

**Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană****Proba E.c) Matematică M_mate_info** **Varianta 1***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I****(30 puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul complex $z \in \mathbb{C}$ știind că $(2 - i)z = 4i + \bar{z}$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m - 2$, unde m este număr real. Determinați valorile parametrului real m pentru care $f(m) = f(f(-1))$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4x) = \log_x 8$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Care este probabilitatea ca alegând o submulțime dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii A , aceasta să aibă produsul elementelor număr impar?
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC . Fie M mijlocul laturii (BC) și N mijlocul lui (AM) . Să se arate că $\vec{NB} + \vec{NC} + \vec{NA} = \vec{NM}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0, \pi)$ pentru care $\sqrt{3} \cdot \sin 2x = 2\cos^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea**(30 puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 4z = 3 \end{cases}$ unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = a(3 - a)$.
- 5p** b) Pentru $a = 0$, arătați că sistemul este incompatibil.
- 5p** c) Pentru $a = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului care au proprietatea că $x_0^2 = y_0 \cdot z_0$.
2. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se consideră legea de compoziție asociativă: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.
- 5p** a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție $*$.
- 5p** b) Fie funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Arătați că $f(x * y) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in G$.
- 5p** c) Determinați numerele reale $x \in G$, pentru care $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } 2025 \text{ ori}} = x$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n , ecuația $f(x) = n$ are două rădăcini reale.
2. Se consideră funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+4}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4}$.
- 5p b) Arătați că orice primitivă a funcției f are exact un punct de inflexiune.
- 5p c) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = 0$.



Examenul național de bacalaureat 2025
Simulare județeană
Proba E.c) Matematică *M_mate_info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	$z = a + bi \Rightarrow (2 - i)(a + bi) = 4i + a - bi \Rightarrow 2a + b + i(2b - a) = a + i(4 - b)$ $2a + b = a, 2b - a = 4 - b \Rightarrow a = -1, b = 1 \Rightarrow z = -1 + i$	2p 3p
2.	$f(m) = 2m^2 + m - 2, f(f(-1)) = -1 \Rightarrow 2m^2 + m - 2 = -1$ Obținem $2m^2 + m - 1 = 0 \Rightarrow m \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.	2p 3p
3.	$x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. $\log_2(4x) = \log_x 8 \Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \frac{3}{\log_2 x} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x - 3 = 0$ $(\log_2 x - 1)(\log_2 x + 3) = 0 \Rightarrow \log_2 x = 1, \log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2, x = \frac{1}{8}$, care verifică ecuația dată.	3p 2p
4.	Avem $C_6^3 = 20$ cazuri posibile și $C_3^3 = 1$ cazuri favorabile \Rightarrow $P = \frac{1}{20}$.	3p 2p
5.	$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NM}$ $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NM}$	3p 2p
6.	$\sqrt{3} \sin 2x = 2\cos^2 x \Rightarrow 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{vmatrix} = 8 + a + 2a - 4 - a^2 - 4 =$ $= 3a - a^2 = a(3 - a)$.	3p 2p
b)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A(0)) = 2$ $\overline{A(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\overline{A(0)}) = 3$ $\text{rang}(A(0)) \neq \text{rang}(\overline{A(0)}) \Rightarrow$ sistem incompatibil.	2p 2p 1p
c)	Pentru $a = 3$, soluțiile sistemului sunt de forma $\left(\frac{1-\alpha}{2}, \alpha, \frac{1-\alpha}{2}\right)$ unde $\alpha \in \mathbb{R}$. $x_0^2 = y_0 z_0 \Rightarrow \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 = \alpha \cdot \frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = \frac{1}{3}$	3p 1p

	$\alpha = 1 \Rightarrow S_1 = (0,1,0)$ și $\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow S_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.	1p
2.a)	$x * e = e * x = \frac{x+e}{1+xe}$	1p
	$x * e = x \Rightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x$	1p
	$x + e = x + x^2e \Rightarrow e = 0$.	3p
b)	$f(x * y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \frac{1 - \frac{x+y}{1+xy}}{1 + \frac{x+y}{1+xy}} = \frac{xy - x - y + 1}{xy + x + y + 1}$	3p
	$f(x)f(y) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} = \frac{xy - x - y + 1}{xy + x + y + 1} \Rightarrow f(x * y) = f(x)f(y)$	2p
c)	$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2025 ori}} = x \Rightarrow f\left(\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2025 ori}}\right) = f(x) \Rightarrow \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{\text{de 2025 ori}} = f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow (f(x))^{2025} = f(x) \Rightarrow f(x) = 0, f(x) = 1, f(x) = -1$	3p
	$f(x) = -1$ nu convine, $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ care nu convine, $f(x) = 1 \Rightarrow x = 0 \in G$	2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

1.a)	$f'(x) = (\ln(e^{2x} + 1))' - (x)' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1 =$	3p
	$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.	2p
b)	$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$	2p
	$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$	2p
	\Rightarrow dreapta $y = x$ este asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcției	1p
c)	f derivabilă pe \mathbb{R} , strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, \infty)$.	2p
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, f(0) = \ln 2$	2p
	$n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow n > \ln 2$ și deci, ecuația $f(x) = n$ are două rădăcini reale.	1p
2.a)	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+4} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3+4) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} (\ln 5 - \ln 4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4}$.	2p
b)	Fie F o primitivă a lui $f \Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [0, \infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow F''(x) = f'(x) = \frac{8-x^3}{(x^3+4)\sqrt{x^3+4}}$.	3p
	F convexă pe $[0,2]$, F concavă pe $[2, \infty) \Rightarrow x = 2$ punct de inflexiune pentru $F(x)$.	2p
c)	$x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{3n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^{3n}+4}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^n}{\sqrt{5}} \leq f(x^n) \leq \frac{x^n}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.	2p
	$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{5}} dx \leq \int_0^1 f(x^n) dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}(n+1)} \leq \int_0^1 f(x^n) dx \leq \frac{1}{2(n+1)}$ de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = 0$.	3p