CONCURSUL NAȚIONAL OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

Etapa județeană – 15 martie 2025
Clasa a VII-a

Barem de corectare

Problema 1:

Arătați că, dacă $\sqrt{\overline{20xy}}$ este număr natural, atunci și $\sqrt{\overline{xy}}$ este număr natural, unde x și y sunt cifre nenule din sistemul zecimal.

$1936 < \overline{20xy} < 2116 \Rightarrow \sqrt{1936} < \sqrt{\overline{20xy}} < \sqrt{2116}$ ....(2p)

$44 < \sqrt{\overline{20xy}} < 46$ ....(1p)

$\sqrt{\overline{20xy}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{\overline{20xy}} = 45 \Rightarrow \overline{20xy} = 45^2 = 2025$ ....(2p)

$\overline{xy} = 25 \Longrightarrow \sqrt{\overline{xy}} = 5 \in \mathbb{N}$..(2p)

Problema 2:

Determinați $m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât $mn + np + pm \geq m^2 + n^2 + p^2$ și $\frac{m+n+p}{3} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3$.

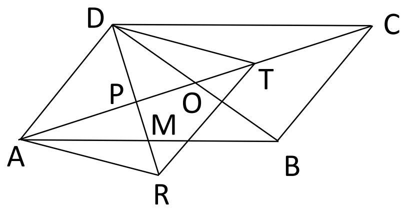
$mn + np + pm \geq m^2 + n^2 + p^2 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2mn + 2np + 2pm \geq 2m^2 + 2n^2 + 2p$.(1p)
$<=> 0 \geq m^2 - 2mn + n^2 + n^2 - 2np + p^2 + p^2 - 2pm + m^2$ ....(1p)
$<=> 0 \geq (m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-m)^2$...(1p)
$<=> m - n = n - p = p - m = 0 <=> m = n = p$ ....(1p)
Dar $\frac{m+n+p}{3} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3 => m = n = p = 1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3$ ....(1p)
$1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3 = (1 + 2 + \ldots + 9)^2 = \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^2 = 45^2 = 2025$ ....(1p)
$=> m = n = p = 2025.$ Răspuns: $m = n = p = 2025$. . ...(1p)

Problema 3:

Fie paralelogramul ABCD și M mijlocul laturii AB. Diagonala AC intersectează DM în punctul P.

a) Dacă aria paralelogramului ABCD este de 144 cm^2, calculați aria triunghiului ADP.

b) Dacă R este simetricul lui P față de M și DT$\parallel$AR, T∈AC, să se arate că AD$\parallel$RT.



a) Fie AC∩BD = $\{O\}$, $A_{\text{ADO}} = \frac{1}{4}A_{\text{ABCD}} = \frac{1}{4}\cdot 144 = 36cm^2$.......................(1p)

P este centru de greutate în triunghiul ADB...(1p)

$A_{ADP} = \frac{2}{3}A_{\text{ADO}} = \frac{2}{3}36cm^2 = 24\ cm^2$..(1p)

b) $\begin{matrix}\text{P este centru de greutate în triunghiul ADB} \\ R\ simetricul\ lui\ P\ fata\ de\ punctul\ M\end{matrix} \Rightarrow$ PR=DP= $\frac{2}{3}$DM ....(1p)

$\begin{matrix}\triangle\text{DPT} \\ \triangle\text{ RPA}\end{matrix}\begin{cases}\sphericalangle DPT \equiv \sphericalangle RPA \\ DP \equiv RP \\ \sphericalangle PDT \equiv \sphericalangle PRA\end{cases}$ =>△DPT≡△ RPA (U.L.U.) ⟹DT=AR...............(2p)

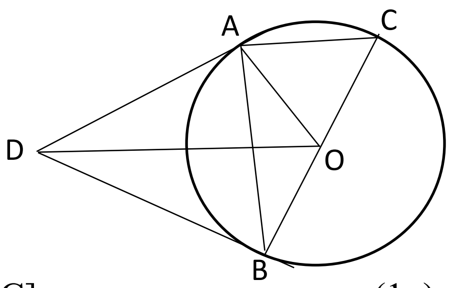
ADTR- paralelogram ⟹AD‖TR..(1p)

Problema 4:

Fie cercul $\mathcal{C}(O;R)$ și punnctul D ∈ Ext. $\mathcal{C}(O;R)$. Ducem tangentele din punctul D la cercul $\mathcal{C}(O;R)$ care intersectează cercul în punctele A și B. Fie C ∈ $\mathcal{C}(O;R)$ astfel încât BC este diametru. Știm că AC = AO și ACBD patrulater convex.

a) Calculați m($\sphericalangle ABC$).

b) Arătați că m($\sphericalangle ABC$) = $m(\sphericalangle ODC)$.



a) BC- diametru => O- mijlocul segmentului [BC]. ....(1p)

ΔABC- dreptunghic în A, AC = AO = $\frac{BC}{2}$ = CO => ΔAOC- echilateral

=> $m(\sphericalangle ACO) = 60^0$. ....(1p)

$\begin{cases}m(\sphericalangle ACB) = 60^0 \\ m(\sphericalangle BAC) = 90^0\end{cases}$ => $m(\sphericalangle ABC) = 30^0$. ....(1p)

b) $\begin{matrix}\Delta ADO \\ \Delta BDO\end{matrix}\begin{cases}AO = BO \\ DO = DO \\ \sphericalangle DAO \equiv \sphericalangle DBO = 90^0\end{cases} \overset{IC}{\Longrightarrow} \Delta ADO \equiv \Delta BDO$ ....(1p)

ΔAOB-isoscel => $m(\sphericalangle AOB) = 180^0 - 30^0 - 30^0 = 120^0$ ....(1p)

$\overset{\sphericalangle DOA \equiv \sphericalangle DOB}{\underset{\sphericalangle DOA + \sphericalangle DOB = 120^0}{\Longrightarrow}}$ $m(\sphericalangle DOB) = 60^0$. ....(1p)

$m(\sphericalangle DOB) = 60^0 \Rightarrow m(\sphericalangle ODB) = 30^0 = m\ (\sphericalangle ABC)$..........................(1p)