, obținem $f(x) - f(y) \leq \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{3}$, deci $f(x) - f(y) \leq \dfrac{3-e}{3e}$, pentru orice numere reale x și y, cu $x \leq 0 \leq y$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) - 3x\ln x\right)dx = \int_1^2 (4x+1)\,dx = \left(2x^2 + x\right)\Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= 8 + 2 - (2+1) = 7$	**2p**
b)	$\int_1^e \dfrac{f(x) - 4x - 1}{x}dx = \int_1^e 3\ln x\,dx = \int_1^e (3x)'\ln x\,dx = 3x\ln x\Big\vert_1^e - 3x\Big\vert_1^e =$	**3p**
	$= 3e - 3e + 3 = 3$	**2p**
c)	$\int_2^4 \dfrac{f(x) - 1}{x^2 \ln x}dx = \int_2^4 \dfrac{4x + 3x\ln x}{x^2 \ln x}dx = \int_2^4 \dfrac{4}{\ln x} \cdot (\ln x)'\,dx + 3\int_2^4 \dfrac{1}{x}dx = 4\ln(\ln x)\Big\vert_2^4 + 3\ln x\Big\vert_2^4 =$	**3p**
	$= 7\ln 2$, deci $a\ln 2 = 7\ln 2$, de unde obținem $a = 7$	**2p**