

## CONCURSUL NAȚIONAL OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

Etapa județeană – 15 martie 2025

Clasa a -V-a

## Barem de corectare

## Problema 1.

Găsiți cel mai mic număr natural care dă restul 3 prin împărțirea la 13 și restul 7 prin împărțirea la 17.

## Soluție:

Fie  $n \in N$ , numărul căutat. Conform teoremei de împărțire cu rest avem:  $\begin{cases} n = 13c_1 + 3 \\ n = 17c_2 + 7 \end{cases}$  ..... (2p)

$$\Leftrightarrow 13c_1 + 3 = 17c_2 + 7 \quad /-3$$

$$\Leftrightarrow 13c_1 = 17c_2 + 4 \quad /-13c_2$$

$$\Leftrightarrow 13c_1 - 13c_2 = 4c_2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 13(c_1 - c_2) = 4(c_2 + 1) \text{ ..... (2p)}$$

$$\text{Din } 13(c_1 - c_2) = 4(c_2 + 1) \Rightarrow \begin{cases} 13 / 4(c_2 + 1) \\ 13, 4 \text{ sunt prime între ele} \end{cases} \Rightarrow 13 / (c_2 + 1) \Rightarrow$$

$$\text{cea mai mică valoare pentru } c_2 + 1 = 13 \Rightarrow c_2 \text{ minim} = 12 \text{ ..... (2p)}$$

$$n = 17 \cdot 12 + 7 = 211 \text{ ..... (1p)}$$

## Problema 2.

Arătați că numărul  $A = 625^{506} + 3 \cdot 5^{2023} + 24 \cdot 125^{674}$  este pătrat perfect și cub perfect .

## Soluție:

$$A = 625^{506} + 3 \cdot 5^{2023} + 24 \cdot 125^{674} = (5^4)^{506} + 3 \cdot 5^{2023} + 24 \cdot (5^3)^{674} \text{ ..... (2p)}$$

$$A = 5^{2024} + 3 \cdot 5^{2023} + 24 \cdot 5^{2022} \text{ ..... (1p)}$$

$$A = 5^{2022}(5^2 + 3 \cdot 5 + 24) \text{ ..... (1p)}$$

$$A = 5^{2022} \cdot 64 \text{ ..... (1p)}$$

$$A = 5^{2022} \cdot 64 = (5^{1011})^2 \cdot 8^2 = (5^{1011} \cdot 8)^2 \text{ deci } A \text{ este un pătrat perfect ..... (1p)}$$

$$A = 5^{2022} \cdot 64 = (5^{674})^3 \cdot 4^3 = (5^{674} \cdot 4)^3 \text{ , deci } A \text{ este cub perfect ..... (1p)}$$

**Problema 3.**

Aflați numerele de forma  $\overline{bc}$  și  $p$  pentru care are loc următoarea relație

$$5 \cdot \overline{bc} \cdot \overline{cb} + 3 \cdot b + 3 \cdot c = p, \text{ unde } \overline{bc}, \overline{cb} \text{ și } p \text{ sunt numere prime.}$$

Soluție:

Dacă  $\overline{bc}, \overline{cb}$  sunt numere prime atunci  $b, c \in \{1; 3; 7; 9\}$  ..... (2p)

Distingem următoarele cazuri :

$$C_I: \overline{bc} = 11, \overline{cb} = 11 \text{ atunci } 5 \cdot 11 \cdot 11 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 611, 611: 13, \text{ nu convine}$$

$$C_{II}: \overline{bc} = 13, \overline{cb} = 31 \text{ atunci } 5 \cdot 13 \cdot 31 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 2027, 2027 \text{ este un număr prim, ..... (2p)}$$

$$C_{III}: \overline{bc} = 17, \overline{cb} = 71 \text{ atunci } 5 \cdot 17 \cdot 71 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 6059, 6059: 73, \text{ nu convine}$$

$$C_{IV}: \overline{bc} = 19, \overline{cb} = 91 \text{ atunci } 5 \cdot 19 \cdot 91 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 9 = 8675, 8675: 5, \text{ nu convine}$$

$$C_V: \overline{bc} = 37, \overline{cb} = 73 \text{ atunci } 5 \cdot 37 \cdot 73 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 13535, 13535: 5 \text{ nu convine}$$

$$C_{VI}: \overline{bc} = 39, \overline{cb} = 93 \text{ nu convine pentru că } : \overline{bc}, \overline{cb} \text{ nu sunt numere prime}$$

$$C_{VII}: \overline{bc} = 79, \overline{cb} = 97 \text{ atunci } 5 \cdot 79 \cdot 97 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 38363, 38363: 13, \text{ nu convine ..... (2p)}$$

$$\text{Soluție } \overline{bc} = 13, \overline{cb} = 31 \text{ și } p = 2027 \text{ ..... (1p)}$$

**Problema 4.**

La un concurs de matematică, elevii participanți primesc fiecare pe rând din partea organizatorilor bilete cu numerele : 1; 2; 5; 10; 17; 26; .....

a) Determinați ce numere vor apărea pe următoarele trei bilete

b) Câți elevi participă la concurs, dacă pe ultimul bilet este numărul 2026?

Soluție :

a) Observăm că numerele de pe bilete respect următoarea regulă :

$$1 = 0^2 + 1; \quad 2 = 1^2 + 1; \quad 5 = 2^2 + 1; \quad 10 = 3^2 + 1; \quad 17 = 4^2 + 1; \quad 26 = 5^2 + 1 \text{ .....(1p)}$$

$$\text{Pe următoarele bilete vor fi numerele } : 6^2 + 1 = 37; 7^2 + 1 = 50; 8^2 + 1 = 65 \text{ ..... (2p)}$$

$$\text{b) Observând regula de la punctul a), avem } : x^2 + 1 = 2026 \text{ ..... (1p)}$$

$$\text{De unde } x^2 = 2025, x = 45 \text{ ..... (1p)}$$

$$\text{Primul bilet are numărul } 1 = 0^2 + 1 \text{ deducem } n = 45 + 1 = 46 \text{ participanți ..... (2p)}$$

Soluție : 46 elevi participanți