


profu' de mate
Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Model ianuarie 2025
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I
(30puncte)

- 5p 1) Arătați că $2 \cdot \log_5(4 - \sqrt{6}) + 2 \cdot \log_5(4 + \sqrt{6}) - \log_5 4 = 2$.
- 5p 2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Determinați $f(A)$, unde $A = [-2, 2)$.
- 5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}$.
- 5p 4) Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii A , aceasta să aibă cel mult două elemente.
- 5p 5) În reperul cartezian xOy se consideră dreptele paralele $d_1: 3x - 4y = 0$ și $d_2: 6x - 8y - 5 = 0$. Determinați distanța dintre dreptele d_1 și d_2 .
- 5p 6) Calculați $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea
(30puncte)

- 1) Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & -2x \\ 6x & 1-4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x) - I_2) = 0$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - x \cdot y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Arătați că $\det(A^2(x) + I_2) > 0$, pentru orice număr real x .
- 2) Pe mulțimea $G = (0, 1)$ se definește legea de compoziție asociativă
- $$x \circ y = \frac{2024xy}{2025xy - x - y + 1}.$$
- 5p a) Calculați $\frac{1}{2025} \circ \frac{1}{2025}$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Arătați că $f: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x + 2024}$ este un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive $((0, \infty), \cdot)$ și grupul (G, \circ) .

SUBIECTUL al III-lea
(30puncte)

- 1) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-3x+3} - \frac{9}{2}x^2 + 12x - \frac{17}{2}$.
- 5p a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat

pe graficul funcției f .

5p c) Arătați că funcția f are un singur punct de inflexiune.

2) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2025(1-x^{2024}), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

5p a) Arătați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

5p b) Calculați $\int_0^e f(x) dx$.

5p c) Arătați că $2025 \int_1^x f^{2024}(t) dt + \int_1^x f^{2025}(t) dt = x f^{2025}(x)$, pentru orice $x \geq 1$.