

Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană
Proba E.c) Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I****(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, cu $b_5 = 8$ și $b_6 = 4$. Arătați că numărul $\sqrt{\frac{b_1}{2}}$ este natural.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 3$. Determinați numărul real a , știind că punctul $P(a + 1, a^2 + 11)$ este situat pe graficul funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x + 1) = \log_2 8$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\frac{x}{2}$ să facă parte din intervalul $(20; 23)$.
- 5p** 5. În reperul xOy se consideră punctele $A(3, -4)$ și $B(-2, 0)$. Determinați numărul real m pentru care vectorii \overrightarrow{AB} și $\overrightarrow{u} = 2m\overrightarrow{i} - (m + 3)\overrightarrow{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x = \frac{2}{3}$. Arătați că $\operatorname{tg} x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p** b) Arătați că $B(x) \cdot B(y) - xyA = B(x + y)$, oricare ar fi numerele reale x și y .
- 5p** c) Pentru fiecare număr întreg nenul k se consideră matricea $C(k) = B\left(\frac{2}{k}\right) - \frac{2}{k}A$. Determinați numerele k pentru care $\det C(k)$ este număr întreg.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2$.
- 5p** a) Arătați că $0 * (-1) = 1$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(x + 1) * x = x * (x - 1)$.
- 5p** c) Arătați că dacă x și y sunt numere reale astfel încât $|x| \geq 2$ și $|y| \geq 3$, atunci $\sqrt{x * y} \geq 5$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2 - 4x) \cdot \ln x - 3x^2 + 8x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 4(x - 1)(\ln x - 1)$, $x \in (0, \infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 3x^2 - 8x}{x \cdot f'(x)}$.
- 5p** c) Arătați că $\frac{12e - 5}{e^2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 5$, pentru orice $x \in [1, e]$.

2. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x+1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^{\ln 2} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = 1$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x^2 - 1) dx$.

5p c) Determinați numărul real m pentru care $2 \int_0^1 (x+1)f(x)dx = m - 3 \int_0^1 f(x)dx$.


Mate.info.ro

profu' de mate

Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană
Proba E.c) Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	Rația progresiei este $q = \frac{b_6}{b_5} = \frac{1}{2}$. $b_5 = b_1 q^4$, de unde $b_1 = 128$, deci $\sqrt{\frac{b_1}{2}} = \sqrt{64} = 8$, care este număr natural.	2p 3p
2.	$f(a+1) = a^2 + 11$, deci $(a+1)^2 + a + 1 - 3 = a^2 + 11$ $a^2 + 3a - 1 = a^2 + 11$, de unde obținem $a = 4$.	3p 2p
3.	$\log_3(2x+1) = 3$, de unde $2x+1 = 27$ $x = 13$, care convine.	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Din $20 < \frac{x}{2} < 23$, cum x este număr natural, se obține $x \in \{41, 42, 43, 44, 45\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile. $p = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.	2p 3p
5.	$\vec{AB} = (-2-3)\vec{i} + (0+4)\vec{j} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$ \vec{AB} și \vec{u} coliniari implică $\frac{-5}{2m} = \frac{4}{-m-3}$, deci $5m+15 = 8m$, de unde $m = 5$.	2p 3p
6.	Cum $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x = \frac{2}{3}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, se obține $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 =$ $= 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1.$	3p 2p
b)	$B(x) \cdot B(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ y & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & xy & x+y \\ x+y & 1 & xy \\ xy & x+y & 1 \end{pmatrix}$	3p

	$B(x) \cdot B(y) - xyA = \begin{pmatrix} 1 & xy & x+y \\ x+y & 1 & xy \\ xy & x+y & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \\ xy & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ x+y & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} = B(x+y)$	2p
c)	$C(k) = B\left(\frac{2}{k}\right) - \frac{2}{k}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{k} \\ \frac{2}{k} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{k} \\ \frac{2}{k} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{k} & \frac{2}{k} \\ \frac{2}{k} & 1 & -\frac{2}{k} \\ -\frac{2}{k} & \frac{2}{k} & 1 \end{pmatrix}$ <p>$\det C(k) = 1 + \frac{12}{k^2}$, care este număr întreg dacă și numai dacă $k \in \{1, -1, 2, -2\}$.</p>	2p 3p
2.a)	$0 * (-1) = 0^2 \cdot (-1)^2 - 0^2 - (-1)^2 + 2 =$ $= 0 - 0 - 1 + 2 = 1$	3p 2p
b)	$(x+1) * x = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ și $x * (x-1) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ $(x+1) * x = x * (x-1)$ are loc dacă și numai dacă $4x(x^2-1) = 0$, de unde se obțin soluțiile $x = -1, x = 0$ și $x = 1$.	3p 2p
c)	<p>Din $x \geq 2$ și $y \geq 3$ se obține $x^2 \geq 4$ și $y^2 \geq 9$</p> $\sqrt{x * y} = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2} = \sqrt{x^2(y^2 - 1) - (y^2 - 1) + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$ $\geq \sqrt{(4 - 1)(9 - 1) + 1} = \sqrt{25} = 5.$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (4x - 4) \cdot \ln x + (2x^2 - 4x) \cdot \frac{1}{x} - 6x + 8 =$ $= 4(x - 1) \cdot \ln x - 4x + 4 = 4(x - 1)(\ln x - 1), x \in (0, \infty).$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 3x^2 - 8x}{x \cdot f'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 4x) \cdot \ln x}{4x(x-1)(\ln x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 4x}{4x(x-1)} \cdot \frac{\ln x}{\ln x - 1} \right) =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{4x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$	2p 3p
c)	<p>$f'(x) \geq 0$, pentru $x \in (0, 1]$, deci f este crescătoare pe intervalul $(0, 1]$, $x \in [1, e]$ implică $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ Se obține $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(1), x \in [1, e]$, echivalent $\frac{12e-5}{e^2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 5, x \in [1, e]$.</p>	2p 3p
2.a)	$\int_0^{\ln 2} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^{\ln 2} e^x dx = e^x \Big _0^{\ln 2} =$ $= e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1.$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x^2 - 1) dx = \int_0^1 x e^{x^2 - 1} dx = \frac{e^{x^2 - 1}}{2} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2} = \frac{e-1}{2e}.$	3p 2p
c)	$\int_0^1 (x+1)f(x) dx = \int_0^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} e^x dx = \int_0^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} (e^x)' dx =$ $= (x+1)^{\frac{3}{2}} e^x \Big _0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 \sqrt{x+1} e^x dx = 2\sqrt{2}e - 1 - \frac{3}{2} \int_0^1 \sqrt{x+1} e^x dx$ <p>Se obține $2 \int_0^1 (x+1)f(x) dx = 2 \cdot (2\sqrt{2}e - 1) - 3 \int_0^1 f(x) dx$, deci $m = 2 \cdot (2\sqrt{2}e - 1)$.</p>	3p 2p