CONCURSUL NAȚIONAL OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

Etapa județeană – 15 martie 2025

Clasa a VI a

BAREM

Problema 1

Aflați trei numere naturale nenule *a, b, c* mai mici sau egale cu 9 astfel încât

$\overline{a,(b)} + \overline{b,(c)} + \overline{c,(a)} = 20$, $\overline{a,b} + \overline{b,a} = 11$ **și** $\overline{b,c} + \overline{c,b} = 11$.

Soluție:

$\frac{9a+b}{9} + \frac{9b+c}{9} + \frac{9c+a}{9} = 20$ 1p

$\frac{10a+b}{10} + \frac{10b+a}{10} = 11$ 1p

$\frac{10b+c}{10} + \frac{10c+b}{10} = 11$..1p

$10a + 10b + 10c = 180$

$11a + 11b = 110$

$11b + 11c = 110$

$a + b + c = 18$..1p

$a + b = 10$..1p

$b + c = 10$ 1p

$a = 8;\ \ b = 2;\ \ c = 8;$...1p

Problema 2

Determinați numerele naturale p, q, r, cu proprietățile p, q, r prime, $p > q > r$,

$p = q + 3r$ **și** $\frac{q^2-7r}{3r+1} \in \mathbb{N}$.

Soluție:

$\left.\begin{matrix} p = q + 3r \\ p > q > r \end{matrix}\right\} \Rightarrow p, q$ impare..2p

$\left.\begin{matrix} 3r = p - q \in \mathcal{M}_2 \Rightarrow 2|3r \Rightarrow 2|r \\ r \text{ număr prim} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = 2$..2p

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \frac{q^2-14}{7} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{q^2}{7} \in \mathbb{N} \Rightarrow 7|q^2 \Rightarrow 7|q \\ q \text{ număr prim} \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 7$..2p

$\Rightarrow p = 13$..1p

Problema 3

Să se determine măsura unghiului $\sphericalangle AOB$, știind că raportul dintre complementul său și suplementul său este egal cu cel mai mare număr rațional exprimat de fracția $\frac{\overline{3x}}{\overline{abc}}$, unde $\overline{3x}$ este număr prim care divide $\overline{abc}$.

Soluție:

Cum $\overline{3x}$ este număr prim $\Longrightarrow \overline{3x} \in \{31, 37\}$..1p

Dacă $\overline{3x} = 31$, cum $\overline{3x}/\overline{abc} \Longrightarrow \overline{abc} = \overline{3x} \cdot A, unde\ A \in \{4,5,6,\ldots,32\}$............1p

Dacă $\overline{3x} = 37, cum\ \overline{3x}/\overline{abc} \Longrightarrow \overline{abc} = \overline{3x} \cdot B,\ unde\ B \in \{3,4,5,\ldots,27\}$.........1p

Cel mai mare număr rațional exprimat de fracția $\frac{\overline{3x}}{\overline{abc}}$, unde $\overline{3x}$ este număr prim care divide $\overline{abc}$ este $\frac{37}{37\cdot 3} = \frac{1}{3}$. 2p

Notăm măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ cu $x \Longrightarrow \frac{90^\circ - x}{180^\circ - x} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow 270^\circ - 3x = 180^\circ - x \Longleftrightarrow 90^\circ = 2 \cdot x \Longrightarrow x = 45^\circ$. 2p

Problema 4

Fie M mulțimea triunghiurilor care au măsurile unghiurilor numere naturale direct proporționale cu trei numere naturale consecutive. Aflați numărul de elemente ale mulțimii M.

Soluție:

Notăm cu x, y și z măsurile unghiurilor

$\frac{x}{a-1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} = \frac{x+y+z}{3a} = \frac{60°}{a}$...2p

Din $\frac{y}{a} = \frac{60°}{a} \Rightarrow y = 60°$..2p

Din $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a-1} = \frac{60°}{a} \Rightarrow x = 60° - \frac{60°}{a} \\ x \text{ număr natural}, \text{a} \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \in \{2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$..........2p

Mulțimea M are 11 elemente..1p