CONCURSUL NAȚIONAL OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

Etapa județeană – 15 martie 2025
Clasa a VIII-a

Barem de corectare
Problema 1: (7 puncte)

a) **Atătați că $x^2+90x+2026$ este mai mare decât $0,2025$ pentru orice valoare reală a lui x.**

b) **Determinați suma pătratelor numerelor reale a și b pentru care**

A=$\sqrt{9a^2+12b^2+30a-\sqrt{4800}b+2025}$ are valoare minimă.

Soluție:

a) $x^2+90x+2025+1=(x+45)^2+1$ 1p

$(x+45)^2 \geq 0$ pentru orice x număr real, rezultă $(x+45)^2+1>0{,}2025$..............1p

b) Condiția de existență $9a^2+12b^2+30a-\sqrt{4800}b+2025 \geq 0$

$$9a^2+30a+25+12b^2-40\sqrt{3}b+100+1900 \geq 0$$

$(3a+5)^2+(2\sqrt{3}b-10)^2+1900 \geq 0$ pentru orice numere reale a și b 2p

Valoarea minima pentru A se atinge pentru $(3a+5)^2=0$ și $(2\sqrt{3}b-10)^2=0$.........1p

Obținem $a=-\frac{5}{3}, b=\frac{5\sqrt{3}}{3}$, ...1p

Suma pătratelor numerelor a și b este $a^2+b^2=\frac{100}{9}$...1p

Problema 2: (7 puncte)

Fie $A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ și

$B=\frac{n(n-90)}{2025}+1$.

Determinați n astfel încât $A=\sqrt{B}$

Soluție:

$A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{2-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{3-2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{4-3}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ 1p

$=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-1$ 1p

$B=\frac{n(n-90)}{2025}+1=\frac{n^2-90n+2025}{2025}=\frac{n^2-90n+2025}{2025}=\frac{(n-45)^2}{45^2}$,

$A=\sqrt{B} \Rightarrow \sqrt{n}-1=\sqrt{\frac{(n-45)^2}{45^2}} \Rightarrow \sqrt{n}-1=\frac{|n-45|}{45}$ 1p

Cazul I $n-45<0 \Rightarrow \sqrt{n}-1=-\frac{n-45}{45} \Rightarrow 45\sqrt{n}-45=-n+45 \Rightarrow 45\sqrt{n}+n=90$ 1p

$4 \leq n<45$ și $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{4,9,16,25,36\}$ nu avem soluție...1p

Cazul II $n-45 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{n}-1=\frac{n-45}{45} \Rightarrow 45\sqrt{n}-45=n-45 \Rightarrow 45\sqrt{n}-n=0$ 1p

$\sqrt{n}=45 \Rightarrow n=2025$..1p

Problema 3: (7 puncte)

Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} |x-2024|+|y-2025|=4 \\ y=2025+|2024-x| \end{cases}.$$

Soluție: Din $y=2025+|2024-x| \Rightarrow y \geq 2025 \ \Rightarrow |y-2025|=y-2025, pentru\ y \in \mathbb{R}$ 2p

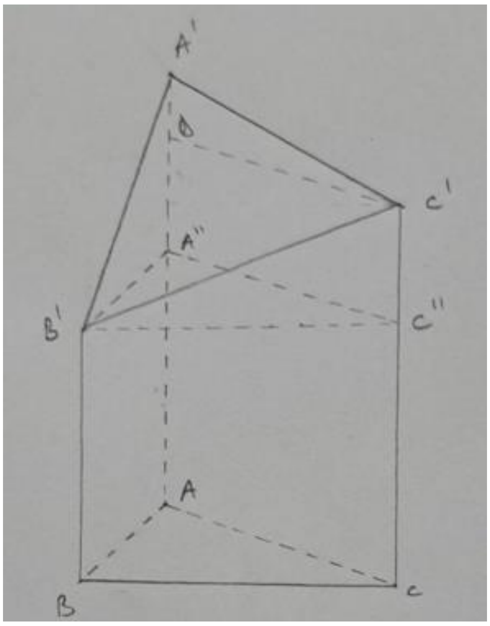
$|2024-x|=|x-2024|=y-2025$,...1p

Înlocuind în prima relație obținem $2(y-2025)=4 \Rightarrow y=2027$..2p

Din $|x-2024|=y-2025$, y=2027 $\Rightarrow |x-2024|=2 \Rightarrow x \in \{2022,2026\}$.............................2p

Problema 4: (7 puncte)

Fie ΔABC dreptunghic în A cu $AB=3\ cm$ și $AC=4\ cm$. Se ridică perpendicularele AA', BB' și CC' pe planul triunghiului ΔABC astfel încât punctele A', B' și C' sunt de aceeași parte a planului și $AA'=12cm$, $BB'=6\ cm$ și $CC'=8\ cm$.



a) **(3p) Calculați $A'B'^2+B'C'^2+A'C'^2$.**

b) **(4p) Determinați tangenta unghiului format de dreapta $A'B'$ și planul (ACC').**

Soluție: Fie $A" \in AA', C" \in CC'$ astfel încât $AA"=CC"=BB'=6\ cm \Rightarrow A'A"$= 6 cm, C'C" $=2\ cm$

$D \in (A"A')$ astfel încât $AD=CC'=8 \ \Rightarrow A'D=4\ cm$ 1p

a) Din $\Delta B'C"C'$ dreptunghic în $C" \Rightarrow B'C'^2=29$

Din $\Delta A'A"B'$ dreptunghic în $A" \Rightarrow A'B'^2=45$

Din $\Delta C'DA'$ dreptunghic în $D \Rightarrow A'C'^2=32$ 1p

$A'B'^2+B'C'^2+A'C'^2=106$...1p

b) $ABCA$"B'C" prismă triunghiulară dreaptă cu baza triunghi dreptunghic...... .....1p

$B'A" \perp A"C", B'A" \perp AA" \Rightarrow B'A" \perp$(A'AC) 1p

$\sphericalangle(A'B',(ACC'))=\sphericalangle(A'B',pr_{(ACC')}A'B')=\sphericalangle(A'B',A'A")$.....................1p

$\Delta A'A"B'$ dreptunghic în $A"$, A'A" $=6\ cm, B'A"=BA=3cm$

$tg\sphericalangle(A'B',(ACC'))=tg\sphericalangle(A'B',A'A")$=tg∢(B'A'A") $=\frac{B'A"}{A'A"}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$...........1p

Notă:

Fiecare probleme se punctează cu puncte de la 0 la 7.

Orice soluție corectă diferită de soluția propusă se punctează corespunzător.