

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 22 februarie 2025
Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Calculați:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2025}};$

b) $\frac{1}{5\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{9\sqrt{5}+5\sqrt{9}} + \frac{1}{13\sqrt{9}+9\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2021}+2021\sqrt{2025}}.$

Supliment GM

BAREM:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{4}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{4} \dots$

$$\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2025}} = \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{4} \dots \dots \dots 2p$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2025}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{4} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{4} + \dots +$$

$$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{4} = \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{1}}{4} = \frac{44}{4} = 11 \dots \dots \dots 1p$$

b) $\frac{1}{5\sqrt{1}+\sqrt{5}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \frac{1}{9\sqrt{5}+5\sqrt{9}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} \right), \frac{1}{13\sqrt{9}+9\sqrt{13}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right) \dots$

$$\frac{1}{2025\sqrt{2021}+2021\sqrt{2025}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right), \dots \dots \dots 2p$$

$$\frac{1}{5\sqrt{1}+\sqrt{5}} + \frac{1}{9\sqrt{5}+5\sqrt{9}} + \frac{1}{13\sqrt{9}+9\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2021}+2021\sqrt{2025}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{45} \right) = \frac{11}{45} \dots \dots \dots 2p$$

Problema 2

Numerele reale x, y, z verifică egalitatea $x^2 + y^2 + z^2 = 2(7x + 4y + 3z - 37)$.

a) Arătați că $x + 2y = 5z$.

b) Arătați că $\sqrt{x^n + y^n + z^n}$ este un număr irațional pentru orice număr natural nenul n

BAREM:

a)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(7x + 4y + 3z - 37) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 8y - 6z + 74 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 6z + 9 = 0 \Rightarrow (x - 7)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

Cum $(x - 7)^2 \geq 0, (y - 4)^2 \geq 0, (z - 3)^2 \geq 0, \forall x, y, z \in R \Rightarrow$

$$(x - 7)^2 = 0, (y - 4)^2 = 0, (z - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 7, y = 4, z = 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow x + 2y = 7 + 8 = 15 = 5z \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \sqrt{x^n + y^n + z^n} = \sqrt{7^n + 4^n + 3^n}$$

Dacă n este par: $7^n = M_4 + 1, 3^n = M_4 + 1, 4^n = M_4 \Rightarrow 7^n + 4^n + 3^n = M_4 + 2$

Dacă n este impar: $7^n = M_4 - 1, 3^n = M_4 - 1, 4^n = M_4 \Rightarrow 7^n + 4^n + 3^n = M_4 - 2 = M_4 + 2 \dots\dots\dots 2p$

În concluzie, pentru orice număr natural nenul n $7^n + 4^n + 3^n = M_4 + 2$

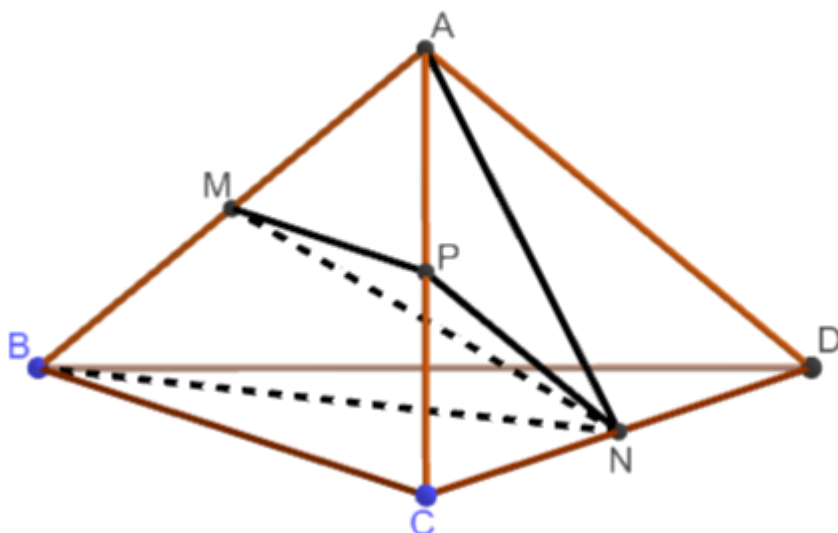
deci $\sqrt{x^n + y^n + z^n} = \sqrt{7^n + 4^n + 3^n} \in R - Q. \dots\dots\dots 1p$

Problema 3

Fie ABCD un tetraedru regulat cu latura AB = 6 cm, iar M mijlocul muchiei AB și N mijlocul muchiei CD.

a) Dacă P este mijlocul lui AC arătați că $AD \parallel (MNP)$.

b) Determinați lungimea segmentului MN.



a) $AP = PC, CN = ND \Rightarrow PN$ linie mijlocie în $\Delta CAD \Rightarrow PN \parallel AD \dots\dots\dots 1p$

$A \notin (MPN), PN \subset (MPN), PN \parallel AD \Rightarrow AD \parallel (MNP) \dots\dots\dots 2p$

b) $\triangle ACD$ echilateral, AN mediană, deci și înălțime $\Rightarrow AN = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm.

Analog $BN = 3\sqrt{3}$ cm $\dots\dots\dots 1p$

În $\triangle NAB, NA = NB$ și $AM = MB \Rightarrow MN \perp AB \dots\dots\dots 1p$

În $\triangle NMB, MN \perp MB$, deci aplicând teorema lui Pitagora obținem

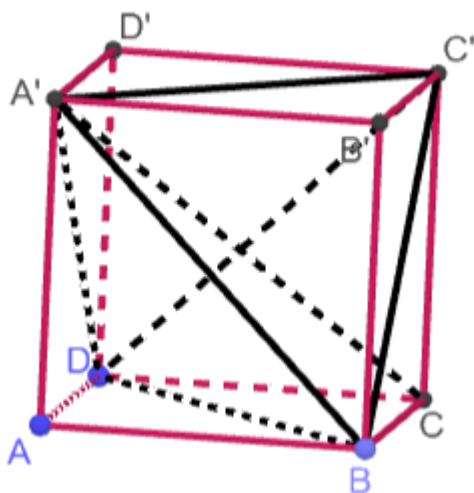
$MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{27 - 9} = 3\sqrt{2}$ cm $\dots\dots\dots 2p$

Problema 4

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$.

a) Determinați măsura unghiului format de dreptele $A'C$ și BC' .

b) Dacă M este centrul cercului circumscris triunghiului $C'BD$ arătați că punctele A', M și C sunt coliniare.



a) $A'B' \perp (BB'C'), BC' \subset (BB'C') \Rightarrow A'B' \perp BC'$
 $BCC'B'$ pătrat $\Rightarrow BC' \perp B'C$ $\dots\dots\dots 1p$
 $BC' \perp B'C, BC' \perp A'B', B'C \cap A'B' = \{B'\} \Rightarrow BC' \perp (B'C, A'B')$
 $\Rightarrow BC' \perp (A'B'C) \dots\dots\dots 1p$
 $A'C \subset (A'B'C) \Rightarrow BC' \perp A'C \Rightarrow \sphericalangle (BC', A'C) = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$

b) Fie l latura cubului.

$C'B = BD = C'D = A'B = A'D = A'C' = l\sqrt{2}$
 $\Rightarrow A'C'DB$ tetraedru regulat $\dots\dots\dots 1p$
 M centrul $\triangle C'BD \Rightarrow A'M \perp (BDC') \dots\dots\dots 1p$
 $A'A \perp (ABD), BD \subset (ABD) \Rightarrow A'A \perp BD, ABCD$ pătrat $\Rightarrow BD \perp AC$
 $BD \perp A'A, BD \perp AC, A'A \cap AC = \{A\} \Rightarrow BD \perp (A'A, AC) \Rightarrow BD \perp (A'AC)$
 $A'C \subset (A'AC) \Rightarrow BD \perp A'C$
 $A'C \perp BD, A'C \perp BC', BD \cap BC' = \{B\} \Rightarrow A'C \perp (BD, BC') \Rightarrow A'C \perp (BDC') \dots\dots\dots 1p$
 $A'M \perp (BDC'), A'C \perp (BDC') \Rightarrow A', M, C$ coliniare $\dots\dots\dots 1p$